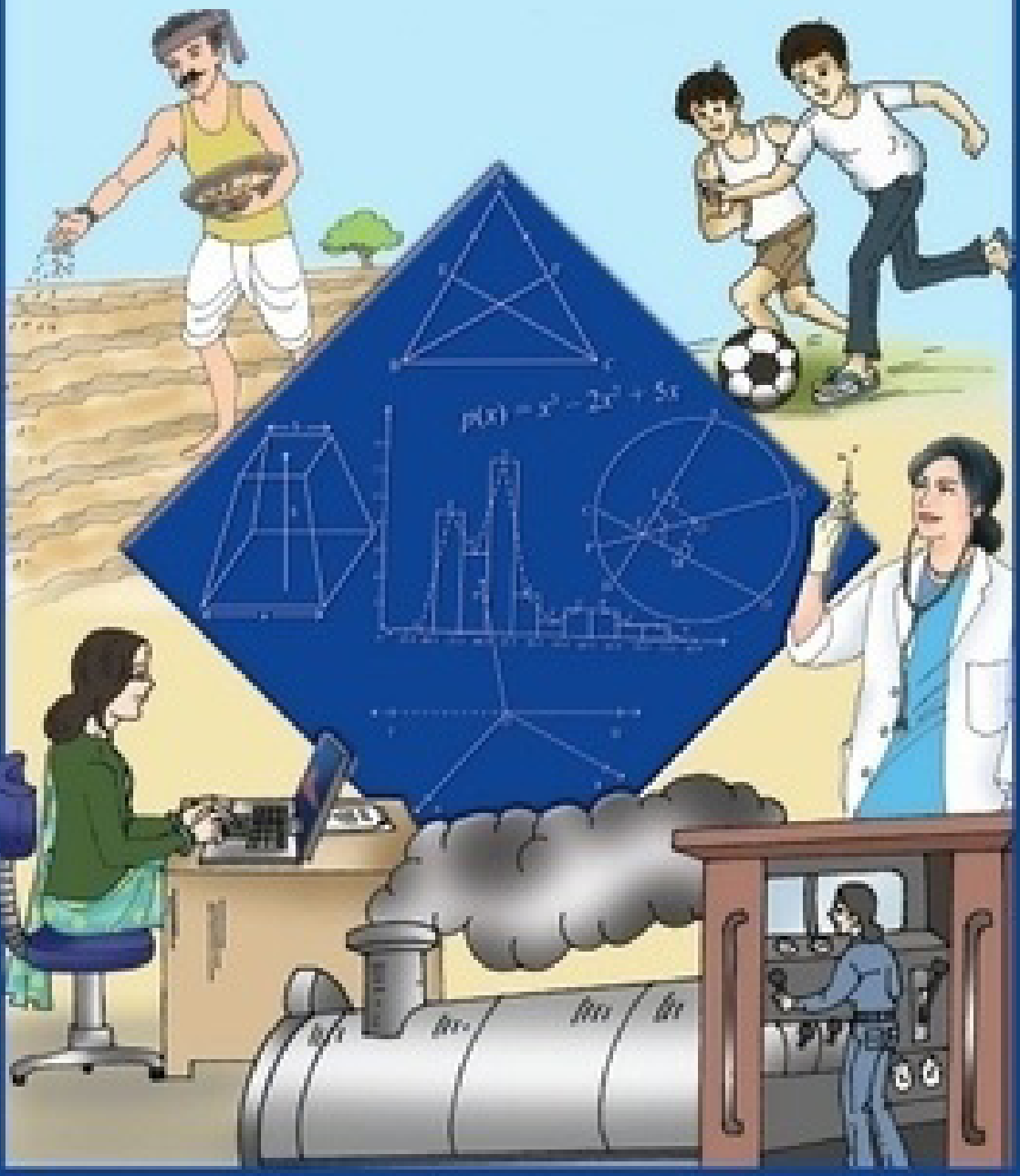
गणितम्

नवमकक्ष्यायै पाठ्यपुस्तकम्



गणितम्

नवमकक्षायाः कृते पाठ्यपुस्तकम्

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रिय-शैक्षिकानुसन्धान-प्रशिक्षण-परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONL RESEARCH AND TRAINING

दिसम्बरमासः 2016 इत्यस्मात् संस्करणात्
अस्माभिः संस्कृतानुवादः कृतः ।

आमुखम्

राष्ट्रिय-पाठ्यचर्यायाः रूपरेखा (2005) ज्ञापयति यत् बालकानां विद्यालयीयं जीवनं बाह्य-जीवनेन सह योजनीयम्। अयं सिद्धान्तः पुस्तकीय-ज्ञानस्य तस्मात् न्यासाद् विपरीतः अस्ति यस्य प्रभाववशात् अस्माकं व्यवस्था अद्यावधि विद्यालयस्य गृहस्य च मध्ये अन्तरालं विरचितवती अस्ति। नूतन-राष्ट्रिय-पाठ्यचर्याधारिताः पाठ्यक्रमाः पाठ्यपुस्तकानि च एतम् आधारभूत-विचारं क्रियान्क्रियन्वेतुं कश्चन प्रयासः अस्ति। एतस्मिन् प्रयासे प्रत्येकं विषयस्य एकदृढभित्त्या आवरणस्य अथ च सूचना-संस्मारणस्य प्रवृत्तेः विरोधः समाविष्टः अस्ति। आशासे यत् एते प्रयासाः अस्मान् राष्ट्रिय-शिक्षा-नीतौ (1986) वर्णितायाः बालकेन्द्रित-व्यवस्थायाः दिशि सुदूरं नेष्यन्ति।

एतस्य प्रयत्नस्य साफल्यम् अधुना एतस्मिन् तथ्ये आश्रितम् अस्ति यत् विद्यालयानाम् आचार्याः अध्यापकाः च बालकेभ्यः कल्पनाशील-गतिविधीनां प्रश्नानां च साहाय्येन शिक्षणाधिगमसमये स्वीयेषु अनुभवेषु चिन्तनं कर्तुम् अवसरान् प्रददति। अस्माभिः एतत् मन्तव्यं यत् यदि समयं स्थानं स्वतन्त्रतां च बालकेभ्यः प्रयच्छामः तर्हि बालकाः ज्येष्ठैः समर्पितया सूचना-सामग्र्या सह युक्त्वा सङ्घर्षं च कृत्वा नूतन-ज्ञानस्य सर्जनं कुर्वन्ति। शिक्षायाः विविधानां साधनानाम् एवञ्च स्रोतसाम् अवहेलनस्य प्रमुख-कारणं पाठ्यपुस्तकस्य परीक्षायाः एकमात्रम् आधारत्वेन निर्माणस्य प्रवृत्तिः अस्ति। सर्जनस्य प्रारम्भस्य च विकासार्थम् आवश्यकम् अस्ति यत् वयं बालकान् शिक्षणस्य प्रक्रियायां पूर्ण-सहभागित्वेन अङ्गीकुर्याम तथा च तेषां सहभागितां सुनिश्चिनवाम, ते बालकाः ज्ञानस्य निर्धारित-मात्रायाः ग्राहकाः सन्ति इति चिन्तनं त्यक्तव्यम्।

एते उद्देश्याः विद्यालयस्य दैनिक-जीवने कार्यशैल्यां च आधिक्येन परिवर्तनं याचन्ते। दैनन्दिन्यां समय-सारण्यां परिवर्तनशीलत्वं (लचीलापन) तावदेव आवश्यकम् अस्ति यावत् वार्षिक-कालन्धरस्य क्रियान्वयने जागरूकता, येन शिक्षणार्थं नियत-दिनानां सङ्ख्या वास्तविकं रूपं स्वीकुर्यात्। शिक्षण-मूल्याङ्कनयोः विधयः अपि एनं विषयं निश्चेष्यन्ति यत् इदं पाठ्यपुस्तकं विद्यालये बालानां जीवनेभ्यः मानसिकोद्वेगस्य खिन्नतायाः च स्थाने हर्षं प्रदातुं कियत् प्रभावि सिध्यति। भारस्य समस्यायाः समाधानार्थं पाठ्यक्रम-निर्मातृभिः विभिन्नेषु चरणेषु ज्ञानस्य पुनर्निर्धारण-समये बालानां मनोविज्ञानाय एवञ्च अध्यापनाय उपलब्ध-समयस्य ध्यानं दातुं पूर्वापेक्षया अधिकः सचेष्टः प्रयत्नः कृतः अस्ति। एषः प्रयासः इतोऽपि गभीरतया स्यात् इति प्रयत्ने इदं पाठ्यपुस्तकं चिन्तनाय, विस्मयाय, लघुसमूहेषु वार्तालापाय, तर्काय एवं च चर्चायै तथा च हस्ताभ्यां क्रियमाणेभ्यः गतिविधिभ्यः प्राथमिकतां प्रयच्छति।

राष्ट्रिय-शैक्षिकानुसन्धान-प्रशिक्षण-परिषद् एतस्य पुस्तकस्य रचनायै निर्मितायाः पाठ्यपुस्तक-निर्माण-समितेः परिश्रमस्य कृते कृतज्ञतां प्रकटीकरोति। परिषद् सामाजिक-विज्ञान-पाठ्यपुस्तकस्य परामर्शदातृ-समितेः अध्यक्षं आचार्यहरि-वासुदेवन्-महोदयं प्रति तथा च एतस्याः पाठ्यपुस्तक-समितेः मुख्य-परामर्शदातारं प्रो. तापसमजूमदारं प्रति विशेषरूपेण आभारं प्रकटयति। एतस्य पाठ्यपुस्तकस्य वर्धने बहुभिः शिक्षकैः योगदानं कृतम्। एतद् योगदानं सफलीकर्तुं वयं तेषां शिक्षकाणां प्राचार्यान् प्रति अपि कृतज्ञतां प्रकटयामः। वयं तानि सर्वाणि सङ्घटनानि संस्थाः च प्रति कृतज्ञाः स्मः यैः स्वीय-सामग्रीणाम्, संसाधनानाम् एवं च सहयोगिनां साहाय्यस्य स्वीकरणे औदार्यपूर्वकं सहयोगः कृतः।

वयं माध्यमिकोच्चशिक्षा-विभाग-मानव-संसाधन-विकास-मन्त्रालय-द्वारा नियुक्तस्य आचार्यमृणालमीरि -महोदयस्य एवम् आचार्यजी.पी.देशपाण्डे-महोदयस्य आध्यक्ष्ये निर्मितायाः निरीक्षण-समितेः तान् सदस्यान् प्रति धन्यवादवचांसि व्यवहरामः ये स्वकीयं मूल्यवन्तं समयं सहयोगं च दत्तवन्तः । व्यवस्थागत-संस्करणेषु स्वीय-प्रकाशनेषु च नैरन्तर्येण परिष्काराय समर्पिता परिषद् टिप्पणीः परामर्शान् च स्वागतीकरिष्यति येन भाविसंशोधनेषु साहाय्यं स्वीकर्तुं शक्येत।

नवदेहली निदेशकः

२० दिसम्बर् २००५ राष्ट्रियशैक्षिकानुसन्धान-प्रशिक्षणपरिषद्

पाठ्यपुस्तक-निर्मातृ-समितिः

विज्ञानस्य गणितस्य च परामर्शदातृसमूहस्य अध्यक्षः

जयन्त-विष्णु-नारलीकरः, *इमीरिटस-प्रोफेसरः*, अध्यक्षः, आई.यू.सी.ए.ए., गणेशखिंडः, पूना-विश्वविद्यालयः, पूना।

मुख्यपरामर्शदाता

पी.सिंक्लेयरः, *प्रोफेसरः*, विज्ञानविद्यापीठम्, इ.गा.रा.मु.वि., नवदेहली।

मुख्यसमन्वयकः

हुकुमसिंहः,*प्रो.*,डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प.,नवदेहली

सदस्यः

अजंलीलालः, *पी.जी.टी.*(गणितम्), डी.ए.वी.पब्लिकस्कूल इति, सेक्टर-14, गुरुग्रामः

अंजूनिरूला, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम.,रा.शै.अ.प्र.प.,नवदेहली।

उदयसिंहः, *प्रवक्ता*, डी.ई.एस.एम.,रा.शै.अ.प्र.प., नवदेहली।

ए.के.वझलवारः, प्रोफेसरपदासीनः, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नवदेहली।

एस.वेंकटरमनः, *प्रवक्ता*, विज्ञानविद्यापीठम्, इं.गा.रा.मु.वि.नवदेहली।

जी.पी.दीक्षितः, *प्रोफेसरः*, गणितखगोलीय-विभागः, लखनवु-विश्वविद्यालयः, लखनवुः,

के.ए.एस.एस.वी.कामेश्वररावः, प्रवक्ता, क्षेत्रीयशिक्षासंस्थानम्, भुवनेश्वरम्।

महेन्द्रःआर.गजरे, *पी.जी.टी.*,अतुलविद्यालयः, अतुलम्, जनपदं वलसादम्,

महेन्द्रशंकरः, *प्रवक्ता* (एस.जी.) (सेवानिवृत्तः),रा.शै.अ.प्र.प., नवदेहली।

रामाबालाजी, *टी.जी.टी.*(गणितम्), के.वी.मेग इति अपि च केन्द्रम्, सेंट-जान्स-मार्गः, बैंगलुरुः।

वेदडुडेजा, उप-प्रधानाचार्यः (सेवानिवृत्तः), राजकीयबालिकामाध्यमिक-विद्यालयः, सैनिकविहारः, देहली।

संजयमुद्गलः, *प्रवक्ता*, सी.आई.ई.टी., रा.शै.अ.प्र.प., नवदेहली।

शशिधरजगदीशनः, शिक्षकः सदस्यः च, गवरनिंगकांउसिल इति, सेन्टर फार लर्निंग इति ,बैंगलुरुः।

हिन्दी-रूपांतरकर्ता,

जी.पी.दीक्षितः, *प्रोफेसरः*, गणितखगोलीयविभागः, लखनवुविश्वविद्यालयः, लखनवुः।

महेन्द्रशंकरः, *प्रवक्ता*, (एस.जी.)(सेवानिवृत्तः), रा.शै.अ.प्र.प., नवदेहली।

हरीश्वरप्रसादसिन्हाः, सी-210, राजाजीपुरम्, लखनवुः।

सदस्य-समन्वयकः

रामावतारः, *प्रोफेसरः*, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नवदेहली (दिसम्बर 2005 इति यावत्)।

आर.पी.मौर्यः, प्रोफेसरः, डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नवदेहली (जनवरी 2006इत्यारभ्य)।

भारतीय- संविधानम्

उद्देशिका

वयं भारतीयाः, भारतदेशम् एकं **सम्पूर्ण-प्रभुत्व-सम्पन्नम्, समाजवादि, पन्थ-निरपेक्षम्, लोकतन्त्रात्मक-गणराज्यं** निर्मातुं तथा च तस्य समस्तनागरिकानां कृते;

सामाजिकम् आर्थिकं तथा च राजनैतिकं **न्यायम्**,
विचारस्य अभिव्यक्तेः विश्वासस्य धर्मस्य
उपासनायाः च **स्वतन्त्रताम्**,
प्रतिष्ठायायाः अवसरस्य च **समतां**
प्रापयितुं
तथा च तेषु **सर्वेषु**
मानवीयगौरवस्य तथा च **राष्ट्रियैकतायाः अखण्डतायाश्च** सुनिश्चयकर्त्रीं **बन्धुतां** संवर्धयितुं.....

दृढसंकल्पाः भूत्वा **अस्यां स्वसंविधानसभायाम्** अद्य नवम्बरमासस्य 26तमे दिनाङ्के1949 तमे ख्रीस्ताब्दे (मार्गशीर्षे शुक्लसप्तम्यां 2006 तमे विक्रमसंवत्सरे) **एतत् संविधानम् अङ्गीकुर्मः अधिनियमितं तथा च आत्मार्पितं कुर्मः ।**

कृतज्ञता-ज्ञापनम्

परिषद् पाठ्यपुस्तकस्य समीक्षणाय आयोजितकार्यशालायाः निम्नलिखितप्रतिभागिनां तेषाम् अमूल्ययोगदानाय हार्दिकीं कृतज्ञतां विज्ञापयति – ए.के.सक्सैना, *प्रोफेसरः*(सेवानिवृत्तः), लखनवुविश्वविद्यालयः लखनवुः, सुनीलबजाजः, *एच.ओ.डी.*(गणितम्), एस.सी.ई.आर.टी.हरियाणा, गुरुग्रामः, के.एल.आर्यः, *प्रोफेसरः* (सेवानिवृत्तः), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नवदेहली., बंदिताकालरा, *प्रवक्ती*, सर्वोदयकन्याविद्यालयः, विकासपुरी, डिस्ट्रिक्टसेंटर, नवदेहली, जगदीशसिंहः, *पी.जी.टी.*, सैनिकस्कूल, कपूरथला, पी.के.बग्गा, *टी.जी.टी.,* एस.बी.वी., सुभाषनगरम्, नवदेहली, आर.सी.महाना, *टी.जी.टी.*, केन्द्रीयविद्यालयः, संबलपुरम्, टी.आर.खंडवे, *टी.जी. टी.,* जे.एन.वी.दुधनोई, गोलपाडा, एस.एस.चट्टोपाध्यायः, एसिसटेंट-मास्टर, विधाननगर-सर्वकारीयोच्चविद्यालयः, कोलकात्ता, एन.ए.सुजाथा, *टी.जी.टी.,* के.वी.वास्को न.1, गोवा; अकिलासहदेवनः, *टी.जी.टी.*, के.वी.मीनांबक्कमः, चैन्नै; एस.सी.राऊतो, *टी.जी.टी.,* सैंट्रलस्कूल फॉर तिब्बतनसः, मसूरी., सुनीलपी.जेवियर, *टी.जी.टी.*, एन.वी., नेरीयामंगलम्, एरनाकुलम्., अमितबजाजः, *टी.जी.टी*, सी.आर.पी.एफ पब्लिकस्कूल, रोहिणी, दिल्ली., आर.के.पाण्डे, *टी.जी.टी.,* डी.एम.स्कूल, आर.आई.ई.भोपालम्, वी.माधवी, *टी.जी.टी.*, संस्कृति-स्कूल, चाणक्यपुरी, नवदेहली., जी.श्री हरि बाबू, *टी.जी.टी.*, जे.एन.वी.कागजनगरम्, अदिलाबादम्।

परिषद् तेषां विषयविशेषज्ञानां शिक्षकाणां विभागीयसदस्यानां च कृते अपि कृतज्ञतां विज्ञापयति ये एतस्य पुस्तकस्य हिन्दीसंस्करणस्य समीक्षां कृतवन्तः तथा च पुस्तकमेतत् आधिक्येन उपयोगि स्यात् इत्यर्थं महत्त्वपूर्णपरामर्शान् दत्तवन्तः – नन्दकिशोरवर्मा,प्रवक्ता, एच.ई.एस. –ii, गणितविभागः, राज्यशैक्षिकानुसन्धानप्रशिक्षणपरिषद्, गुरुग्रामः, रविन्द्रसिंहपंवारः, *पी.जी.टी.*, रामजस.वरिष्ठ.माध्यमिक.पाठशाला, यूसुफसरायः, नवदेहली, अजयकुमारसिंहः, *टी.जी. टी.*सी.सै.स्कूल, न.3, कूचा नटवा, चांदनीचौकः, दिल्ली., सविता गर्गः, *पी.जी.टी.*, सर्वोदयकन्याविद्यालयः, चांदनगरम्, नवदेहली, सुधागुप्ता, *टी.जी.टी.*, सर्वोदय-कन्या-विद्यालयः, अवन्तिका, रोहिणी, दिल्ली, राजकुमारभारद्वाजः, *टी.जी.टी.*, राजकीयमाध्यमिकबालविद्यालयः, ए-ब्लाक, सुल्तानपुरी, दिल्ली., अशोककुमारगुप्ता, *टी.जी.टी.*, राजकीयोच्चतरमाध्यमिकविद्यालयः, एस.यू.ब्लाक, पीतमपुर दिल्ली., पी.के.तिवारी, सहायकायुक्तः(सेवानिवृत्तः), केन्द्रीयविद्यालयसङ्घटनम्, नवदेहली., आर.पी.मौर्यः, (समन्वयकः) प्रोफेसर, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी।

परिषद् पुस्तकविकासस्य प्रक्रियायां सहयोगाय एम.चन्द्रा, प्रोफेसरविभागाध्यक्षश्च, डी.ई.एम.एम., एन.सी.ई.आर.टी. इत्येतं प्रति विशेषेण कृतज्ञतां विज्ञापयति।

कम्प्यूटरप्रभारी, दीपककपूरः, *डी.टी.पी.*आपरेटर, नरेशकुमार,कॉपी सम्पादकः, प्रगतिभारद्वाजः एल.आर.भारती., प्रूफ रीडर, योगिताशर्मा इत्येतैः सर्वैः प्रयासाः विहिताः तदर्थम् परिषद् एतान् प्रति कृतज्ञतां विज्ञापयति। ए.पी.सी.कार्यालयस्य, डी.ई.एस.एम.इत्यस्य प्रशासनस्य, प्रकाशनविभागस्य एन.सी.ई.आर.टी.सचिवालयस्य च द्वारा कृतं योगदानं प्रशंसनीयम् अस्ति।

अनुवादकः - वेङ्कटकृष्णः

विषय-सूची

	आमुखम्		iii
1.	**सङ्ख्या-तन्त्रम्**		**1**
	1.1	प्रस्तावना	1
	1.2	अपरिमेय सङ्ख्याः	5
	1.3	वास्तविक सङ्ख्याः तथा तेषाम् दशमल-विस्ताराः	8
	1.4	सङ्ख्या-रेखायाम् वास्तविक-सङ्ख्यानां निरूपणम्	14
	1.5	वास्तविकसङ्ख्यासु गणितप्रक्रियाः	17
	1.6	वास्कविक-सङ्ख्यानां घाताङ्कनियमाः	23
	1.7	सारांशः	26
2.	**बहुपदानि**		**28**
	2.1	प्रस्तावना	28
	2.2	एकचरयुक्तम् बहुपदम्	28
	2.3	बहुपदानां शून्याः	32
	2.4	शेषफल-प्रमेयः	35
	2.5	बहुपदानां गुणनखण्डनम्	40
	2.6	बीजीय सर्वसमीकाः	43
	2.7	सारांशः	49
3.	**निर्देशाङ्क-ज्यामितिः**		**50**
	3.1	प्रस्तावना	50
	3.2	कार्तीय पद्धतिः	53
	3.3	तले बिन्दोः आलेखनम् यदि अस्य निर्देशाङ्काः दत्ताः चेत्	56
	3.4	सारांशः	64

4.	**चरद्वययुक्तं रैखिकसमीकरणम्**		**66**
	4.1	प्रस्तावना	66
	4.2	रैखिक-समीकरणम्	66
	4.3	रैखिक-समीकरणस्य समाधानम्	68
	4.4	चरद्वययुक्तं रैखिकसमीकरणस्य आलेख-चित्रम्	70
	4.5	x-अक्षः तथा y-अक्षयोः समानान्तरम् विद्यमानानां रेखानां समीकरणम्	76
	4.6	सारांशः	78
5.	**यूक्लिडीय-ज्यामितेः प्रस्तावना**		**80**
	5.1	प्रस्तावना	80
	5.2	युक्लिडस्य लक्षणानि,अभिगृहीताः,अभिधारणाः च	82
	5.3	युक्लिडस्य प़ञ्चमायाः अभिधारणायाः समतुल्य रूपान्तरः	87
	5.4	सारांशः	89
6.	**रेखाः कोणाः च**		**91**
	6.1	प्रस्तावना	91
	6.2	आधारभूतानि पदानि तथा परिभाषाः	92
	6.3	प्रतिच्छेदी-रेखाः तथा अप्रतिच्छेदी-रेखाः	93
	6.4	कोणानां युग्मः	94
	6.5	समान्चतर रेखाः तथा तिर्याञ्चक रेखाः	99
	6.6	एकस्याः एव रेखायाः समान्तर रेखाः	102
	6.7	त्रिभुजायाः कोणयोगः गुणधर्मः	106
	6.8	सारांशः	110
7.	**त्रिभुजाः**		**111**
	7.1	प्रस्तावना	111
	7.2	त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमता	111
	7.3	त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः मानदण्डः	114
	7.4	त्रिभुजानां केचन गुणाः	123
	7.5	त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः इतोऽपि केचन मानदण्डाः	127
	7.6	त्रिभजायां अस्मिकाः	131
	7.7	सारांशः	136

8.	**चतुर्भुजाः**		**138**
	8.1	प्रस्तावना	138
	8.2	चतुर्भुजस्य कोण-योग-गुणधर्मः	140
	8.3	चतुर्भुजानां प्रकाराः	140
	8.4	समान्तर-चतुर्भुजानां गुणधर्माः	142
	8.5	चतुर्भुजः समान्तर-चतुर्भुजः भवितुं अन्यःएकः प्रतिबन्धः	148
	8.6	मध्य-बिन्दुः प्रमेयः	151
	8.7	सारांशः	155
9.	**समान्तरचतुर्भुजानां त्रिभुजानां च क्षेत्रफलम्**		**156**
	9.1	प्रस्तावना	156
	9.2	समाने आधारे तथा समान समान्तरयोः विद्यमानाः आकृतयः	458
	9.3	समाने आधारे तथा समान समान्तरयोः विद्यमानाः समान्तर-चतुर्भुजाः	160
	9.4	समाने आधारे तथा समान समान्तरयोः विद्यमानाः त्रिभुजाः	165
	9.5	सारांशः	173
10.	**वर्तुलाः**		**174**
	10.1	प्रस्तावना	174
	10.2	वर्तुलाः तथा तत्सम्बद्ध परिभाषाः-एकम् अवलोकनम्	175
	10.3	बिन्दौ जीवया अन्तरितः कोणः	177
	10.4	मध्यबिन्दोः जीवा पर्यन्तम् विद्यमाना समालम्बा रेखा	180
	10.5	बिन्दुत्रयेण द्वारा वर्तुलः	181
	10.6	सम-जीवाः तथा मध्यबिन्दुतः तेषां दूरः	183
	10.7	वर्तुलस्य चापेन अन्तरितः कोणः	186
	10.8	चक्रीय-चतुर्भुजाः	189
	10.9	सारांशः	194
11.	**निर्माणम्**		**195**
	11.1	प्रस्तावना	195
	11.2	आधारभूतानि निर्माणानि	196
	11.3	त्रिभुजानां कानिचन निर्माणानि	198
	11.4	सारांशः	203

12. हेरानस्य सूत्रणम् 204

12.1 प्रस्तावना 204

12.2 त्रिभुजायाः क्षेत्रफलम्-हेरानस्य सूत्रेण 206

12.3 चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलस्य अन्वेषणे -हेरानस्य सूत्रस्य प्रयोगः 211

12.4 सारांशः 215

13. पृष्ठीयक्षेत्रफलं तथा च घनफलम् 216

13.1 प्रस्तावना 216

13.2 घनाभस्य तथा घनाकारस्य पृष्ठीयक्षेत्रफलम् 216

13.3 लम्ब-वृत्त-बेलनाकारस्य पृष्ठीयक्षेत्रफलम् 222

13.4 लम्ब-वृत्त-शङ्कोः पृष्ठीयक्षेत्रफलम् 226

13.5 गोलस्य पृष्ठीयक्षेत्रफलम् 230

13.6 घनाभस्य घनफलम् 234

13.7 बेलनाकारस्य घनफलम् 238

13.8 लम्ब-वृत्त-शङ्कोः घनफलम् 241

13.9 गोलस्य घनफलम् 244

13.10 सारांशः 247

14. साङ्ख्यिकी 249

14.1 प्रस्तावना 249

14.2 दत्तांशस्य सङ्ग्रहः 250

14.3 दत्तांशस्य प्रस्तुतिः 251

14.4 दत्तांशस्य आलेखीय निरूपणम् 258

14.5 केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापाः 272

14.6 सारांशः 281

15. प्रायिकता 283

15.1 प्रस्तावना 283

15.2 प्रायिकता-प्रायोगिक दृष्टिः 284

15.3 सारांशः 298

परिशिष्टम् 1 – गणिते उपपत्तयः 299

A1.1 – भूमिका 299

A1.2 – गणितीयरूपेण स्वकार्यकथनम् 300
A1.3 – नैगमनिकतर्कणम् 304
A1.4 – प्रमेय ..... एवञ्च अभिगृणीतम् 306
A1.5 – गणितीयोपपत्तिः इति किम् 312
A1.6 – सारांशः 318
परिशिष्ट 2 – गणितीयनिदर्शनस्य परिचयः **319**
A2.1 – भूमिका 319
A2.2 – शब्दसमस्यानां पुनरावलोकनम् 320
A2.3- केचन गणितीयनिदर्शाः 324
A2.4 – निदर्शनप्रक्रमः अस्य लाभाः एवञ्च परिधयः 332
A2.5 – सारांशः 335
उत्तराणि / सङ्केताः **337-362**

भारतस्य संविधानम्

भागः ४क

नागरिकाणां मौलिक-कर्तव्यानि

अनुच्छेदः ५१ क

मौलिककर्त्तव्यानि = भारतस्य प्रत्येकं नागरिकस्य एतत् कर्त्तव्यं भविष्यति यत् सः -

(क) संविधानस्य पालनं कुर्याद् एवं च तस्य आदर्शानां, संस्थानाम् अथ च राष्ट्र-गानस्य सम्माननं कुर्यात्;

(ख) स्वतन्त्रतायै अस्माकं राष्ट्रियान्दोलनस्य प्रेरकान् उच्चादर्शान् हृदि संस्थाप्य तान् पालयेत् ;

(ग) भारतस्य सम्प्रभूताम्, एकताम् अखण्डताञ्च रक्षेत् तथा च तस्य अक्षुण्णतां सततं संरक्षेत् ;

(घ) देशस्य रक्षां कुर्याद् आह्वाने कृते सति राष्ट्रं सेवताम् ;

(ङ) भारतस्य सर्वेषु जनेषु समरसतायाः समानभ्रातृत्वस्य च भावनायाः निर्माणं कुर्यात्, धर्म-भाषा-प्रदेश-वर्गाधारितेभ्यः सर्वेभ्यः भेदभावेभ्यः दूरीभवेत् अपि च एतादृशीः रीतीः त्यजेत् याः नारी-सम्मानविरोधिन्यः स्युः ;

(च) अस्माकं मिश्रित-संस्कृतेः गौरवशालिपरम्परायाः महत्त्वम् अनुभवेद् तथा च तस्याः परिरक्षणं कुर्यात्;

(छ) वन-सरोवर-नदी-वन्यजीवसंकुलं प्राकृतिक-पर्यावरणं रक्षेत् तस्य च संवर्धनं कुर्याद् प्राणिषु दयाभावं स्थापयेत् ;

(ज) वैज्ञानिकाभिवृत्ति-मानववाद-ज्ञानार्जन-शुद्धीनां भावनायाः विकासं कुर्यात् ;

(झ) सार्वजनिकसम्पदः संरक्षणं कुर्यात् तथा च हिंसातः दूरीभवेत्;

(ञ) वैयक्तिक-सामूहिकगतिविधीनां सर्वेषु क्षेत्रेषु उत्कर्षं प्रति प्रवर्तितुं सततं प्रयासं कुर्याद् येन नैरन्तर्येण वर्धमानं राष्ट्रं प्रयत्न-साफल्यानाम् अभिनवौन्नत्यं स्पर्ष्टुं शक्नुयात् ;

(ट) पितरौ अथवा संरक्षकाः षड्वर्षतः चतुर्दशवयोमितेभ्यः स्वीय-बालकेभ्यः प्रतिपाल्येभ्यः वा यथाशक्ति शिक्षायाः अवसरान् प्रददतु।

अध्यायः 1

सङ्ख्या- पद्धतिः

1.1 प्रस्तावना

पूर्वतनवर्गेषु भवन्तः सङ्ख्यारेखायाः विषये पठितवन्तः। विविधसङ्ख्याः कथं लेखनीयाः इति अपि पठितवन्तः। (1.1 आकृतिं पश्यन्तु)



चित्रम् 1.1

कल्पयन्तु यत् भवन्तः शून्यतः आरभ्य धनदिशि संख्यारेखानुगुणं गच्छन्ति इति। यावत्पर्यन्तं भवतां नेत्राणि द्रष्टुं शक्नुवन्ति तावत्पर्यन्तमपि सङ्ख्याः, सङ्ख्याः, सङ्ख्याः एव!



चित्रम् 1.2

इदानीं यदि भवन्तः सङ्ख्यारेखानुदिशं चलित्वा काश्चन सङख्याः सङगृह्णन्ति ताः सङ्ख्याः रक्षितुं कश्चन महाकोशः एव अपेक्ष्यते ¬।

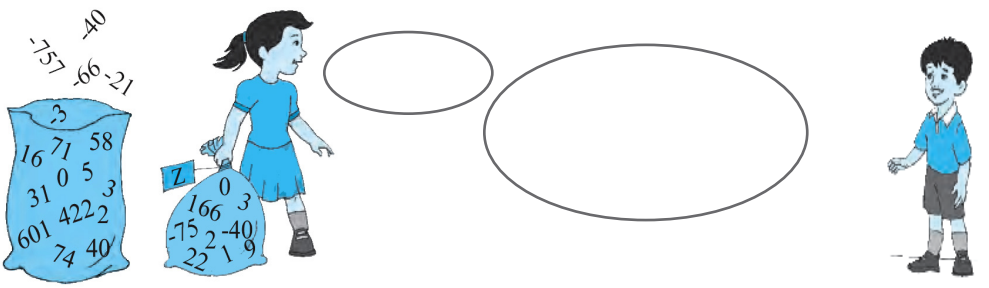


भवन्तः आदौ प्राकृतसङ्ख्यया, उदाहरणार्थं 1,2,3 इत्यनेन आरम्भं कर्तुं शक्नुवन्ति । भवन्तः जानन्ति यत् एषा आवलिः अनन्ता इति । (एतस्य किं कारणम्??) इदानीं भवतां स्यूते अपरिमितप्राकृतसङ्खयाः सन्ति ! अत्र स्मरन्तु यत् वयं एतं सङ्ग्रहं N इति चिह्नेन सूचयामः ।



इदानीं विपरीतदिशि परिवर्त्य शून्यसङ्ख्यां स्वीकृत्य स्यूते स्थापयतु । भवतां समीपे पूर्णसङख्यानां यः सङ्ग्रहः भवेत्, सः W इति उच्यते ।

अधुना भवतां पुरतः लम्बमानाः तु बहवः ऋणपूर्णाङ्काः । तान् स्वीकृत्य स्वस्यूते स्थापयन्तु । एषः नूतनसङ्ग्रहः कः ? अत्र स्मरन्तु यत् एषः तु पूर्णाङ्कानां सङ्ग्रहः Z इति उच्यते ।



रेखायाम् इतोऽपि काश्चन सङ्ख्याः अवशिष्टाः सन्ति किम्? आम् निश्चयेन ! तत्र $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, अथवा $\frac{-2005}{2006}$ इत्याद्याः सङ्ख्याः सन्ति । यदि भवन्तः एताः सङ्ख्याः स्यूते स्थापयन्ति, सः सङ्ग्रहः परिमेयसङ्ख्यानां सङ्ग्रहः भवति । परिमेयसङ्ख्यानां सङग्रहः Q इति उच्यते ।



भवन्तः परिमेयसङ्खय़ानां लक्षणं स्मरन्तु।

r इति काचित् सङ्ख्या परिमेयसङ्ख्या इति उच्यते यदा सा $\frac{p}{q}$ इति रूपेण लेखितुं शक्यते यत्र p, q च पूर्णाङ्कः तथा $q \neq 0$ (वयं किमर्थं $q \neq 0$ इत्यत्र महत्त्वं दद्मः?)

अत्र पश्यन्तु यत् स्य़ूते विद्यमानाः सर्वाः अपि सङ्ख्याः $\frac{p}{q}$ रूपेण लेखितुं शक्याः, य़त्र -p,q एतौ पूर्णाङ्कौ, $q \neq 0$ उदाहरणार्थं -25 तु $\frac{-25}{1}$ इति लेखितुं शक्यते:। अत्र p = -25, q=1 इति। अतः परिमेयसङ्ख्यासु प्राकृतसङ्ख्याः, पूर्णसङ्ख्या, पूर्णाङ्काः च अन्तर्भूताः भवन्ति।

भवन्तः जानन्ति यत् परिमेयसङ्ख्यानां $\frac{p}{q}$ इति रूपेण किमपि अनन्यप्रातिनिध्यं नास्ति यत्र p,q :पूर्णाङ्कः $q \neq 0$. उदाहरणार्थं $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ इत्यादयः। एताः तुल्याःपरिमेयसङ्ख्याः अथवा तुल्याः भिन्नराशयः इति उच्य़न्ते। किन्तु यत्र यत्र वयं $\frac{p}{q}$ - रूपां परिमेयसङ्ख्यां वदामः, अथवा $\frac{p}{q}$ –संख्यां सङ्ख्यारेखायां लिखामः, तत्र सर्वत्र $q \neq 0$, तथा p, q इत्यनयोः मध्ये 1(एकं) विहाय अन्यः कोऽपि सामान्यांशः नास्ति (p,q च परस्परम् असहभाज्यसङ्ख्ये स्तः) इति वयं परिकल्पयामः । अतः सङ्ख्यारेखायां $\frac{1}{2}$ तुल्येषु अनन्तभिन्नराशिषु सत्सु तान् सर्वान् अपि सूचयितुं $\frac{1}{2}$ इति एव कथयामः।

इदानीं पूर्वतनवर्गेषु पठितानि विविधसङ्ख्यासम्बद्धानि कानिचन उदाहरणानि पश्यामः

उदाहरणम् 1: अधोदत्तवाक्यानि सत्यम् उत असत्यम् इति वदन्तु। उत्तराणां कारणानि अपि वदन्तु।

(i) प्रत्येकम् अपि पूर्णसङ्ख्या काचित् प्राकृतसङ्ख्या ।

(ii) प्रत्येकम् अपि पूर्णाङ्कः काचित् परिमेयसङ्ख्या ।

(iii) प्रत्येकम् अपि परिमेयसङ्ख्या कश्चन पूर्णाङ्कः ।

समाधानम् : (i) असत्यम्, यतः शून्यं पूर्णसङ्ख्या किन्तु प्राकृतसङ्ख्या न ।

(ii) सत्यम्, यतः प्रत्येकम् अपि पूर्णाङ्कः $m = \frac{m}{1}$ इति वक्तुं शक्यते, अतः सः परिमेयसङ्ख्या।

असत्यम्, यतः $\frac{3}{5}$ पूर्णाङ्कः न।

उदाहरणं 2 : 1, 2 इत्यनयोः मध्ये पञ्च परिमेयसङ्ख्याः अन्विषन्तु।

एतां समस्यां न्यूनातिन्यूनं प्रकारद्वये द्रष्टुं शक्नुमः

समाधानम् 1 : अत्र स्मरन्तु यत् r, s इत्यनयोः मध्ये विद्यमानाःपरिमेयसङ्ख्याः ज्ञातुं - r, s इत्यनयोः योगं ज्ञात्वा 2 इत्यनेन विभजन्तु – अर्थात् r, s इत्यनयोः मध्ये $\frac{r+s}{2}$ अस्ति। अनेन एव क्रमेण भवन्तः 1,2 इत्यनयोः अन्तराले विद्यमानाः अन्यपरिमेयसङ्ख्याः प्राप्तुं शक्नुवन्ति। ताः चतस्रः सङ्ख्याः तु $\frac{5}{4}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{8}$ $\frac{7}{4}$ च।

समाधानम् 2 : अन्यविकल्पः तु पञ्चानां अपि परिमेयसङ्ख्यानाम् एकस्मिन् सोपाने एव अवगमनम्। अस्माकं पञ्च सङ्ख्याः अपेक्षिताः,अतः वयं 1,2 - उभयमपि छेदयुत परिमेयसङ्खयावत् लिखामः,अर्थात् 1= $\frac{6}{6}$, 2= $\frac{12}{6}$। अग्रे भवन्तः परिशीलयितुं शक्नुवन्ति यत् $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$ तथा $\frac{10}{6}$ - इत्यादि-सङ्ख्याः 1,2 इत्यनयोः मध्ये अस्ति। अतः पञ्च सङ्खयाः तु $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{11}{6}$ च।

टिप्पणी : अत्र अवलोकयन्तु यत् द्वितीये उदाहरणे भवद्भ्यः 1, 2 एतयोः मध्ये विद्यमानाः परिमेयसङ्ख्याः पृष्टाः आसन्। भवन्तःअवगतवन्तः स्युः यत् वस्तुतः 1, 2 इत्यनयोः मध्ये अनन्ताः परिमेयसङ्ख्याः सन्ति। सामान्यतः दत्तयोः द्वयोः परिमेयसङ्खययो मध्ये अनन्ताः सङ्ख्याः वर्तन्ते।
इदानीं पुनरेकवारं सङ्ख्यारेखां पश्यामः। भवन्तः सर्वाः सङ्ख्याः स्वीकृतवन्तः वा? नैव। वस्तुतः इतोपि अपरिमिताः सङ्ख्याः सङ्ख्यारेखायां अवशिष्टाः सन्ति। भवद्भिः स्वीकृतानां सङ्ख्यानां मध्ये अवकाशाः सन्ति - एका वा द्वे वा न, अपि तु अनन्ताः। अत्र आश्चर्यजनकः विषयः एषः यत् द्वयोः अवकाशयोः मध्ये अनन्त-सङ्ख्याः सन्ति इति।

अतः अस्माकं समीपे अधोदत्ताः प्रश्नाः अवशिष्यन्ते -



1.सङ्ख्यारेखायाम् अवशिष्टाः सङ्ख्याः किंनाम्ना आहूयन्ते?!।

2. अस्माभिः ताः कथम् अभिज्ञातुं शक्याः? ताः कथं परिमेयसङ्ख्याभ्यः भिद्यन्ते?

एतेषाम् उत्तराणि अग्रिमपरिच्छेदे दीयन्ते।

प्रश्नावलिः 1.1

1. शून्यं परिमेयसङ्ख्या किम्? यत्र p,q : पूर्णाङ्कौ, $\frac{p}{q}$ 0 च स्यात्, तथा शून्यं $\frac{p}{q}$ रूपेण लेखितुं शक्नुवन्ति वा ?
2. 3, 4 एतयोः मध्ये विद्यमानाः षड् परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।
3. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ एतयोः मध्ये विद्यमानाः पञ्च परिमेयसङ्ख्याः लिखन्तु।
4. अधोदत्तवाक्यानि सत्यं वा असत्यं वा इति वदत। उचित कारणानि अपि लिखत।

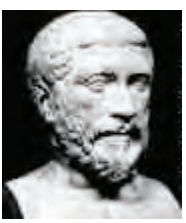
   (i) प्रति प्राकृतसङ्ख्या काचित् पूर्णसङ्ख्या अस्ति

   (ii) प्रति पूर्णाङ्कः काचित् पूर्णसङ्ख्या अस्ति ।

   (iii) प्रति परिमेयसङ्ख्या काचित् पूर्णसङ्ख्या अस्ति।

1.2 अपरिमेयसङ्ख्या

पूर्वपरिच्छेदे दृष्टवन्तः यत् सङ्ख्यारेखायां विद्यमानाः सङ्ख्याः परिमेयाः भवेयुः एव इति नास्ति नियमः । अस्मिन् परिच्छेदे तासां सङ्ख्यानां विषये चर्चां कुर्मः। एतावत् पर्यन्तं अस्माभिः दृष्टाः सङ्ख्याः - $\frac{p}{q}$, यत्र p, q च पूर्णाङ्कौ, $q \neq 0$ च , - इत्यस्मिन् रूपे एव आसन्। एतत् विहाय अन्यविधाः सङ्ख्याः न सन्ति एव किम्? इति भवन्तः प्रष्टुम् अर्हन्ति। तादृश्यः सङ्ख्याः अपि सन्ति।



ग्रीस्(यवन)देशस्यपैथगोरियाः, ये प्रसिद्ध- गणितज्ञस्य, तत्त्वज्ञस्य पैथगोरस् महाभागस्य अनुयायिनः, ते एव 400 BCE वर्षं परितः ऐदम्प्राथम्येन अपरिमेयसङ्ख्याः अविष्कृतवन्तः । एताः सङ्ख्याः पूर्णाङ्कानाम् अनुपातरूपेण लेखितुं न शक्नुमः । परिमेय-सङ्ख्याविष्कारविषये क्रोटन्-देशस्य पैथागोरियः हिप्पाकस्-वर्येण सम्बद्धाः बह्व्यः आख्यायिकाः श्रूयन्ते। एतासु सर्वासु कथासु $\sqrt{2}$ इत्यस्याःअपरिमेयसङ्ख्यायाः आविष्कारः तेन कृतः इत्यतः वा, तस्याः $\sqrt{2}$ संख्यायाः रहस्यं जनान् उक्तवान् इत्यनेनकारणेन वा सः दुर्मरणं प्राप्तवान् इति उक्तम् अस्ति। आकृतिः 1.3

औपचारिकतया एतासां सङ्खानां लक्षणं निरूपयामः

's' इति काचित् सङ्ख्या तदा अपरिमेया भवति यदा तां - $\frac{p}{q}$, यत्र p, q :पूर्णाङ्कौ, $q \neq 0$ इत्येवंरूपेण लेखितुं न शक्यते।

भवन्तः पूर्वमेव जानन्ति यत् परिमेयसङ्ख्याः अनन्ताः सन्ति इति। अपरिमेयसंख्याः अपि अनन्ताः सन्ति इति साधितम् अस्ति। उदाहरणार्थं :

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.101101110111110...$

टिप्पणी : अत्र स्मरन्तु यत् यदा वयं $\sqrt{}$ इति चिह्नस्य उपयोगं कुर्मः, तदा कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः सः वर्गमूलः धनात्मकः इत्येव भावयामः। अतः $\sqrt{4} = 2$, यद्यपि 2, -2 उभयमपि 4 इत्यस्य वर्गमूलौ स्तः ।

उपरिदत्तासु अपरिमेयसङ्ख्यासु काश्चन सङ्ख्याः भवतां परिचिताः स्युः । उदाहरणार्थं वयं बहून् वर्गमूलान् दृष्टवन्तः तथा π सङ्ख्याम् अपि ।

पैथगोर्याः $\sqrt{2}$ एषा संख्या अपरिमेया इति साधितवन्तः । π सङ्ख्या तु बहुषु संस्कृतिषु आसहस्रवर्षेभ्यः ज्ञाता एव आसीत्, किन्तु सा सङ्ख्या अपरिमेया इति लेम्बर्टेन, लेजेण्डरेण च 1700 तमे वर्षे निरूपिता अभवत् । अग्रीमे परिच्छेदे 0.10110111011110..., π च कथम् अपरिमेयौ इति चर्चयामः ।



पूर्वतनपरिच्छेदे पृष्टान् प्रश्नान् प्रति पुनरागच्छामः । परिमेय-सङ्ख्या-स्यूतं स्मरन्तु। यदि वयं सर्वाः अपरिमेयसङ्ख्याः स्यूते सथापयामः तर्हि कापि सङ्ख्या सङ्ख्यारेखायाम् अवशिष्टाः भवन्ति वा ? न इत्येव उत्तरम् । अनेन ज्ञायते यत् परिमेय-अपरिमेयसङ्ख्यानां सङ्ग्रहः एव वास्तविकसङ्ख्याः इति । सः तु R इति सूच्यते । अतः वास्तविकसङ्ख्या परिमेया अपि, अपरिमेया अपि वा । अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् प्रत्येकं वास्तविकसङ्ख्या सङ्ख्यारेखायां केनचित् अद्वितीयबिन्दुना सूच्यते । अपि च, सङ्ख्यारेखायां विद्यमानः प्रत्येकं बिन्दुः अपि काञ्चित् अद्वितीयवास्तविकसङ्ख्यां सूचयति । अतः वयं सङ्ख्यारेखां वास्तविकसङ्ख्यारेखा इति कथयामः ।



1870 तमे वर्षे द्वौ जर्मनदेशीय-गणितज्ञौ क्येण्टर्देदीकिण्डवर्यौ च उक्तवन्तौ यत् प्रतिवास्तविकसङ्ख्यासङ्गतः कश्चित् बिन्दुः वास्तविकसङ्ख्यारेखायां, अस्ति, तथा वास्तविकसङ्ख्यारेखायां विद्यमानस्य प्रत्येकं बिन्दोः सङ्गता काचित् अद्वितीय-वास्तविक-सङ्ख्या अस्ति इति ।

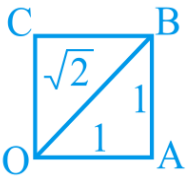


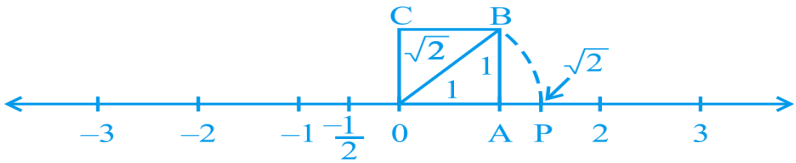
आकृतिः 1.5

इदानीं वयं कथं सङ्ख्यारेखायाम् अपरिमेयसङ्ख्यानाम् अवस्थानं कुर्मः इति पश्यामः।

उदाहरणम् 3 : सङ्ख्यारेखायां $\sqrt{2}$ अस्य अवस्थानं कुर्वन्तु

समाधानम् : वयं सरलतया द्रष्टुं शक्नुमः यत् $\sqrt{2}$ सङ्ख्यां कथम् अविष्कृतवन्तः इति। $OABC$ इति कञ्चित् मात्रकवर्गं स्वीकुर्वन्तु यस्य प्रत्येकं भुजा 1 मात्रकम् अस्ति (1.6 आकृतिं पश्यन्तु)। पैथागोरस्-प्रमेयानुगुणं भवन्तः पश्यन्ति चेत् OB $= \sqrt{(12 + 12)}$। $\sqrt{2}$ सङ्ख्यां कथं सङ्ख्यारेखायां सूचयितुं शक्यते ? तत्तु सरलम् एव। 1.6 आकृतिं सङ्ख्यारेखां प्रति नयन्तु, यथा O इति शीर्षः O इति बिन्दुना सह सङ्गच्छति (1.7 आकृतिं पश्यन्तु) 1.6

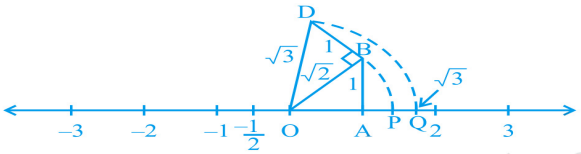




वयं दृष्टवन्तः यत् OB $= \sqrt{2}$। O इति मध्यबिन्दुना OB इति त्रिज्यया कञ्चित् चापं चित्रयन्तु यथा सः चापः सङ्ख्यारेखां P इति बिन्दौ प्रतिच्छिन्द्यात्। तदा P बिन्दुः सङ्ख्यारेखायां $\sqrt{2}$ इत्यनेन सङ्गतः अस्ति।

उदाहरणम् 4 : सङ्ख्यारेखायां $\sqrt{3}$ अवस्थानं करोतु

समाधानम् : पुनः 1.7 आकृतिं पश्यामः।



आकृतिः 1.8

मात्रकपरिमितां BD-रेखां OB इत्यस्य समालम्बं चित्रयन्तु। (1.8 आकृतिं पश्यन्तु)।। पैथागोरस् प्रमेयानुगुणं भवन्तः पश्यन्ति चेत् OD $= \sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{3}$ ।

इदानीं वृत्तकारिणं, O - केन्द्रबिन्दौ संस्थाप्य, OD इतिपरिमाणायाः त्रिज्यायाः कञ्चित् चापं चित्रयन्तु यथा सः चापः सङ्ख्यारेखां Q इति बिन्दौ प्रतिच्छिन्द्यात्। तदा Q बिन्दुः सङ्ख्यारेखायां $\sqrt{3}$ इत्यनेन सङ्गतः अस्ति।

तथैव $\sqrt{n-1}$ इत्यस्याः संख्यारेखायाम् अवस्थापनात् परम् भवन्तः n धनपूर्णाङ्कस्य वर्गमूलम् अवस्थापयितुं शक्नुवन्ति।

प्रश्नावलिः 1.2

1. अधोदत्तवाक्यानि सत्यम् उत असत्यम् इति कथयत

   (i) प्रत्येकम् अपरिमेयसङ्ख्या काचित् वास्तविकसङ्ख्या अस्ति।

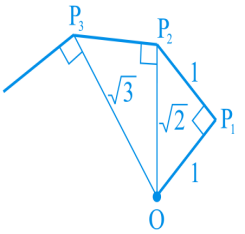
   (ii) सङ्ख्यारेखायां विद्यमाना प्रत्येकं सङ्ख्या $\sqrt{m}$ इति रूपेण अस्ति यत्र m काचित् प्राकृतसङ्ख्या अस्ति।

   (iii) प्रत्येकम् अपरिमेयसङ्ख्या काचित् वास्तविकसङ्ख्या अस्ति।

2. धनपूर्णाङ्कानां सर्वेऽपि वर्गमूलाः अपरिमेयाः वा ? यदि न, तर्हि कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः वर्गमूलस्य उदाहरणम् यच्छन्तु या परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

3. $\sqrt{5}$ कथं सङ्ख्यारेखायां सूचयामः इति कथयन्तु।

4. **कक्ष्या क्रियाकलापः (वर्गमूल-गोलीयनिर्माणम्)** कञ्चित् बृहत् पत्रकं स्वीकृत्य अधोदत्तप्रकारेण वर्गमूल-गोलीयं निर्मान्तु। O बिन्दुतः आरभ्य OP_1 रेखाखण्डम् एकमात्रकपरिमितं चित्रयन्तु। P_1P_2 रेखाखण्डं OP_1 इत्यस्य समालम्बम् एकमात्रकपरिमितं चित्रयतु (1.9 आकृतिं पश्यन्तु) इदानीं OP_2 इत्यस्य समालम्बं रेखाखण्डं P_2P_3 चित्रयतु। अग्रे OP_2 इत्यस्य समालम्बं रेखाखण्डं P_2P_3 चित्रयतु।



आकृतिः1.9 वर्गमूल-कम्बोः निर्माणम् प्राप्यते

एवम्प्रकारेण अनुवर्तनेन, यदा OP_{n-1} इत्यस्य समालम्बम् एकमात्रकं परिमितं रेखाखण्डं चित्रयामः, तदा $P_{n-1}P_n$। एवं भवन्तः $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ ...इति बिन्दून् निर्मितवन्तः स्युः येषां योजनेन सुन्दरं गोलीयं स्यात् यत्र $\sqrt{2}, \sqrt{3}\ \sqrt{4}$..... अङ्किताः स्युः।

1.3 वास्तविकसङ्ख्याः, तथा तेषां दशमलवप्रस्तारः

अस्मिन् परिच्छेदे परिमेय-अपरिमेयसङ्ख्यनां विषये अन्यदृष्टिकोणतः पठामः। वयं वास्तविकसङ्ख्यानां दशमलवप्रस्तारं पश्यामः, तत् उपयुज्य परिमेय-अपरिमेयसङ्ख्यानां मध्ये विद्यमानं भेदम् अवगच्छामः। दशमलवप्रस्तारम् उपयुज्य सङ्ख्यारेखायां वास्तविकसङ्ख्यानां प्रत्यक्षीकरणं कथं इति बोधयामः। परिमेयसङ्ख्याः अतिपरिचिताः इत्यतः ततः एव आरम्भं कुर्मः। त्रीणि उदाहरणानि स्वीकुर्मः $\frac{10}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{7}$। शेषफलेषु विशिष्टावधानं दत्वा पश्यन्तु यत् किमपि स्वरूपम् अस्ति वा इति।

उदाहरणम् 5 : $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ तथा $\frac{1}{7}$ इत्येषां दशमलवप्रस्तारम् अन्विषन्तु।

समाधानम् :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.333.... \\
\hline
3 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.87 \\
\hline
8 & 7.0 \\
 & 64 \\
\hline
 & 60 \\
 & 56 \\
\hline
 & 40 \\
 & 40 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.142857... \\
\hline
7 & 1.0 \\
 & 7 \\
\hline
 & 30 \\
 & 28 \\
\hline
 & 20 \\
 & 14 \\
\hline
 & 60 \\
 & 56 \\
\hline
 & 40 \\
 & 35 \\
\hline
 & 50 \\
 & 49 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

शेषः - 1, 1, 1, 1, 1,.....
भाजकः - 3

शेषः - 6, 4, 0
भाजकः - 8

शेषः - 3, 2, 6, 4, 5, 1,
3, 2, 6, 4, 5, 1,...
भाजकः - 7

भवन्तः किम् अवलोकितवन्तः ? न्यूनातिन्यूनं विषयत्रयं वा दृष्टवन्तः स्युः -

(i) शेषफलानि कस्मिंचित् निश्चिते सोपाने 0 भवति अथवा पुनरावर्तयन्ति।

(ii) शेषफलेषु विद्यमानाः आवृत्तिशृङ्खलायाः सङ्ख्याः विभाजकस्य अपेक्षया न्यूनाः भवन्ति ($\frac{1}{3}$ सङ्ख्यायाम् एका सङ्ख्या पुनरावर्तयति, 3 विभाजकः अस्ति। $\frac{1}{7}$ - अत्र शेषफलानाम् आवृत्तिशृङ्खलायां षड् अङ्काः :- 326451 सन्ति, तथा 7 - विभाजकः अस्ति।

(iii) यदि शेषफलानि पुनरावर्तितानि, तर्हि भागफले पुनरावृत्त-अङ्क-गणं प्राप्नुमः ($\frac{1}{3}$ सङ्ख्यायां '3' भागफले आवर्तते ,$\frac{1}{7}$ सङ्ख्यायां भागफले '142857' इति पुनरावृत्त-अङ्क-गणं प्राप्नुमः।

यद्यपि एतत् स्वरूपम् उपरिदत्तेषु उदाहरणेषु केवलम् अवलोकितं, तत्तु $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ इत्यस्मिन् रूपे विद्यमानानां सर्वेषां परिमेयसङ्ख्यानां विषयेअपि सत्यम्। यदा q द्वारा p अङ्कस्य विभागं कुर्मः, तदा सम्भावनाद्वयं भवति- शेषफलं 0(शून्यं) भवति अथवा शेषफलं 0 (शून्यं) न भवति तथा शेषफलानां पुनरावृत्त-शृङ्खलां प्राप्नुमः।

स्थितिः(i): शेषफलं 0 भवति -

$\frac{7}{8}$ इत्यस्मिन् उदाहरणे, वयं दृष्टवन्तः यत् शेषफलं केषाञ्चन सोपानानाम् अनन्तरं 0 भवति तथा दशमलवप्रस्तारः $\frac{7}{8} = 0.875$ भवति। अन्य-उदाहरणानि $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$। एतासु स्थितिषु दशमलवप्रस्तारः केषाञ्चन परिमित- सोपानानाम् अनन्तरं समाप्यते। ईदृशाः दशमलवप्रस्ताराः सान्ताः इति उच्यन्ते।

स्थितिः(ii) : शेषफलं कदापि 0 न भवति -

$\frac{10}{3}$, $\frac{1}{7}$ इत्यस्मिन् उदाहरणे शेषफलं कस्माच्चित् सोपानात् परं पुनरावर्तते येन दशमलवप्रस्तारः अनन्तः भवति। अन्यशब्देषु वदामः चेत् भागफले आवृत्त-अङ्क-खण्डान् प्राप्नुमः। एतं प्रस्तारम् अनन्तं आवर्तनशीलम् (आवृत्तं) च वदामः। उदाहरणार्थं $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$ तथा $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\ldots$..

$\frac{1}{3}$ इत्यस्य भागफले 3 इति सङ्ख्यायाः पुनरावृत्तिं सूचयितुं $0.\bar{3}$ इति लिखामः। तथैव, $\frac{1}{7}$ इत्यस्य भागफले 142857 इत्यस्य अङ्कखण्डस्य आवृत्तिः भवति। अतः $\frac{1}{7}$ सङ्ख्यां $0.\overline{142857}$ इति लिखामः। अपि च $3.57272\ldots$ सङ्ख्यां $3.5\overline{72}$ इति। एतेषु सर्वेषु उदाहरणेषु वयम् अनन्त-आवृत्त-दशमलवप्रस्तार प्राप्नुमः। अतः परिमेयसङ्ख्यानां दशमलवप्रस्ताराणां विकल्पद्वयं भवति – सान्तः, अनन्तावृत्तः वा इति।

भवन्तः यदा सङ्ख्यारेखायां चलन्ति, तदा 3.142678 इति एतादृशीं सङ्ख्यां पश्यन्ति यस्य दशमलवप्रस्तारः सान्तः, अथवा 1.272727.... (अथवा $1.2\overline{7}$ इतीदृशी सङ्ख्या दृश्यते यस्याः दशमलवप्रस्तारः अनन्तावृत्तः च। सा संख्या परिमेया इति निष्कर्षं प्राप्तुं शक्यते किम्? आम्, सत्यम्! वयं एतं न निरूपयामः किन्तु कैश्चित् उदाहरणैः निदर्शयामः। सान्ताः स्थितयः सरलाः।

उदाहरणम् 6 : 3.142678 परिमेयसङ्ख्या इति निरूपयन्तु। अर्थात् 3.142678 सङ्ख्यां $\frac{p}{q}$ इति रूपेण लिखन्तु यत्र p, q : पूर्णाङ्कौ तथा $q \neq 0$।

समाधानम् : $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$, अतः परिमेयसङ्ख्या अस्ति।

अधुना अनन्त-आवृत्त-दशमलवप्रस्तारं स्वीकुर्मः।

उदाहरणम् 7 : $0.3333 = 0.\bar{3}$ सङ्ख्यां $\frac{p}{q}$ इति रूपेण लिखन्तु यत्र p, q :पूर्णाङ्कौ तथा $q \neq 0$ ।

समाधानम् : वयं $0.\bar{3}$ किम् इति न जानीमः इत्यतः x इति कथयामः ।

$$x = 0.3333\ldots..$$

अधुना अत्र काचित् युक्तिः उपयुज्यते -

$$10x = 10 \times (0.3333\ldots.) = 3.3333\ldots.$$

अधुना $3.333 = 3 + x$,यतः $x = 0.3333\ldots.$

अतः $10\,x = 3 + x$

x मानं प्राप्तुं ,

$$9x = 3, \text{ अर्थात् } x = \frac{1}{3}$$

उदाहरणम् 8 : $1.272727 = 0.\overline{27}$ सङ्ख्यां $\frac{p}{q}$ इति रूपेण लिखन्तु यत्र p,q पूर्णाङ्कौ तथा $q \neq 0$ ।

समाधानम्

$x = 1.272727\ldots$ । अङ्कद्वयं आवर्तते इत्यतः 100 द्वारा x अस्य गुणनं कुर्मः ।

$$100x = 1,27.2727\ldots$$

अधुना $100x = 126 + 1.272727 \ldots.. = 126 + x$

अतः $100\,x - x = 126$, अर्थात् $99x = 126$

अर्थात् $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

अस्य विलोमं परिशीलयितुं शक्नुवन्ति यत् $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

उदाहरणम् 9 : $0.2353535 = 0.2\overline{35}$ सङ्ख्यां $\frac{p}{q}$ इति रूपेण लिखन्तु यत्र p, q पूर्णाङ्कौ तथा $q \neq 0$ ।

समाधानम् : $x = 0.2\overline{35}$ । अत्र अवलोकयन्तु यत् 2 न आवर्तते, किन्तु 35 खण्डम् आवर्तयति । यतः अङ्कद्वयम् आवर्तते, 100 द्वारा x अस्य गुणनं कुर्मः ।

$$100x = 23.53535\ldots.$$

अधुना $100x = 23.3 + 0.23535\ldots.. = 23.3 + x$

अतः $99x = 23.3$

अर्थात् $99x = \frac{233}{10}$, यस्मात् $x = \frac{233}{990}$ इति प्राप्नुमः

अस्य विलोमं परिशीलयितुं शक्नुवन्ति यत् $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

अतः प्रत्येकं अनन्तावृत्त-दशमलवप्रस्तारयुता संख्या $\frac{p}{q}$ रूपेण लेखितुं शक्या, यत्र p, q पूर्णाङ्कौ स्तः, $(q \neq 0)$ च।

पठितांशानाम् अधोदत्तप्रकारेण सङ्ग्रहं कुर्मः -

परिमेयसङ्ख्यायाः दशमलवप्रस्तारः सान्तः अनन्तावृत्तः वा भवितुम् अर्हति । अपि च यस्याः सङ्ख्यायाः दशमलवप्रस्तारः सान्तः वा अनन्तावृत्तः वा भवति, सा सङ्ख्या परिमेयसङ्ख्या भवति।

इदानीं परिमेयसङ्ख्यानां दशमलवप्रस्तारः कीदृशः इति वयं ज्ञातवन्तः । तर्हि अपरिमेयसङ्ख्यानां दशमलवप्रस्तारः कीदृशः भवति ? उपरिदत्तस्य गुणधर्मस्य अनुगुणं तासां दशमलवप्रस्तारः अनन्तावृत्तः भवति इति वक्तुं शक्यम्। अतः परिमेयसङ्ख्यानां गुणधर्मवत्, अपरिमेयसङ्ख्यानां गुणधर्मः अधः निरूपितः अस्ति।

अपरिमेयसङ्ख्यायाः दशमलवप्रस्तारः अनन्तः, अनावृत्तः च भवति । यस्याः संख्यायाः दशमलवप्रस्तारः अनन्तः अनावृत्तः च भवति, सा सङ्ख्या अपरिमेयसङ्ख्या भवति।

अत्र s = 0.101101110111110 ....पूर्वपरिच्छेदतः स्मरन्तु। अवलोकयन्तु यत् एषः अनन्तः, अनावृत्तः च। उपरितनात् गुणधर्मात् एषा अपरिमेयसङ्ख्या अस्ति। अपि च s समानं भवन्तः अपरिमिताः अपरिमेय-सङ्ख्याः निर्मातुं शक्नुवन्ति।

प्रसिद्धयोः अपरिमेययोः $\sqrt{2}$, π इत्यनयोः का गतिः? तयोः दशमलवप्रस्तारौ अत्र स्तः

$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872409 6\ldots\ldots$

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950\ldots..$

(अवलोकयन्तु यत् π इत्यस्य मानं प्रायः$\frac{22}{7}$ इत्येव स्वीकुर्मः, किन्तु $\pi \neq \frac{22}{7}$

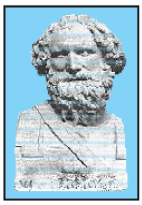
बहुभ्यः वर्षेभ्यः गणितज्ञाः अपरिमेय-सङ्ख्यानां दशमलवप्रस्तारे अधिकाधिक-अङ्कान् प्राप्तुं बहु तन्त्राणि विकसितवन्तः । उदाहरणार्थं $\sqrt{2}$ इत्यस्य दशमलवप्रस्तारे विद्यमानान् अङ्कान् प्राप्तुं विभजनप्रक्रियाम् अधीतवन्तः । अत्र रोचकः विषयः एषः - वेदकालस्य (800 CE – 500 CE) गणितीयग्रन्थेषु शुल्बसूत्रेषु (ज्या-नियमाः) $\sqrt{2}$ इत्यस्य आसन्नमानाः एवं दत्ताः सन्ति –

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{34}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=1.4142156$$

अवलोकयन्तु यत् एतत्तु पञ्च दशमलवस्थानैः, उपरि दत्तेन अङ्केन सह साम्यं भजति । π इत्यस्य

दशमलवप्रस्तारे विद्यमान अङ्कानां अन्वेषणचरित्रं रोचकम् अस्ति।

आर्खिमेडिस् इति कश्चन यवनदेशीय प्रतिभावान् ऐदम्प्राथम्येन π इत्यस्य दशमलवप्रस्तारे विद्यमानान् अङ्कान् आविष्कृतवान्। सः $3.140845 < \pi < 3.142857$ इति दर्शितवान्। आर्यभटः(476-550) CE, ज्येष्ठः भारतीय गणितज्ञः तथा खगोलज्ञः π इत्यस्य मानं चत्वारि दशमलवप्रस्तार पर्यन्तं (3.1416) आविष्कृतनृवान्। अत्युच्च- वेग-सङ्गणकैः तथा उन्नत-कलन-विधिभिः 1.24 दशमलवप्रस्तार पर्यन्तं परिकलितम् अस्ति।



इदानीम् अपरिमेयसङ्ख्याः प्राप्तुं प्रक्रियाः पश्यामः।

उदाहरणम् 10 : $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ इत्यनयोः मध्ये विद्यमानाः अपरिमेयसङ्ख्याः अन्विषन्तु।

समाधानम् : $\frac{1}{7} = 0.142857$ इति दृष्टवन्तः। $\frac{2}{7} = 0.285714$ इति सरलतया परिकलयितुं शक्नुमः। $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ इत्यनयोः मध्ये विद्यमानाम् अपरिमेय-सङ्ख्यां प्राप्तुं काञ्चन अनन्तावृत्तसङ्ख्याम् अन्विषामः। आम्, ईदृशाः अपरिमित-सङ्ख्याः भवन्ति।

तादृशम् उदाहरणम् एकम् = 0.150150015000150000

प्रश्नावलिः 1.3

1. अधोदत्ताः सङ्ख्याः दशमलरूपे लिखन्तु, पुनश्च कीदृशः दशमलवप्रस्तारः इत्यपि वदन्तु।

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$। $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ इत्येषां दशमलवप्रस्तारं दीर्घविभजनप्रक्रियां विना एव पूर्वानुमानं कर्तुं शक्यते किम्? यदि शक्यते, कथम्? (टिप्पणी $\frac{1}{7}$ इत्यस्य मान-अन्वेषणसमये शेषफलानि पठन्तु)

3. अधोदत्ताः सङ्ख्याः $\frac{p}{q}$ इति रूपेण लिखन्तु यत्र p, q पूर्णाङ्कौ तथा $q \neq 0$

(i) $0.\bar{6}$ (ii) $0.4\bar{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999 सङ्ख्यां $\frac{p}{q}$ इति रूपेण लिखन्तु, प्राप्तेन उत्तरेण किम् आश्चर्यचकिताः? अध्यापकेन सह, छात्रैः सह चर्चयन्तु यत् उत्तरं कथम् अर्थपूर्णम् इति ?

5. $\frac{1}{17}$ इत्यस्य दशमलवप्रस्तारे आवृत्तेषु अङ्कखण्डेषु अधिकतमाः अङ्काः के? उत्तरं परिशीलयितुं विभजनप्रक्रियां कुर्वन्तु।

6. $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ रूपे विद्यमानानां परिमेय-सङ्ख्यानाम् उदाहरणानि पश्यन्तु यत्र p, q पूर्णाङ्कौ ययोः 1 इत्यस्य अपेक्षया अन्यत् अपवर्तनं नास्ति, तथा सान्तः दशमलवप्रस्तारः अस्ति। q इत्यनेन कः गुणधर्मः पूरणीयः इति पूर्वानुमानं कर्तुं शक्नुवन्ति वा ?

7. तिस्रः सङ्ख्याः यासां दशमलवप्रस्तारः अनन्तः अनावृत्तः च।

8. $\frac{5}{7}, \frac{9}{11}$ परिमेय-सङ्ख्ययोः मध्ये विद्यमानाः तिस्रः अपरिमेय-सङ्ख्याः लिखन्तु।

9. अधोदत्ताः सङ्ख्याः परिमेयाः वा अपरिमेयाः वा इति लिखन्तु

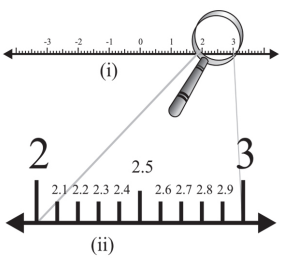
(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478…. (v) 1.101001000100001….

1.4 सङ्ख्यारेखायां वास्तविक-सङ्ख्या-निरूपणम् -

पूर्वानुच्छेदे भवन्तः दृष्टवन्तः यत् यस्याः कस्याः अपि वास्तविक-सङ्ख्यायाः दशमलवप्रस्तारः अस्ति इति। अनेन सङ्ख्यारेखायां ताः निरूपयितुं शक्यन्ते। तत् कथम् इति पश्यामः।

2.665 सङ्ख्यां सङ्ख्यारेखायाम् अवस्थापयितुं इच्छामः इति चिन्तयन्तु। एषा सङ्ख्या तु 2, 3 इत्यनयोः मध्ये अस्ति इति जानीमः।

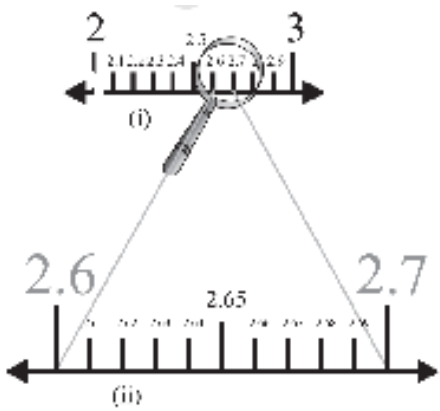


आकृतिः 1.11

2,3 इत्यनयोः मध्ये विद्यमानायाः सङ्ख्यारेखायाः भागं ध्यानपूर्वकं पश्यामः। चिन्तयन्तु यत् एतं भागं दशधा विभज्य प्रत्येकं भागं 1.11(i) आकृत्यां दत्त-प्रकारेण अङ्कयामः। 2 इत्यस्य दक्षिणभागे प्रथमम् अङ्कनम् 2.1, द्वितीयम् 2.2 इत्येवम्। 2,3 इतयनयोः मध्ये विद्यमानानां विभागानाम्

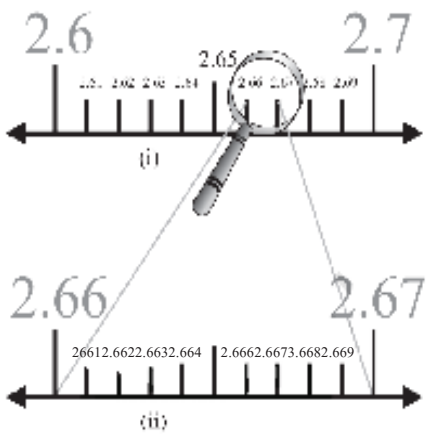
अवलोकनं कष्टं स्यात्।

1.11(i) आकृतिं पश्यन्तु । अस्य स्पष्टं चित्रं प्राप्तुं, आवर्धककाचेन 2,3 मध्ये विद्यमानं भागं पश्यन्तु । तत्तु 1.11(ii) आकृत्यां दत्तप्रकारेण भवति । इदानीं 2.665, 2.6 तथा 2.7 इत्यनयो¬ मध्ये भवति । इदानीं, 2.6 तथा 2.7 इत्यनयोः मध्ये विद्यमाने भागे अवधानं दद्मः । 1.12(i) आकृतिं पश्यन्तु । एतं भागं पुनः दशधा विभक्तुं कल्पयामः । प्रथमम् अङ्कनम् 2.61, द्वितीयं 2.62 इत्यादयः । स्पष्टतया द्रष्टुं 1.12(ii) आकृत्यां दत्तप्रकारेण आवर्धनं कुर्मः ।



आकृतिः 1.12

पुनः 2.665 तु 2.66, 2.67 इत्यनयोः मध्ये भवति । अतः अस्मिन् भागे अवधानं दद्मः (1.13 (i) आकृतिं पशयन्तु) तथा दशधा विभक्तुं कल्पयामः । अत्र प्रथमम् अङकनं 2.661, द्वितीयं 2.662 इत्येवमादीनि। अतः 2.665 एषु सूक्ष्मविभागेषु पञ्चमम् अङ्कनम् अस्ति ।



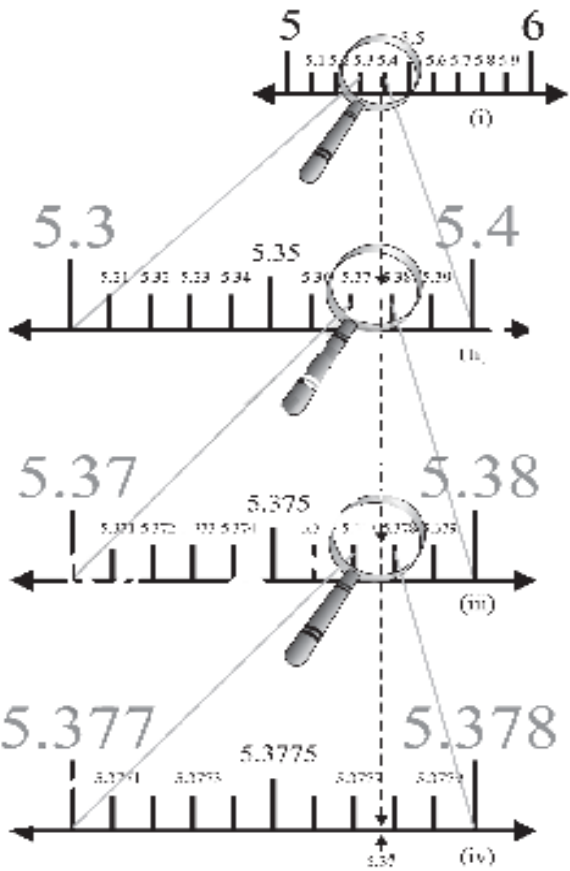
आकृतिः 1.13

एवं सङ्ख्या-निरूपणाय आवर्धक-काचेन सङ्ख्यारेखायां क्रियमाणां दर्शनप्रक्रियां उत्तरोत्तरक्रमिक-आवर्धनप्रक्रिया इति कथयामः।

पर्याप्तमात्रेण अनुक्रम-आवर्धनेन सङ्ख्यारेखायां सान्त-दशमलवप्रस्तारयुतायाः वास्तविकसङ्ख्यायाः स्थानं द्रष्टुं शक्नुमः।

इदानीं सङ्ख्यारेखायाम् अनन्त-आवृत्त-दशमलव-प्रस्तारयुतस्य कस्याश्चित् वास्तविकसङ्ख्यायाः स्थानं द्रष्टुं प्रयत्नं कुर्मः। आवर्धककाचेन उचितम् अन्तरालं पश्यामः तथा क्रमिक-आवर्धनेन सङ्ख्यारेखायां सङ्ख्यायाः स्थानं पश्यामः।

उदाहरणम् 11: सङ्ख्यारेखायां $5.3\overline{7}$ सङ्ख्यायाः निरूपणम् 5 दशमलवस्थानपर्यन्तं कुर्वन्तु अर्थात् 5.37777 पर्यन्तम्।



आकृतिः 1.14

समाधानम् : पुनरेकवारम् उत्तरोत्तरक्रमिकआवर्धनद्वारा क्रमेण सङ्ख्यारेखायाः भागानां दीर्घतां न्यूनीकृत्य, $5.3\overline{7}$ – सङ्ख्या यत्र वर्तते तं भागम् आवर्धयाम। प्रथमे सोपाने $5.3\overline{7}$ - 5,6 इत्यनयोः मध्ये अस्ति, द्वितीयसोपाने $5.3\overline{7}$ - 5.3, 5.4 इत्यनयोः मध्ये अस्ति। एतत् निरूपणम् इतोऽपि स्पष्टीकर्तुं, सङ्ख्यारेखायाः एतं भागं दशधा विभज्य आवर्धककाचेन पश्यन्तु यत् $5.3\overline{7}$, $5.3\overline{7}$ तथा 5.38 इत्यनयोः मध्ये अस्ति। इतोपि शुद्धतया $5.3\overline{7}$ संख्यां द्रष्टुं सङ्ख्यारेखायाः 5.37, 5.38 इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं भागं दशधा विभज्य आवर्धककाचेन पश्यन्तु यत् 5.377 तथा 5.378 इत्यनयोः मध्ये $5.3\overline{7}$ अस्ति। इतोपि शुद्धतया $5.3\overline{7}$ इत्येतां द्रष्टुं सङ्ख्यारेखायाः 5.377, 5.378 इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं भागं दशधा विभज्य, $5.3\overline{7}$ इत्यस्य निरूपणं 1.14 (iv) तमे चित्रे पश्यामः। अवलोकयन्तु यत् 5.3777 इत्यस्य अपेक्षया 5.3778 इत्यस्य समीपे $5.3\overline{7}$ अस्ति।

एवम्प्रकारेण, निरन्तरम् अनुक्रमेण आवर्धनकाचेन पश्यन्तः, युगपत् सङ्ख्यारेखायां $5.3\overline{7}$ स्थितस्य भागस्य दीर्घतायाः न्यूनीकरणं चिन्तयन्तः च अग्रे गच्छाम। अस्माभिः सूचितरेखायाः भागस्य मापः तु अपेक्षितायाः शुद्धतयाः मात्राम् अवलम्ब्य तिष्ठति। शुद्धतायाः मात्रा तु सङ्ख्यारेखायां सङ्ख्यास्थानं द्रष्टुम् अपेक्षितम् अस्ति।

एतावता भवन्तः अवगतवन्तः स्युः यत् सङ्ख्यारेखायाम् अनन्त-अनावृत्त-दशमलवप्रस्तारयुतां वास्तविकसङ्ख्यां द्रष्टुं समानप्रक्रियां प्रयोक्तुं शक्नुमः।

उपरितनचर्चायाः ज्ञानेन, तथा दर्शनप्रक्रियया एवं निर्णेतुं शक्यम् - प्रत्येकं वास्तविकसङ्ख्या, केनचित् अद्वितीय-बिन्दुना सङ्ख्यारेखायां सूच्यते। तथैव, सङ्ख्यारेखायां विद्यमाना प्रत्येकं सङ्ख्या एकामेव वास्तविकसङ्ख्यां सूचयति।

प्रश्नावलिः 1.4

1. सङ्ख्यारेखायाम् 3.765 – एतां संख्याम् अनुक्रमेण आवर्धनेन पश्यन्तु।

2. $4.\overline{26}$ सङ्ख्यारेखायां 4 दशमलव-स्थानपर्यन्तं लिखन्तु।

1.5 वास्तविकसङ्ख्यासु गणितप्रक्रियाः

पूर्वतनकक्ष्यासु भवन्तः दृष्टवन्तः यत् परिमेयसङ्ख्याः सङ्कलने तथा गुणने संवादि-गुणधर्मं, सम्बन्धिगुणधर्मं, वितरणगुणधर्मं च पूरयति। अपि च, परिमेयसङ्ख्ययोः सङ्कलनं, व्यवकलनं, गुणनं, (शून्यात् विहाय)विभजनं कुर्मः चेत् पुनः परिमेयसङ्ख्यां एव प्राप्नुमः। (अर्थात् परिमेयसङ्ख्याः सङ्कलनविकलनगुणन-विभजनकर्मसु संवृताः सन्ति)। अनेन अपरिमेयसङ्ख्याः अपि संवादि-गुणधर्मं,सम्बन्धिगुणधर्मं वितरणगुणधर्मं च सङ्कलन-गुणन-कर्मसु पूरयति इति ज्ञायते। किन्तु अपरिमेयसङ्ख्ययोः योगः, अन्तरं, गुणनफलं, भागफलं च सर्वदा अपरिमेयम् एव इति वक्तुं न शक्यते। उदाहरणार्थं $(\sqrt{6})+(-\sqrt{6})$, $(\sqrt{2})-(\sqrt{2})$, $(\sqrt{3})\times(\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ परिमेयाः सन्ति ।

इदानीं परिमेय-अपरिमेय-सङ्ख्ययोः सङ्कलने, गुणने च किं भवति इति पश्यामः। उदाहरणम् - $\sqrt{3}$ काचित् अपरिमेयसङ्ख्या । $2+\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ च किं भवति तर्हि? यतः .$\sqrt{3}$ इत्यस्य अनन्तःअनावृत्तः च दशमलवप्रस्तारः अस्ति, अतः $2+\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ इत्यनयोः अपि तथैव सत्यम् । अतः $2+\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ इति उभयम् अपि अपरिमेयम् एव ।

उदाहरणम् : 12 $7\sqrt{5}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi - 2$ च अपरिमेयसङ्ख्याः वा न वा इति परिशीलयन्तु ।

समाधानम् : $\sqrt{5} = 2.236\ldots$, $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, $\pi = 3.1415\ldots$

तर्हि $7\sqrt{5} = 15.652\ldots$, $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304\ldots\ldots$

$\sqrt{2}+21 = 22.4142\ldots,.$

$\pi - 2 = 1.1415$

एते सर्वे अनन्ताः तथा अनावृत्त-दशमलवाः सन्ति । अतः एते सर्वे अपि अपरिमेय-सङ्ख्याः एव ।

अपरिमेयसङ्ख्यानां सङ्कलनं,व्यवकलनं,गुणनं,विभागम्,वर्गमूलं,n तमं मूलं (यत्र n काचित् प्राकृतसङ्ख्या) यदि स्वीकुर्मः तदा किं भवति इति पश्यामः।

उदाहरणम् 13 : $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ एतयोः सङ्कलनं कुर्वन्तु ।

समाधानम् : $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2}+\sqrt{2})+(5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

उदाहरणम् 14 : $6\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ द्वारा 6गुणनं करोतु

समाधानम् : $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 12\times 5 = 60$

उदाहरणम् 15 : $8\sqrt{15}$ $2\sqrt{3}$ द्वारा विभजनं करोतु

समाधानम् : $8\sqrt{15}\div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3\times 5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

(i) एतानि उदाहरणानि अधोदत्त-तथ्यानि प्रति नयति यानि सत्यानि सन्ति ।

(ii) परिमेय-अपरिमेयसङ्ख्ययोः योगः, अन्तरः च अपरिमेयसङ्ख्या अस्ति ।

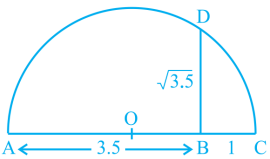
(iii) अशून्य-परिमेय-अपरिमेयसङ्ख्ययोः गुणनफलं, भागफलं च अपरिमेयसङ्ख्या अस्ति ।

अपरिमेयसङ्ख्ययोः योगः, अन्तरः, गुणनफलं, भागफलं च अपरिमेयसङ्ख्या अथवा परिमेयसङ्ख्या भवति।

इदानीं वास्तविकसङ्ख्यानां वर्गमूलेषु अवधानं दद्मः। स्मरन्तु यत् a काचित् प्राकृतसङ्ख्या चेत् $\sqrt{a} = b$ इत्युक्ते $b^2 = a$, $b > 0$। समानमेव लक्षणं धनात्मक-वास्तविकसङ्ख्याभ्यः विस्तारयितुं शक्नुमः।

$a > 0$ काचित् वास्तविकसङ्ख्या भवतु। तर्हि $\sqrt{a} = b$ इत्युक्ते $b^2 = a$, $(b > 0)$।

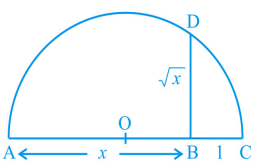
1.2 तमे परिच्छेदे कस्यचित् $\sqrt{n}$ नामकपूर्णाङ्कस्य वर्गमूलं n सङ्ख्यारेखायां कथं निरूप्यते इति दृष्टवन्तः। इदानीं ज्यामितीयपद्धत्या कस्याश्चित् धनात्मक-वास्तविक-सङ्ख्यायाः $\sqrt{x}$ वर्गमूलं x सङ्ख्यारेखायां कथं निरूपयामः इति पश्यामः। उदाहरणम् :- $x = 3.5$ इति स्वीकुर्मः, अर्थात् $\sqrt{3.5}$ अस्य मूल्यं ज्यामितीयपद्धत्या अन्विषामः।



आकृति 1.15

दत्तरेखायां A इति नियतबिन्दुतः 3.5 मात्रकाणाम् अङ्कनं कृत्वा B इति बिन्दुं प्राप्नुवन्तु यथा $AB = 3.5$ मात्रकाणि (1.15 आकृतिं पश्यन्तु)। B बिन्दुतः एकमात्रकदूरम् अङ्कनं कृत्वा, नूतनबिन्दुं C इति वदन्तु। AC इत्यस्य मध्यबिन्दुम् अन्विष्य O इति वदन्तु। O इति मध्यबिन्दुना OC इति त्रिज्यया अर्धवर्तुलं चित्रयन्तु। AC इत्यस्य समालम्बं काञ्चित् रेखां चित्रयन्तु यथा सा B बिन्दुद्वारा गत्वा D बिन्दौ अर्धवर्तुलं प्रतिछिनत्ति। तर्हि $BD = \sqrt{3.5}$।

अतिसामान्यतया x इति कस्याश्चित् धनात्मक-वास्तविक-सङ्ख्यायाः वर्गमूलं $\sqrt{x}$ ज्ञातुं B बिन्दुं अङ्कयामः यथा $AB = X$ मात्रकाणि। यथा 1.16 आकृत्यां दर्शितं तथा C बिन्दुम् अङ्कयन्तु यत्र $BC = 1$ मात्रकम्। अग्रे $x = 3.5$ स्थित्यां यथाकृतं तथा $BD = \sqrt{x}$ अन्विषामः (1.16 आकृतिं पश्यामः)। पिथागोरस् प्रमेयेन एतं परिणामं निरूपयामः।



आकृतिः 1.16

1.16 आकृत्यां पश्यन्तु यत् Δ OBD काचित् समकोणत्रिभुजा अस्ति। अपि च वर्तुलस्य त्रिज्या तु $\frac{x+1}{2}$ मात्रकाणि।

अतः $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ मात्रकाणि

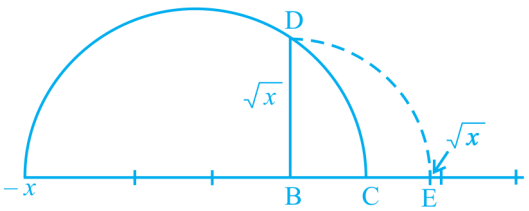
अधुना $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

अतः पिथागोरस् प्रमेयेन -

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

अनेन BD = $\sqrt{x}$ इति निरूप्यते।

एतत् निर्माणम् ($x > 0$) इति नियमेन प्रवर्तमानानां सर्वासाम् अपि वास्तविकसंख्यानां वर्गमूलम् $\sqrt{x}$ अस्ति इति दार्शनिकक्रमेण तथा ज्यीमितीयक्रमेण निरूपयति। यदि सङ्ख्यारेखायां $\sqrt{x}$ इत्यस्य स्थानं ज्ञातुम् इच्छन्ति तर्हि वयं BC रेखां सङ्ख्यारेखा इति भावयित्वा, B = 0, C = 1 इति स्वीकुर्मः। B बिन्दुं केन्द्रीकृत्य BD इति त्रिज्यया, कञ्चन चापं चित्रयतु यः चापः सङ्ख्यारेखां E इति बिन्दौ प्रतिछिनत्ति (1.17 आकृतिं पश्यन्तु). E बिन्दुः $\sqrt{x}$ इत्यस्य प्रतिनिधिः अस्ति।



आकृतिः 1.17

वयं वर्गमूलस्य चिन्तनं घनमूलं तथा चतुर्थमूलं प्रति विस्तारयितुं इच्छामः, सामान्तया n - तममूलपर्यन्तं विस्तारयितुं इच्छामः यत्र n इति धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति। वर्गमूल-घनमूलानां विषये भवताम् अवगमनं स्मरन्तु।

$\sqrt[3]{8}$ इत्युक्ते किम्? आम्, सत्यम्, एषा काचित् धनात्मकसङ्ख्या यस्याः घनः 8, तथा भवताम् अनुमानानुगुणं $\sqrt[3]{8} = 2$। $\sqrt[5]{243}$ इत्यस्य प्रयत्नं कुर्मः। यथा $b^5 = 243$ स्यात्, तादृशीं b इति सङ्ख्यां भवन्तः जानन्ति? 3 इत्येव उत्तरम् अस्ति। $\sqrt[5]{243} = 3$.

एतेभ्यः उदाहरणेभ्यः $\sqrt[n]{a}$ इत्यस्य लक्षणं वक्तुं शक्नुमःवा? यत्र a काचित् वास्तविकसङ्ख्या $a > 0$, n इति च कश्चन धनात्मकपूर्णाङ्कः च स्तः।

$a > 0$, इति वास्तविकसङ्ख्या भवतु, n इति धनात्मकपूर्णाङ्कः भवतु तर्हि $\sqrt[n]{a} = b$ यदि $b^n = a$ तथा $b > 0$। अत्र अवगच्छन्तु $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[n]{a}$ इत्यादिषु उपयुक्तं "$\sqrt{}$" इति चिह्नं करणीचिह्नं इत्युच्यते।

इदानीं वर्गमूलसम्बद्धानां कासाञ्चन नित्यसमीकरणानाम् आवलिं कुर्मः यासाम् उपयोगः अनेकरीत्या अस्ति। पूर्वतनवर्गेषु केषाञ्चन विषयेषु भवन्तः परिचिताः अभवन्। अवशिष्टाः तु, वास्तविकसङ्ख्यानां योगे गुणनस्य वितरणनियमात् तथा $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ यत्र x, y : वास्तविकसङ्ख्ये) , इत्यनेन नित्यसमीकरणेन च प्राप्ताः।

a, b चेति धनात्मकवास्तविकसङ्ख्ये भवताम्

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

(v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

एतेषां नित्यसमीकरणानां विशिष्टस्थितीः पश्यामः ।

उदाहरणम् 16 : अधोदत्तव्यञ्जकान् सरलीकुर्वन्तु

(i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5})$ (ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})$

(iii) $(3 + \sqrt{7})^2$ (iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(11 + \sqrt{7})$

समाधानम् : (i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $(5 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $(3 + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3}\sqrt{7}) + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{7})^2 = 11 - 7 = 4$

टिप्पण: अत्र उपरितने उदाहरणे सरलीकरणम् इत्यस्य अर्थः तु व्यञ्जकः परिमेय-अपरिमेयसङ्ख्यानां योगरूपेण लेखनीयः इति।

इमं परिच्छेदं अधोदत्तसमस्यया समापयामः। $\frac{1}{\sqrt{2}}$ इति सङ्ख्यां पश्यन्तु । एषा सङ्ख्या सङ्ख्यारेखायां कुत्र अस्ति इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा ? भवन्तः जानन्ति यत् एषा सङ्ख्या अपरिमेया इति । यदि छेदः परिमेयः सरलतया कार्यं कर्तुं शक्यते । छेदं परिमेयं कर्तुं प्रयत्नं कुर्मः । एतदर्थं वर्गमूलसम्बद्धानि कानिचन नित्यसमीकरणानि अपेक्षितानिभवन्ति । कथम् इति पश्यामः।

सप्तदशम् उदाहरणं

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ इत्यत्र विद्यमानं छेदं परिमेयं कुर्वन्तु

समाधानम् : वयं $\frac{1}{\sqrt{2}}$ सङ्ख्यां परिमेयछेदयुत-तुलयसङ्ख्या-रूपेण लिखामः । $\sqrt{2}.\sqrt{2}$ परिमेयः इति जानीमः । $\frac{1}{\sqrt{2}}$ सङ्ख्यां $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ इत्यनेन गुणनं क्रियते चेत् तुल्यव्यञ्जकः प्राप्यते । तथ्यद्वयम् अपि योजयित्वा –

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

अस्मिन् रूपे $\frac{1}{\sqrt{2}}$ संख्यां सङ्ख्यारेखायां सरलतया अवस्थापयितुं शक्यते । सा संख्या 0, $\sqrt{2}$ इत्यनयोः मध्यभागे अस्ति ।

उदाहरणम् 18 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ इत्यत्र विद्यमानं छेदं परिमेयं कुर्वन्तु

समाधानम् : पूर्वदत्तचतुर्थसर्वसमीकानाम् उपयोगं कुर्मः । (iv) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ इति सङ्ख्यां $2-\sqrt{3}$ इत्यनेन गुणनं विभजनं च कुर्वन्तु ।

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

उदाहरणम् 19 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ इत्यत्र विद्यमानछेदस्य परिमेयं कुर्वन्तु

समाधानम् : पूर्वदत्तस्य तृतीयस्य नित्यसमीकरणस्य उपयोगं कुर्मः ।

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{5})$$

उदाहरणम् 20 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ इत्यत्र विद्यमानं छेदं परिमेयं कुर्वन्तु

समाधानम् : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

अतः कस्यचित् व्यञ्जकस्य छेदे वर्गमूलयुतम् एकं पदम् अस्ति चेत् (करणीचिह्नयुता सङ्ख्या वा), परिमेयच्छेदयुतंतुल्यव्यञ्जकं कर्तुं या प्रक्रिया वर्तते सा छेदस्य परिमेयकरणम् इति उच्यते ।

प्रश्नावलिः 1.5

1. अधोदत्ताः सङ्ख्याः परिमेयाः वा अपरिमेयाः वा इति वदत

(i) $2 - \sqrt{5}$ (ii) $(3 + \sqrt{23}) - \sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. अधोदत्तान् व्यञ्जकान् सरलीकुर्वन्तु

(i) $(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2})$ (ii) $(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$

(iii) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$ (iv) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

3. अत्र स्मरन्तु यत् π तु वृत्तस्य परिधिव्यासयोः मध्ये विद्यमानः अनुपातः इति। अर्थात् $\pi = \frac{c}{d}$ अनेन एवं भाति यत् π अपरिमेया सङ्ख्या इत्यनेन तथ्येन सह अन्तर्विरोधः अस्ति। एतम् अन्तर्विरोधं कथं परिहरन्ति ?

4. सङ्ख्यारेखायां $\sqrt{9.3}$ सङ्ख्यां निरूपयन्तु।

5. अधोदत्तान् छेदान् परिमेयान्कुर्वन्तु

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7} - 2}$

1.6 वास्कविक-सङ्ख्यानां घाताङ्कनियमाः

अधोदत्तानां कथं सरलीकरणम् इति भवन्तः जानन्ति वा ?

(i) $17^2 \cdot 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 =$

उत्तराणि प्राप्तवन्तः वा ? अधोदत्तानि सन्ति।

(i) $17^2 \cdot 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 = 63^3$

एतानि उत्तराणि प्राप्तुं भवन्तः अधोदत्तान् घाताङ्कनियमान् प्रयुक्तवन्तः स्युः य़ान् भवन्तः पूर्वतनकक्ष्याभ्यः जानन्ति एव। (अत्र a, m, n प्राकृतसङ्ख्याः। स्मरन्तु यत् a आधारः, m, n घाताङ्कौ।

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ इत्यस्य मानं किम्? आम्, तत्तु 1! अतः भवन्तः ज्ञातवन्तः यत् $(a)^0 = 1$। अतः तृतीयं नियमम् उपयुज्य $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$। एतं नियमं ऋणात्मकघाताङ्कानां कृते अपि विस्तारयितुं शक्नुमः।

अतः उदाहरणार्थम्,

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

अस्माभिः अधोदत्तानि परिकलनानि करणीयानि चेत् -

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

एतान् कथम् अवगच्छामः ? इतः अवगम्यते यत् वयं पूर्वं पठितान् घाताङ्कनियमान्, धनात्मकवास्तविकसङ्ख्यायुतम् आधारं प्रति, तथा परिमेयसङ्ख्यायुतं घाताङ्कं प्रति अपि विस्तारयितुं शक्नुमः। (अग्रे भवन्तः पठिष्यन्ति यत् एषः नियमः वास्तविकसङ्ख्यायुतं घाताङ्कं प्रति विस्तारयितुं शक्नुमः)। एतेषां नियमानां कथनात् पूर्वं, तथा एतेषां सामान्य-अवगमनात् पूर्वम् अस्माभिः $4^{\frac{3}{2}}$ चेत् किम् इति अवगन्तव्यम्। अत्र किञ्चित् कार्यम् अस्ति !

1.4 तमे परिच्छेदे $a > 0$ इत् वास्तविकसङ्ख्यायै $\sqrt[n]{a}$ इत्यस्य लक्षणम् अधेदत्तप्रकारेण उक्तवन्तः।

काचित् वास्तविकसङ्ख्या भवतु यत्र $a > 0$, तथा n कश्चित् धनात्मकः पूर्णाङ्कः अस्ति। तर्हि $\sqrt[n]{a} = b$ यदि $b^n = a$, तथा $b > 0$.

घाताङ्कानां भाषया $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ इति लक्षणं कुर्मः। अतः विशेषतया $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$। $4^{\frac{3}{2}}$ एतां सङ्ख्यां

द्रष्टुं प्रकारद्वयम् अस्ति।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

अतः अधोदत्तं लक्षणं पश्यामः

$a > 0$ काचित् वास्तविकसङ्ख्या भवतु। m, n पूर्णाङ्कौ भवतां यथा m, n इत्यनयोः 1 इत्यस्य अपेक्षयाअन्यत् अपवर्तनं नास्ति। तदा

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

इदानीं घाताङ्कनियमाः एवं विस्तारयितुं शक्यन्ते-

$a > 0$ काचित् वास्तविकसङ्ख्या भवतु, तथा p, q परिमेयसङ्ख्ये भवताम्। तदा

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

इदानीं भवन्तः एतान् नियमान् उपयुज्य पूर्वतन-प्रश्नानाम् उत्तराणि दातुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 21 : एतानि सरलीकुर्वन्तु (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^5}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

समाधानम् :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

प्रश्नावलिः 1.6

1. अन्विषन्तु (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. अन्विषन्तु (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. अन्विषन्तु (i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} . 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 सारांशः

1. r इति परिमेयसङ्ख्या तदा भवति यदा सा $\frac{p}{q}$ इत्यस्मिन् रूपे लेखितुं शक्यते यत्र p, q पूर्णाङ्कौ, $q \neq 0$।

2. s इति अपरिमेयसङ्ख्या तदा भवति यदा सा $\frac{p}{q}$ इत्यस्मिन् रूपे लेखितुं न शक्यते यत्र p, q पूर्णाङ्कौ, $q \neq 0$।

3. कस्याश्चित् परिमेयसङ्ख्यायाः दशमलवप्रस्तारः सान्तः अथवाअनन्तावृत्त भवति। अपि च यस्याः सङ्ख्यायाः दशमलवप्रस्तारः सान्तः अथवा अनन्तावृत्तःसा सङ्ख्या परिमेयसङ्ख्या इति उच्यते।

4. कस्याश्चित् अपरिमेयसङ्ख्यायाः दशमलवप्रस्तारः अनन्तः अनावृत्तः च भवति। अपि च यस्याः सङ्ख्यायाः दशमलवप्रस्तारः अनन्तः अनावृत्तः, सा सङ्ख्या अपरिमेयसङ्ख्या इति उच्यते।

5.वास्तविकसङ्ख्याः तु परिमेयसङ्ख्यानाम् अपरिमेयसङ्ख्यानां च समाहारः अस्ति।

6. सङ्ख्यारेखायां प्रत्येकं बिन्दोः सङ्गतात् काचित् अद्वितीया वास्तविकसङ्ख्या अस्ति। अपि च प्रत्येकं वास्तविकसङ्ख्यायाः सङ्गतः सङ्ख्यारेखायां काचित् अद्वितीयः बिन्दुः अस्ति।

7. यदि r परिमेया, तथा s अपरिमेया तर्हि r + s तथा r - s अपरिमेयसङ्ख्याः अपि च rs तथा $\frac{r}{s}$ अपरिमेयसङ्ख्याः यत्र $r \neq 0$।

8. a, b इति धनात्मकवास्तविकसङ्खायानाम्, अधोदत्त-नित्यसमीकरणानि सत्यानि भवन्ति।

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

(v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a} + b}$ इत्यस्य छेदं परिमेयं कर्तुं $\frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b}$ इत्यनेन गुणनं कुर्मः यत्र a, b पूर्णाङ्कौ।

10. $a > 0$ काचित् वास्तविकसङ्ख्या भवतु तथा p, q परिमेयसङ्ख्ये भवताम्। तदा

(i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

अध्यायः 2

बहुपदानि

2.1 प्रस्तावना

भवन्तः पूर्वतनवर्गेषु बीजीयव्यञ्जकान् तेषां सङ्कलनं, व्यकलनं, गुणनं, विभजनं च अधीतवन्तः। अपि च केषाञ्चन बीजीयव्यञ्जकानां अपवर्तनं कथं करणीयम् इति पठितवन्तः। कानिचित् बीजीय-अभिज्ञानानि अत्र स्मरन्तु।

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

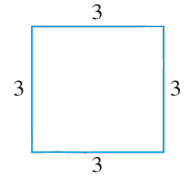
तथा अपवर्तने तेषां प्रयोजनम् अपि स्मरामः। अस्मिन् अध्याये बहुपदं नाम बीजीयव्यञ्जकस्य किञ्चन प्रकारं तथा तत्सम्बद्ध-पारिभाषिक-पदानि अपि पठामः। अपि च शेषफलप्रमेयं, अपवर्तनप्रमेयं च पठित्वा अपवर्तने तेषाम् उपयोगम् अपि पठामः। अनेन सह इतोऽपि अन्यानि कानिचन बीजीय-व्यञ्जकान् पठामः। अपवर्तने, दत्तव्यञ्जकानां मूल्याङ्कने च तेषाम् उपयोगं ज्ञास्यामः।

2.2 एकचरयुक्तं बहुपदम्

चराक्षरं तु केनचित् चिह्नेन सूच्यते यत् काञ्चित् वास्तविक-सङ्ख्यां स्वीकर्तुं शक्नोति। x, y, z इत्यादिभिः अक्षरैः द्वारा चरान सूचयामः। $2x$, $3x$, $-x$, $-\frac{1}{2}x$ इत्यादयः बीजीयव्यञ्जकाः। अत्र व्यञ्जकाः सर्वे (अचरः) $\times x$ इति रूपेण सन्ति। कञ्चन व्यञ्जकं (अचरः) × (चरः) इति रूपेण लिखामः किन्तु अचराणां मानानि न जानीमः चेत् अचरान् a, b, c इत्यादिभिः अक्षरैः सूचयामः। अतः व्यञ्जकः ax इति रूपेण भवति।

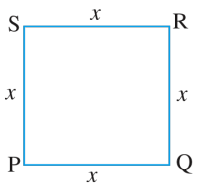
अचरं सूचयतः अक्षरस्य तथा चरं सूचयतः अक्षरस्य च मध्ये भेदः अस्ति। एकस्मिन् सन्दर्भे अचरस्य मानानि पूर्णतया समानि भवन्ति अर्थात् एकस्यां समस्यायाम् अचरमानानां परिवर्तनं नास्ति, किन्तु चरमानानि परिवर्तमानानि भवन्ति।

इदानीं 3मात्रकयुक्तं(मात्रकत्रययुक्तं) वर्गं चिन्तयतु (2.1 आकृतिं पश्यन्तु)। अस्य परिधिः का अस्ति ? वर्गस्य परिधिः तु चतुर्णां भुजानां दीर्घतायाः योगः अस्ति। अत्र प्रतिभुजं 3 मात्रकाणि, अतः परि 4 × 3 = 12 मात्रकाणि। दशमात्रकयुक्तस्य वर्गस्य परिधिः कः भवति ? परिधिः तु 4 × 10 = 40 मात्रकयुक्तः भवति। यदि प्रत्येकं भुजस्य दीर्घता x मात्रकाणि भवति (2.2 आकृतिं पश्यन्तु) तर्हि परिधिः तु $4x$ मात्रकयुतः भवति। अतः यदा भुजायाः दीर्घता भिन्ना भवति परिधिः अपि भिन्नः भवति।



आकृति 2.1

PQRS वर्गस्य क्षेत्रफलम् अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति वा ? तत्तु $x \times x = x^2$ वर्गमात्रकाणि। x^2 कश्चन बीजीयव्यञ्जकः अस्ति। भवन्तः अन्यबीजीयव्यञ्जकैः सह परिचिताः सन्ति। यथा $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ अत्र अवगच्छन्तु यत् सर्वेऽपि बीजीयव्यञ्जकाः येषां विषये पठितवन्तः, तेषु सर्वेषु अपि चरस्य घाताङ्करूपेण पूर्णसङ्ख्याः एव स्वीकृताः सन्ति।



आकृति 2.2

एतादृशान् व्यञ्जकान् 'एकचरयुतं बहुपदम्' इति वदामः। उपरिदत्तेषु उदाहरणेषु x इति अचरः अस्ति। उदाहरणार्थम् :– $x^3 - x^2 + 4x + 7$ इति बहुपदं तु x इति चरयुक्तं बहुपदम् अस्ति। तथैव $3y^2 + 5y$ तु y चरयुक्तं बहुपदम् अस्ति, $t^2 + 4$ तु t चरयुक्तं बहुपदम् अस्ति।

$x^2 + 2x$ बहुपदे x^2, $2x$ इति व्यञ्जकौ बहुपदस्य पदे इति उच्येते। तथैव $3y^2 + 5y + 7$ इति बहुपदे पदत्रयम् अस्ति – $3y^2$, $5y$, 7 । $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ इत्यस्मिन् बहुपदे विद्यमानानि पदानि लेखितुं शक्नोति वा? अस्मिन् बहुपदे चत्वारि पदानि सन्ति। तानि तु $-x^3$, $4x^2$, $7x$, -2 च।

बहुपदस्य प्रत्येकं पदे कश्चन सहगुणकः भवति। $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ इत्यस्मिन् बहुपदे x^3 इत्यस्य सहगुणकः -1 अस्ति, x^2 इत्यस्य सहगुणकः 4 अस्ति, x इत्यस्य सहगुणकः 7, x^0 इत्यस्य सहगुणकः -2 ($x^0 = 1$ इति स्मरन्तु)। $x^2 - x + 7$ इति बहुपदे x इत्यस्य सहगुणकं जानन्ति वा ? सः तु -1 इति।

2 इत्यपि किञ्चन बहुपदम् अस्ति। वस्तुतुः 2, -5, 7 इत्यादयः अचरबहुपदानाम् उहाहरणानि सन्ति। 0 इति अचरबहुपदं तु शून्यबहुपदम् इति उच्यते। सर्वेषां बहुपदानां सङ्ग्रहे एतत् बहुमहत्त्वपूर्णम् अस्ति। एतस्य विषये उच्चकक्ष्यासु भवन्तः पठिष्यन्ति।

$x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$, $\sqrt[3]{y} + y^2$ इत्यादीन् बीजीयव्यञ्जकान् स्वीकुर्वन्तु। $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ इति लेखितुं शक्यते इत्यस्य विषये जानन्ति वा ? अत्र द्वितीयपदस्य घाताङ्कः अर्थात् x^{-1} तु -1 अस्ति, या पूर्णसङ्ख्या नास्ति। अतः एषः बीजीयव्यञ्जकः बहुपदं नास्ति।

पुनः $\sqrt{x} + 3 = x^{\frac{1}{2}} + 3$ इति लेखितुं शक्यते। अत्र x इत्यस्य घाताङ्कः $\frac{1}{2}$, या सङ्ख्या पूर्णसङ्ख्या नास्ति अतः $x + 3$ बहुपदम् अस्ति किम् ? न, तत् बहुपदं नास्ति। $\sqrt[3]{y} + y^2$ इत्यस्य विषये किम् ? तदपि बहुपदं नास्ति (किमर्थम्?)।

यदि बहुपदस्य चरः x अस्ति तर्हि तं बहुपदं $p(x)$ अथवा $q(x)$ अथवा $r(x)$ इत्यादिभिः सूचयितुं शक्यते।

उदाहरणार्थं –

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

कस्मिंश्चित् अपि बहुपदे परिमितसङ्ख्यया पदानि भवितुम् अर्हन्ति। उदाहरणार्थम् $x^{150} + x^{149} \ldots\ldots + x^2 + x + 1$ इत्यस्मिन् बहुपदे 151 पदानि सन्ति।

$2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y, u^4 इत्यादीनि बहुपदानि स्वीकुर्वन्तु। प्रत्येकं बहुपदे एकमेव पदम् अस्ति इति दृष्टवन्तः वा ? येषां बहुपदानाम् एकमेव पदम् अस्ति तानि एकपदानि उच्यन्ते।

अधोदत्तबहुपदानि अवलोकयन्तु –

$p(x) = x + 1$ $q(x) = x^2 - x$ $r(y) = y^{30} + 1$ $t(u) = u^{43} - u^2$

एतेषु बहुपदेषु कति पदानि सन्ति ? प्रत्येकं बहुपदे अपि पदद्वयम् एव अस्ति, अतः तानि द्विपदानि उच्यन्ते। तथैव येषां त्रीणि पदानि सन्ति तानि त्रिपदानि उच्यन्ते। त्रिपदानाम् उदाहरणानि तु –

$p(x) = x + x^2 + r$, $q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$

$r(u) = u + u^2 - 2$, $t(y) = y^4 + y + 5$

इदानीं $p(x) = 3x7 - 4x6 + x + 9$ इति बहुपदं पश्यन्तु। x इत्यस्य उच्चघातयुक्तं पदं किम् अस्ति? $3x7$. अस्मिन् पदे x इत्यस्य घाताङ्कः 7 अस्ति। तथैव $q(y)=5y^6 - 4y^2 - 6$ इत्यस्मिन् बहुपदे y इत्यस्य उच्चघातयुक्तं पदं तु $5y^6$. तथा अस्य पदस्य y घाताङ्कः 6 अस्ति। बहुपदे चरस्य उच्चघातं बहुपदघातः इति वदामः। अतः $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ इत्यस्मिन् बहुपदे 7 एव बहुपदघातः अस्ति। तथैव $5y^6 - 4y^2 - 6$ इत्यस्मिन् बहुपदे बहुपदघातः 6 अस्ति। **अशून्य-अचरबहुपदस्य बहुपदघातः शून्यम् अस्ति।**

उदाहरणम् 1 : अधोदत्त - बहुपदानां बहुपदघातम् अन्विष्यन्तु –

(i) $x^5 - x^4 + 3$

(ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$

(iii) 2

समाधानम् : (i) बहुपदस्य उच्चघातः 5 अस्ति। अतः बहुपदघातः 5 अस्ति।

(ii) बहुपदस्य उच्चघातः 8 अस्ति। अतः बहुपदघातः 8 अस्ति।

(iii) अत्र 2 इति एकमेव पदम् अस्ति यत् $2x^0$ इति लेखितुं शक्यते। अतः x बहुपदघातः 0 अस्ति।

इदानीं $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$, $s(u) = 3 - u$ इति बहपदानि अवलोकयन्तु। एतेषु बहुपदेषु किमपि साम्यं दृश्यते किम्? एतेषां बहुपदानां बहुपदघातः 1 अस्ति। यस्य बहुपदस्य एकम् इति बहुपदघातः अस्ति, तत् रैखिकबहुपदम् इति उच्यते। एकचरयुतानि अन्यानि कानिचित् रैखिकबहुपदानि - $2x - 1$, $\sqrt{2}y + 1$, $2 - u$ | इदानीं x चरे त्रिपदयुक्तं रैखिकबहुपदम् अन्वेष्टुं प्रयत्नं कुर्वन्तु। भवन्तः अन्वेष्टुं न शक्नुवन्ति, यतः x चर रैखिकबहुपदे अधिकाधिकं पदद्वयम् एव भवितुम् अर्हति। अतः x चरे किञ्चन बहुपदम् $ax + b$ इत्यस्मिन् रूपे एव भवति, यत्र a, b अचरौ स्तः, $a \neq 0$। तथैव $ay + b$ रैखिकबहुपदम् y चरे अस्ति।

इदानीम् अधोदत्तबहुपदानि स्वीकुर्वन्तु –

$$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + 5,\ x^2 \text{ तथा } x^2 + \frac{2}{5}x$$

अत्र सर्वेषां बहुपदानां बहुपदघाताः 2 इति भवन्तः अङ्गीकुर्वन्ति किम् ?

घातद्वययुक्तं बहुपदं वर्गबहुपदम् इति उच्यते । वर्गबहुपदस्य कानिचन उदाहरणानि $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ तथा $6 - y - y^2$ । एकस्मिन् चरे पदचतुष्टययुक्तं वर्गबहुपदं लेखितुं शक्नुवन्ति किम्? भवन्तः ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् एकस्मिन् चरे विद्यमानस्य वर्गबहुपदस्य अधिकाधिकं पदत्रयम् एव भवति । इतोऽपि केषाञ्चन वर्गबहुपदानां सूचीं कुर्वन्ति चेत् भवन्तः ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् x चरे वर्गबहुपदानां रूपं तु $ax^2 + bx + c$ भवति यत्र $a \neq 0$, a, b, c च अचराः सन्ति । तथैव y चरे वर्गबहुपदं $ay^2 + by + c$ इति रूपे भवति यत्र $a \neq 0$, a, b, c अचराः सन्ति ।

घातत्रययुक्तबहुपदं घनबहुपदम् इति वदामः। x चरे घनबहुपदानाम् उदाहरणानि तु $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. कस्मिंश्चित् चरे घनबहुपदस्य कति पदानि भवन्ति इति भवन्तः चिन्तयन्ति ? तत्र अधिकाधिकं चत्वारि पदानि भवितुम् अर्हन्ति । तानि $ax^3 + bx^2 + cx + d$ इति रूपे लेखितुं शक्नुवन्ति, यत्र $a \neq 0$, a, b, c, d अचराः सन्ति ।

इदानीं भवन्तः एक-द्वय-त्रय-घात-युक्तानि बहुपदानि अवलोकितवन्तः। कस्मिंश्चित् चरे n घातयुक्तं (n इति काचित् प्राकृतसंख्या) बहुपदं लेखितुं शक्नुवन्ति वा ? इदानीं x इत्यस्मिन् चरे n घातयुक्तबहुपदस्य व्यञ्जकः अधोदत्तरूपेण भवति –

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

यत्र $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ अचराः सन्ति । तथा $a_n \neq 0$ ।

विशिष्य यदि $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (सर्वेपि अचराः शून्याः)। शून्यबहुपदं प्राप्नुमः यत् 0 द्वारा सूचयामः। शून्यबहुपदस्य घातः कः? शून्यबहुपदस्य बहुपदघातः परिभाषितः नास्ति ।

एतावत्पर्यन्तम् एकस्मिन् चरे विद्यमानानां बहुपदानां विषये पठितवन्तः। एकस्मात् अपि अधिकचरे बहुपदानि भवितुम् अर्हन्ति । उदाहरणार्थं $x^2 + y^2 + xyz$ (यत्र चराः x, y, z) । चरत्रये बहुपदम् अस्ति । तथैव $p^2 + q^{10} + r$ (यत्र p, q, r चराः सन्ति), $u^3 + v^2$ (अत्र चराः u, v) च, क्रमशः चरत्रये चरद्वये च विद्यमानानि बहुपदानि । ईदृशानां बहुपदानां विषये विस्तृतरूपेण अग्रे पठिष्यन्ति ।

प्रश्नावलिः 2.1

1. अधोदत्ताः व्यञ्जकाः एकचरबहुपदानि वा न वा इति सूचयन्तु । कारणानि अपि वदन्तु ।

(i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y^2 + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. अधोदत्तेषु x^2 इत्यस्य सहगुणकान् लिखन्तु –

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2} x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35 घातयुक्तद्विपदस्य तथा 100 घातयुक्त-एकपदस्य एकैकम् उदाहरणं यच्छन्तु।

4. अधोदत्तेषु प्रत्येकं बहुपदस्य घातं लिखन्तु।

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. अधोदत्तानां बहुपदानां रैखिक-वर्ग-घन-बहुपदेषु वर्गीकरणं कुर्वन्तु।

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 बहुपदस्य शून्यता:

$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ इति बहुपदं स्वीकुर्वन्तु

$P(x)$ बहुपदे x इति स्थाने 1 इति प्रतिष्ठापयामः चेत्

$$P(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

अतः वदामः यत् $x = 1$ इत्यत्र $p(x)$ इत्यस्य मानं 4 इति।

तथैव $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

$P(-1)$ इत्यस्य मानम् अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति वा ?

उदाहरणम् 2 : चराणां सूचितमानेषु अधोदत्तानां बहुपदानां मानानि अन्विषन्तु

(i) $P(x) = 5x^2 - 3x + 7$ यदा $x = 1$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ यदा $y = 2$

(iii) $p(t) = 4t^4 - 5t^3 - t^2 + 6$ यदा $t = a$

समाधानम् : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

यदा $x = 1$, $p(x)$ बहुपदस्य मानं तु

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$= 5 - 3 + 7 = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

यदा y = 2, q(y) बहुपदस्य मानं तु

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 - 5t^3 - t^2 + 6$

यदा t = a, p(t) बहुपदस्य मानं तु

$p(a) = 4a^4 - 5a^3 - a^2 + 6$

$p(x) = x - 1$ इति बहुपदं स्वीकुर्वन्तु,

p(1) किम् ? $p(1) = 1 - 1 = 0$.

$P(1) = 0$ इति कारणेन $p(x)$ बहुपदस्य शून्यता 1 इति वदामः

तथैव $q(x)$ इत्यस्य शून्यता 2 इति वक्तुं शक्नुमः यत्र $q(x) = x - 2$.

सामान्यतया वदामः यत् $p(x)$ बहुपदस्य शून्यता c इति काचित् सङ्ख्या यथा $p(c) = 0$ ।

अत्र भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः यत् $x - 1$ बहुपदस्य शून्यतां तु तत् शून्येन (0) सह तोलयित्वा प्राप्नुमः यथा $x - 1 = 0$, येन $x = 1$ इति प्राप्यते । वयम् एवं वक्तुं शक्नुमः - $P(x) = 0$ किञ्चन बहुपद-समीकरण अस्ति । तथा $p(x) = 0$ इति बहुपदसमीकरणस्य मूलम् 1 अस्ति इति । अतः वदामः यत् $x - 1$ बहुपदस्य शून्यता 1 अस्ति, अथवा $x - 1 = 0$ इत्यस्य बहुपदसमीकरणस्य मूलम् '1' इति ।

इदानीं 5 इति अचरबहुपदं स्वीकुर्वन्तु । अस्य शून्यता का इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा ? अत्र शून्यता नास्ति एव । यतः $5x^0$ इत्यत्र x चरस्थाने अन्यसंख्यायाः प्रतिष्ठापनेन 5 एव प्राप्यते ।वस्तुतः c इत्यस्य अशून्य-अचर-बहुपदस्य शून्यता नास्ति । शून्य-बहुपदस्य शून्यतानां विषये किं कथयन्ति? । रूढ्या प्रत्येकं वास्तविकसङ्ख्या अपि शून्य-बहुपदस्य शून्यता एव ।

उदाहरणम् 3 : - 2, 2 च $x + 2$ इत्यस्य बहुपदस्य शून्यते वा इति परिशीलयन्तु ।

समाधानम् : $P(x) = x + 2$

तदा $p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

अतः $x + 2$ इति बहुपदस्य शून्यता - 2 अस्ति, अपि च 2 तस्य शून्यता न भवितुं नार्हति ।

उदाहरणम् 4 : $P(x) = 2x + 1$ इत्यस्य बहुपदस्य शून्यताम् अन्विषन्तु ।

समाधानम् : $p(x) = 0$ समीकरणस्य समाधानेन $P(x)$ इत्यस्य शून्यता लभ्यते ।,

इदानीम् $2x + 1 = 0$ समीकरणतः $x = -\frac{1}{2}$

अतः $2x + 1$ इत्यस्य शून्यता तु $-\frac{1}{2}$

इदानीं यदि $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ तु रैखिकबहुपदं तर्हि कथम् $p(x)$ इत्यस्य शून्यं ज्ञातुं शक्नुमः ? चतुर्थात् उदाहरणात् किञ्चन चिन्तनं प्राप्तवन्तः स्युः । $p(x)$ बहुपदस्य शून्यान्वेषणं तु $p(x) = 0$ बहुपद-समीकरण-समाधान-तुल्यम् अस्ति ।

इदानीं $p(x) = 0$ इत्युक्ते $\quad ax + b = 0, a \neq 0$

अतः $\quad ax = -b$

अर्थात् $\quad x = -\frac{b}{a}$

अतः $x = -\frac{b}{a}$, $p(x)$ इत्यस्य एकमात्रं शून्यता अस्ति ।अर्थात् रैखिक-बहुपदस्य एका एव शून्यता वर्तते ।

इदानीं वक्तुं शक्नुमः यत् $(x - 1)$ इत्यस्य शून्यता1 , तथा $(x + 2)$ इत्यस्य शून्यता - 2 अस्ति ।

उदाहरणम् 5 : $x^2 - 2x$ इत्यस्य बहुपदस्य शून्यते $0, +2$ वा इति परिशीलयन्तु ।

समाधानम् : $\quad P(x) = x^2 - 2x$

तदा $\quad p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

तथा $\quad p(0) = 0 - 0 = 0$

अतः 2, 0 $x^2 - 2x$ इति बहुपदस्य शून्यते स्तः ।

अस्माकं अवलोकनानां आवलिं कुर्मः

1. बहुपदस्य शून्यता 0 एव भवेत् इति नास्ति ।
2. 0 अपि बहुपदस्य शून्यता भवितुम् अर्हति ।
3. प्रत्येकं रैखिकसमीकरणस्य अपि एकमात्रं शून्यता अस्ति ।
4. बहुपदस्य एकाधिकाः शून्यताः भवितुम् अर्हन्ति ।

प्रश्नावलिः 2.2

1. $5x - 4x^2 + 3$ बहुपदस्य मानम्

   (i) $x = 0$, $\quad$ (ii) $x = -1$ $\quad$ (iii) $x = 2$ इत्यत्र अन्विषन्तु ।

2. अधोदत्तानां बहुपदानां $p(0)$, $p(1)$ तथा $p(2)$ अन्विषन्तु

   (i) $P(y) = y^2 - y + 1$ $\quad$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $P(x) = x^3$ $\quad$ (iv) $P(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. अधोदत्तानि मानानि तत्सम्बद्ध-बहुपदानां शून्यताः वा इति परिशीलयन्तु

   (i) $P(x) = 3x + 1$, $x = -\frac{1}{3}$ $\quad$ (ii) $P(x) = 5x - \pi$, $x = \frac{4}{5}$

(ii) $P(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$ (iii) $P(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(iv) $P(x) = x^2, x = 0$ (v) $P(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

(iv) $P(x) = 3x2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (vi) $P(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

4. अधोदत्तानां प्रत्येकं बहुपदानां शून्यम् अन्विषन्तु

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$

(iii) $P(x) = 2x + 5$ (iv) $P(x) = 3x - 2$

(v) $P(x) = 3x$ (vi) $P(x) = ax, a \neq 0$

(vii) $P(x) = cx + d, c \neq 0$, c, d च वास्तविक सङ्ख्ये स्तः।

2.4 शेषफल-प्रमेयम्

15 तथा 6 इति सङ्ख्याद्वयं स्वीकुर्मः। भवन्तः जानन्ति यत् यदा 6 द्वारा 15 अस्य विभजनं कुर्मः, भागफलं=2, शेषफलं = 3 इति प्राप्नुमः। एतत्तथ्यस्य अभिव्यक्तिं कथं कुर्मः इति स्मरन्ति वा ? एवं लिखामः।

$$15 = (6 \times 2) + 3$$

अवलोकयामः यत् विभाजकस्य(6) अपेक्षया शेषफलं(3) न्यूनम् अस्ति।

$$12 = (6 \times 2) + 0$$

अत्र शेषफलं किम् ? अत्र शेषफलं 0। अतः वदामः यत्12 इत्यस्य अपवर्तः 6 अस्ति। 6 इत्यस्य अपवर्त्यं 12 अस्ति।

इदानीं प्रश्नः तु एकं बहुपदम् अपरेण कथं विभजनं कुर्मः इति ? आदौ एकपद-विभजकेन प्रयत्नं कुर्मः। अतः $2x^3 + x^2 + x$ बहुपदं x इत्यनेन एकपदेन विभजनं कुर्मः।

अत्र $(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$

$= 2x^2 + x + 1$

वस्तुतः भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः यत् x तु $2x^3 + x^2 + x$ बहुपदस्य प्रतिपदे अपि सामान्यम् अस्ति। अतः $2x^3 + x^2 + x$ बहुपदं $x(2x^2 + x + 1)$ इति लेखितुं शक्यते।

x, $2x^2 + x + 1$ च $2x^3 + x^2 + x$ इत्यस्य अपवर्तौ स्तः। x तथा $2x^2 + x + 1$ इत्यनयोः अपवर्त्यं $2x^3 + x^2 + x$ अस्ति।

$3x^2 + x + 1$ तथा x इति अन्यत् बहुपदयुग्मं स्वीकरोतु।

अत्र $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$

पश्यामः यत् बहुपदस्य एकं(अन्तिमं) पदं प्राप्तुम् x द्वारा एकं (1) विभक्तुं न शक्नुमः । अतः अस्यां स्थित्यां अत्र स्थगयामः । 1 शेषफलम् इति भावयामः । अतः

$$3x^2 + x + 1 = \{x \times (3x + 1)\} + 1$$

अस्यां स्थित्यां $3x + 1$ भागफलं, तथा 1 शेषफलं, $3x^2 + x + 1$ इत्यस्य अपवर्तः x इति भवन्तः चिन्तयन्ति वा ? शेषफलं शून्यं नास्ति इति कारणेन सः अपवर्तः न भवति ।

किञ्चन बहुपदं कथम् अशून्य-बहुपदेन विभक्तुं शक्यते इति केनचित् उदाहरणेन पश्यामः ।

उदाहरणम् 6 : $p(x) = x + 3x^2 - 1$ तथा $g(x) = 1 + x$ च अस्ति । $p(x)$ बहुपदं $g(x)$ द्वारा विभजन्तु ।

समाधानम् : अधोदत्तैः सोपानैः विभजन-प्रक्रियां कुर्मः

प्रथमं सोपानम् : $x + 3x^2 - 1$ भाज्यं तथा $x + 1$ भाजकं आदर्शरूपेण लिखामः । अर्थात् पदानि घातानां अवरोहणक्रमे लिखामः। अतः भाज्यं $3x^2 + x - 1$,तथा भाजकं $x + 1$ ।

द्वितीयं सोपानम् : भाज्यस्य प्रथमं पदं भाजकस्य प्रथमपदेन विभजनं कुर्मः । अर्थात् $3x^2$ एतत् x द्वारा विभज्य $3x$ प्राप्नुमः । अनेन भागफलस्य प्रथमं पदं प्राप्नुमः।

$$\frac{3x^2}{x} = 3x$$

तृतीयं सोपानम् : भागफलस्य प्रथमं पदं भाजकेन गुणनं कुर्मः तथा एतत् फलं भाज्यात् व्यवकलनं कुर्मः । अर्थात् $x+1$ अस्य गुणनं $3x$ द्वारा कृत्वा प्राप्तं फलं $3x^2 + 3x$ ।एतत् फलं $3x^2 + x - 1$ इत्यस्मात् भाज्यात् व्यवकलनं कुर्मः । अनेन $-2x - 1$ इति शेषफलं प्राप्नुमः ।

$$\begin{array}{r} 3x \\ x+1 \overline{)\,3x^2 + x - 1} \\ \underline{-3x^2 \pm 3x} \\ -2x - 1 \end{array}$$

चतुर्थं सोपानम् : $-2x - 1$ शेषफलं नूतनभाज्यरूपेण स्वीकुर्मः । भाजकः समानः भवति । भागफलस्य नूतनं पदं प्राप्तुं द्वितीयं सोपानम् आवर्तयामः। अर्थात् नूतनभाज्यस्य प्रथमं पदं $-2x$ नूतनभाजकस्य प्रथमं पदं x द्वारा विभज्य -2 प्राप्नुमः । अतः -2 भागफलस्य द्वितीयं पदम्।

$$\frac{-2x}{x} = -2$$

= भागफलस्य द्वतीयं पदम्

नूतनं भागफलं
$= 3x - 2$

पञ्चमं सोपानम् भाजकं भागफलस्य द्वितीयपदेन गुणनं कृत्वा तत् फलं भाज्यात् व्यवकलनं कुर्मः । अर्थात् -2 द्वारा $x + 1$, अस्यगुणनं कृत्वा $-2x - 2$ फलं प्राप्यते । एतत् फलं $-2x - 1$ भाज्यात् व्यकलनं कुर्मः । अनेन 1 इति शेषफलं प्राप्नुमः ।

$$(x + 1)(-2) = -2x - 2$$

$-2x - 1$	
$-2x - 2$	
$+ \quad +$	
$+1$	

एषा प्रक्रिया शेषफलं 0 इति प्राप्तिपर्यन्तम् अनुवर्तते, अथवा य़ावत् नूतनभाज्यस्य घातः भाजकस्य घातात् न्यूनः तावत् अनुवर्तते । अस्मिन् सोपाने नूतनभाज्यं शेषफलं भवति, तथा भागफलानां योगेन पूर्णभागफलं प्राप्यते ।

षष्ठं सोपानम् : एवं, पूर्णं भागफलं = $3x$ - 2, शेषफलं च 1 । उपरि कृतां प्रक्रियां पूर्णरूपेण एकवारं पश्याम –

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 2 \\
\hline
x+1 & 3x^2 + x - 1 \\
 & \underline{-3x^2 \pm 3x} \\
 & \quad -2x - 1 \\
 & \quad \underline{-2x - 2} \\
 & \quad\quad 1
\end{array}
$$

अत्र पश्यन्तु यत् $3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$

अर्थात् **भाज्यं = (भाजकं × भागफलं) + शेषफलम्**

सामान्यतया यदि $p(x)$, $g(x)$ इति बहुपदद्वयं यथा $p(x)$ घातः $\geq g(x)$ घातः तथा $g(x) \neq 0$, तर्हि $q(x)$, $r(x)$ इति बहुपदद्वयं भवति यथा

$$P(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$$

यत्र $r(x) = 0$, अथवा $r(x)$ घातः $< g(x)$ घातः। अत्र वदामः यत् $p(x)$, $g(x)$ द्वारा विभज्यते चेत्, भागफलं $q(x)$, शेषफलं $r(x)$ इति प्राप्येते ।

उपरितने उदाहरणे भाजकं रैखिक-बहुपदम् आसीत् । अस्यां स्थित्यां,शेषफलं तथा भाज्यस्य केषाञ्चन मानानां मध्ये कः सम्बन्धः अस्ति इति पश्यामः ।

$P(x) = 3x^2 + x - 1$ इत्यत्र x, इत्यस्य स्थाने -1 इति प्रतिस्थापयामः ।

$$P(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$$

अतः $P(x) = 3x^2 + x - 1$ इत्येतत् बहुपदं $x + 1$ द्वारा विभज्य प्राप्यमाणं शेषफलं तु $(x + 1)$ बहुपद-शून्यतायां प्राप्यमाणस्य $p(x)$ बहुपदस्य मानस्य समानम् अस्ति । अर्थात् -1.

इतोऽपि कानिचन उदाहरणानि पश्यामः ।

उदाहरणम् 7 : $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ बहुपदं $x - 1$ बहुपदद्वारा विभजन्तु ।

समाधानम् दीर्घविभाजन-प्रक्रियया,

$$
\begin{array}{r|l}
x - 1 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\
\hline
 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & \underline{-3x^4 + 3x^3} \\
 & \quad -x^3 - 3x - 1 \\
 & \quad \underline{+x^3 - x^2} \\
 & \qquad -x^2 - 3x - 1 \\
 & \qquad \underline{+x^2 - x} \\
 & \qquad\quad -4x - 1 \\
 & \qquad\quad \underline{+4x - 4} \\
 & \qquad\qquad -5
\end{array}
$$

अत्र शेषफलं - 5 । इदानीम् $x - 1$ इत्यस्य शून्यता 1 । अतः $p(x)$ इत्यस्मिन् $x = 1$, इति प्रतिष्ठाप्यते चेत्

$P(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$

$= 3 - 4 - 3 - 1$

$= -5$ शेषफलम् अस्ति ।

उदाहरणम् 7 : $p(x) = x^3 + 1$ बहुपदं $x + 1$ द्वारा यदा विभज्यते तदा शेषफलम् अन्विषत

समाधानम् : दीर्घविभाजन-प्रक्रियया,

$$
\begin{array}{r|l}
x + 1 & x^2 - x + 1 \\
\hline
 & x^3 + 1 \\
 & \underline{-x^3 - x^2} \\
 & \quad -x^2 + 1 \\
 & \quad \underline{+x^2 + x} \\
 & \qquad\quad x + 1 \\
 & \qquad\quad \underline{-x - 1} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

अतः शेषफलं 0 इति पश्यामः।

अत्र $p(x) = x^3 + 1$ । तथा $x + 1 = 0$ इत्यस्य मूलम् $x = -1$. पश्यामः यत्

$p(-1) = (-1)^3 + 1$

$= -1 + 1$

$= 0$

यत् वास्तविक - विभजनप्रक्रियया प्राप्तेन शेषफलेन तुल्यम् अस्ति।

रैखिकबहुपदद्वारा कस्यचित् बहुपदस्य विभजनेन शेषफलप्राप्तेः सरलमार्गः नास्ति किम्? एतत् तथ्यम् अधोदत्तप्रमेयरूपेण सामान्यीकरणं कुर्मः। एतत् प्रमेयं किमर्थं सत्यम् इत्यपि उपपत्त्या सह दर्शयामः।

शेषफलप्रमेयः *p(x) किञ्चन बहुपदं भवतु यस्य घातः एकेन तुल्यः अधिकः वा स्यात्। तथा a काचित् वास्तविकसङ्ख्या भवतु। यदि x - a इति रैखिकबहुपदेन p(x) विभक्तं स्यात् तर्हि शेषफलं तु p(a) इति भवति।*

उपपत्तिः $p(x)$ किञ्चन बहुपदं भवतु यस्य घातः एकेन तुल्यः अधिकः वा स्यात्। तथा a काचित् वास्तविकसङ्ख्या भवतु। यदि $x - a$ इति रैखिकबहुपदेन $p(x)$ विभक्तं स्यात् तर्हि भागफलं $q(x)$ भवति तथा शेषफलं तु $r(x)$ इति भवति। अर्थात् –

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$$

यतः $x - a$ इत्यस्य घातः 1 इति अस्ति तथा $r(x)$ इत्यस्य घातः $x - a$ इत्यस्य अपेक्षया न्यूनः अस्ति, $r(x)$ इत्यस्य घातः 0 भवति। इतः ज्ञायते यत् $r(x)$ अचरः इति। अर्थात् r इति।

अतः x इत्यस्य प्रत्येकं मानस्यापि कृते, $r(x) = r$

अतः $$p(x) = (x - a)\, q(x) + r$$

विशेषतया यदि $x = a$ तर्हि एतत् समीकरणम् –

$$p(a) = (a - a)\, q(a) + r$$
$$= r$$

अनेन प्रमेयः निरूप्यते।

अन्यस्मिन् उदाहरणे एतस्य परिणामस्य उपयोगं कुर्मः।

उदाहरणम् 9 : यदा $x - 1$ इति बहुपदेन $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ विभज्यते, तदा शेषफलम् अन्विषन्तु।

समाधानम् : अत्र $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ | तथा $x - 1$ इत्यस्य शून्यता 1 इति।

अतः अत्र $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$

$= 2$

अतः शेषफल-प्रमेयेन 2 शेषफलं भवति यदा $x - 1$ द्वारा $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ विभज्यते।

उदाहरणम् 10 : $q(t) = 4t^3 - 4t^2 - t - 1$ इति बहुपदं $2t + 1$ इत्यस्य अपवर्त्यं वा इति परिशीलयन्तु।

समाधनम् : भवन्तः जानन्ति यत् - यदा $q(t)$-बहुपदं $2t + 1$ इत्यनेन विभज्यते, तदा शेषं शून्यं भवति चेदेव $q(t)$ इत्येतत् $2t + 1$ इत्यस्य अपवर्त्यम् इति उच्यते। इदानीं $2t + 1 = 0$,इति स्वीकृत्य, $t = -\frac{1}{2}$ इति प्राप्यते।

अपि च, $$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

अतः q(t) 2t + 1 द्वारा विभज्यते चेत् 0 इति शेषफलं प्राप्नुमः ।

अतः दत्त-बहुपदस्य q(t) इत्यस्य 2t + 1 अपवर्तः अस्ति । अर्थात् q(t) इत्येतत् 2t + 1 इत्यस्य अपवर्त्यम् अस्ति ।

प्रश्नावलिः 2.3

1. यदा $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ अधोदत्तैः विभजत्यते, तर्हि शेषफलम् अन्विषत

   (i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x - a$ द्वारा $x^3 - ax^2 + 6x - a$ विभज्यते चेत् शेषफलम् अन्विषत ।

3. $7 + 3x$ बहुपदं, $3x^3 + 7x$ इत्यस्य अपवर्तः वा इति परिशीलयन्तु ।

2.5 बहुपदानाम् अपवर्तनम्

दशम-उदाहरणस्य स्थितिम् इदानीं समीपतः पश्यामः । अनेन अवगम्यते यत् शेषफलं $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ इत्यतः 2t + 1 बहुपदं q(t) इत्यस्य अपवर्तः । अर्थात् $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$ । अत्र g(t) इति किञ्चन बहुपदम् । एषा अधोदत्तप्रमेयस्य काचित् विशिष्टा स्थितिः अस्ति ।

अपवर्तनप्रमेयम् : यदि $p(x)$ किञ्चन बहुपदं यस्य घातः $n \geq 1$, a: काचित् वास्तविकसङ्ख्या, तर्हि –

(i) $(x - a)$ इत्येतत् $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः, यदि $p(a) = 0$ ।

(ii) $p(a) = 0$ यदि $(x - a)$ इत्येतत् p(f) इत्यस्य अपवर्तः ।

उपपत्तिः शेषफलप्रमेयेन $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) यदि $p(a) = 0$ तर्हि $p(x) = (x - a)\, q(x)$, येन अवगम्यते यत् $x - a$ इत्येतत् $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः इति ।

(ii) यतः $x - a$ इत्येतत् $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः, $p(x) = (x - a)\, g(x)$, यत्र $g(x)$ इति किञ्चन बहुपदम् । अस्यां स्थित्यां $p(a) = (a - a)\, g(a) = 0$

उदाहरणम् 11 : $(2x + 4)$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6)$ इत्यनयोः $x + 2$ अपवर्तः वा इति परिशीलयतु ।

समाधानम् : $x + 2$ इत्यस्य शून्यम् - 2

$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$, तथा $s(x) = 2x + 4$

तर्हि $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6$

$= 0$

अतः अपवर्तनप्रमेयेन $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ इत्यस्य $x + 2$ अपवर्तः अस्ति ।

पुनः $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

अतः $x + 2$ इत्येतत्, $2x + 4$ इत्यस्य अपवर्तः अस्ति । वस्तुतः एतत् तथ्यं गुणखण्डप्रमेयेन विना अपि परिशीलयितुं शक्यते । यतः $2x + 4 = 2(x + 2)$

उदाहरणम् 12 : $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ इत्यस्य अपवर्तः $x - 1$ भवति चेत् k इत्यस्य मानम् अन्विष्यन्तु ।

समाधानम् : $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ इत्यस्य अपवर्तः $x - 1$, अतः

$$p(1) = 0$$

इदानीम् $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

$$4 + 3 - 4 + k = 0$$

$$k = -3$$

इदानीं अपवर्तन-प्रमेयेन घातद्वययुक्तानां घातत्रययुक्तानां च बहुपदानाम् अपवर्तनं कुर्मः । $x^2 + lx + m$ इत्यादीनां वर्गबहुपदानाम् अपवर्तनस्य विषये भवन्तः परिचिताः एव । भवन्तः lx इति मध्यमपदं $ax + bx$ इति विभजनद्वारा अपवर्तितवन्तः (यथा $ab = m$) सन्ति । तदा $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ । इदानीं $ax^2 + bx + c$ इत्येवंविधान् वर्गबहुपदान् अपवर्तयामः, यत्र $a \neq 0$, तथा a, b, c च अचराः ।

मध्यमपदस्य विभजनद्वारा क्रियमाणम् $ax^2 + bx + c$ इत्यस्य बहुपदस्य अपवर्तनम् इ अधोदत्तप्रकारेण पश्यामः।

$(px + q)$, $(rx + s)$ च अस्य अपवर्तौ भवताम्, तर्हि

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s), = prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

x^2 इत्यस्य सहगुणकस्य तोलनेन $a = pr$ इति प्राप्नुमः ।

तथैव x इत्यस्य सहगुणकस्य तोलनेन $b = ps + qr$ इति प्राप्नुमः ।

तथैव अचरपदानां तोलनेन $c = qs$ इति प्राप्नुमः ।

अनेन अवगम्यते यत् b इत्येषः अचरः qs तथा qr इत्यनयोः योगः इति । अनयोः गुणनफलं तु $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ अतः $ax^2 + bx + c$बहुपदस्य अपवर्तनाय b अचरं सङ्खाद्वयस्य योगरूपेण लिखामः, यस्य गुणनफलं ac स्यात् । त्रयोदशेन उदाहरणेन एतत् सम्यक् अवगच्छामः ।

उदाहरणम् 13 : $6x^2 + 17x + 5$ इत्यस्य अपवर्तनं, मध्यमपदस्य विभाजनेन तथा अपवर्त्यप्रमेयेन कुर्वन्तु

प्रथमं समाधानम् : (मध्यमपदस्य विभाजनम्) यथा $p + q = 17$ अपि च $pq = 6 \times 5 = 30$ स्यात्, तथा p, q चेति सङ्ख्याद्वयम् अन्वेष्टुं शक्नुमः चेत् अपवर्तान् प्राप्तुं शक्नुमः ।

अतः 30 इत्यस्य अपवर्त-युग्मान् अन्विषामः । तेषु केचन- 1 तथा 30, 2 तथा 15, 3 तथा 10, 5 तथा 6 । एषु युग्मेषु 2 तथा 15 इति युग्मतः $p + q = 17$.

अतः $6x^2 + 2x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

द्वितीयं समाधानम् : (अपवर्तनप्रमेयेन)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6P(x)$ इति भवतु। यदि a, b च $p(x)$ इत्यस्य शून्यते, तर्हि $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$। अतः $ab = \frac{5}{6}$ अत्र a, b इत्यनयोः कांश्चन सम्भवान् पश्यामः। तेषु केचन $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$ च। इदानीं $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0$ किन्तु $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$। अतः $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ इत्येषः $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः अस्ति। तथैव पौनःपुन्येन प्रयत्नेन अन्वेष्टुं शक्नुमः यत् $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ इत्येषोऽपि $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः अस्ति इति।

अतः
$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$
$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$
$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

उपरितने उदाहरणे विभाजन-प्रक्रिया कुशलतरा अस्ति इति भासते। किन्तु अन्यत् उदाहरणं पश्यामः।

उदाहरणम् 14 : अपवर्तनप्रमेयम् उपयुज्य $y^2 - 5y + 6$ इत्येतत् अपवर्तयन्तु।

समाधानम् : $p(y) = y^2 - 5y + 6$ । यदि $p(y) = (y - a)(y - b)$, तर्हि ab अचरपदं भवति इति जानीमः।
अतः $ab = 6$। अतः $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तान् प्राप्तुं 6 इत्यस्य अपवर्तान् अन्विषामः।
6 इत्यस्य अपवर्तः 1, 2, 3 च।
इदानीम् $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$।
अतः $y - 2$ इत्येषः $p(y)$ इत्यस्य अपवर्तः अस्ति।
अपि च $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$।
अतः $(y - 3)$ इत्येषः $y^2 - 5y + 6$ इत्यस्य अपवर्तः अस्ति।
अतः $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$
$y^2 - 5y + 6$ इत्यत्र $-5y$ इत्यस्य मध्यमपदस्य विभाजनेन अपि अपवर्तनं कर्तुं शक्यते इत्येतत् अवगच्छन्तु।

इदानीं घन-बहुपदानां अपवर्तनविषये चिन्तयामः। अत्र विभजन-प्रक्रिया आदौ युक्ता न भवति। अस्माभिः एकः वा अपवर्तः अन्वेष्टव्यः। अस्य विषये अधोदत्तेन उदाहरणनेन पश्यामः।

उदाहरणम् 15 : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

समाधानम् : $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

इदानीं -120 इत्यस्य सर्वान् गुणखण्डान् अन्विषामः । तेषु केचन -

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60.$

प्रयत्नेन $p(1) = 0$ इति अन्विषामः । अतः $(x - 1)$ इत्येषः $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः भवति ।

इदानीं $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (किमर्थम्?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x - 1)$ सर्वत्र सामान्यम् इत्यतः]

$p(x)$ इत्येतत् $(x - 1)$ द्वारा विभज्य अपि एतमेव परिणामं प्राप्तवन्तः स्याम ।

इदानीं $x^2 - 22x + 120$ इत्यस्य अपवर्तनं मध्यमपदविभाजनेन वा अपवर्तनप्रमेयेन वा कर्तुं शक्नुमः ।

$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$

$= x(x - 12) - 10(x - 12)$

$= (x - 12)(x - 10)$

अतः $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 12)(x - 10)$

प्रश्नावलि 2.4

1. अधोदत्तेषु बहुपदेषु कस्य कस्य अपवर्तः $(x + 1)$ अस्ति इति निर्णयं कुर्वन्तु ।

   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

   (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. अधोदत्तेषु प्रत्येकस्मिन् बहुपदे $g(x)$ इत्येषः $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः वा न वा इति अपवर्तनप्रमेयम् उपयुज्य निर्णयं कुर्वन्तु -

   (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$.

   (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$.

   (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$.

3. यदि $x - 1$इत्येषः $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः, तर्हि अधोदत्तेषु बहुपदेषु k इत्यस्य मानं प्राप्नुवन्तु

   (i) $p(x) = x^2 + x + k$. (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

   (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. अपवर्तनं कुर्वन्तु

   (i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

   (iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. अपवर्तनं कुर्वन्तु

   (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.6 बीजीय-नित्यसमीकरणानि

यानि बीजीयसमीकरणानि तेषु विद्यमानानां चराक्षराणां सर्वेषु मानेषु सत्यानि भवन्ति, तानि बीजीय-

नित्यसमीकरणानि इति पूर्वतनवर्गेभ्यः भवन्तः स्मरन्ति । पूर्वतनेषु वर्गेषु भवन्तः अधोदत्तानि बीजगणितीय-नित्यसमीकरणानि पठितवन्तः ।

प्रथमं नित्यसमीकरणम् I : $(x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$

द्वितीयं नित्यसमीकरणम् II : $(x - y)^2 = (x^2 - 2xy + y^2)$

तृतीयं नित्यसमीकरणम् III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

चतुर्थं नित्यसमीकरणम् IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

उपरितनेषु केचन नित्यसमीकरणानि बीजीयव्यञ्जकानाम् अपवर्तने भवद्भिः उपयुक्तानि स्युः । परिकलनेषु अपि एतेषाम् उपयोगम् भवन्तः अवगन्तुं शक्नुवन्ति ।

उदाहरणम् 16 : उचितं नित्यसमीकरणम् उपयुज्य अधोदत्तानां गुणफलम् (गुणलब्धम्) अन्विषन्तु ।

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

समाधानम् : अत्र प्रथमं नित्यसमीकरणम् उपयोक्तुं शक्नुमः $(x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)$ । अत्र $y = 3$ प्रतिष्ठापयामः चेत्

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

चतुर्थं नित्यसमीकरणम् उपयुज्य, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$

$= x^2 + 2x - 15$

उदाहरणम् 17 : साक्षात् गणनं विना 105×106 अस्य मूल्यं प्राप्नुवन्तु

समाधानम् : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$ (चतुर्थं नित्यसमीकरणम् उपयुज्य)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

उपरिदत्तेषु बीजगणीतीय-व्यञ्जकानां गुणफलान्वेषणे बीजगणीतीय-नित्यसमीकरणानां प्रयोगान् दृष्टवन्तः । एतानि समीकरणानि बीजगणीतीय-व्यञ्जकानां अपवर्तने अपि उपयुक्तानि भवन्ति । अधोदत्तैः उदाहरणैः एतत् पश्यामः ।

उदाहरणम् 18 : अपवर्तयन्तु -

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

समाधानम् : अत्र भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत्

$$49a^2 = (7a)^2, (25b^2) = (5b)^2, 70ab = 2(7a)(5b)$$

एतं व्यञ्जकं $x^2 + 2xy + y^2$ इत्यनेन तोलयित्वा, अवलोकयामः यत् $x = 7a$ तथा $y = 5b$ इति च ।

प्रथम-नित्यसमीकरणेन,

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

तृतीयं नित्यसमीकरणम् उपयुज्य,

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

एतावत्पर्यन्तं सर्वेषु नित्यसमीकरणेषु द्विपदानां गुणफलम् आसीत् । इदानीं प्रथमम् अभिज्ञानम् $x + y + z$ त्रिपदम् प्रति विस्तारयामः । प्रथमेन नित्यसमीकरणेन $(x + y + z)^2$ इति त्रिपदम् परिकलयामः ।

$x + y = t$ इति भवतु । तर्हि

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 &= (t + z)^2\\ &= t^2 + 2tz + z^2 \text{ (प्रथमात् नित्यसमीकरणात्)}\\ &= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 \text{ (t इत्यस्य मानस्य प्रतिष्ठापनेन)}\\ &= (x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2) \text{ (प्रथमात् नित्यसमीकरणात्)}\\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \text{ (पदानां क्रमेण पुनर्लेखनेन)}\end{aligned}$$

एवम् अधोदत्तं नित्यसमीकरणं प्रति प्राप्नुमः

पञ्चमं नित्यसमीकरणम् $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

टिप्पणी : व्यञ्जकस्य दक्षिणभागं वामभागस्य विस्तारितरूपम् इति वदामः। अत्र अवलोकयन्तु यत् $(x + y + z)$ इत्यस्य विस्तारे त्रीणि वर्ग-पदानि तथा त्रीणि-गुण-पदानि सन्ति ।

उदाहरणम् 19 : $(3a + 4b + 5c)^2$ इत्येतत् विस्तृत-रूपेण लिखन्तु ।

समाधानम् : दत्तं व्यञ्जकं $(x + y + z)^2$ इत्यनेन तोलनेन, पश्यामः यत् -

$$x = 3a,\ y = 4b,\ z = 5c$$

पञ्चमेन नित्यसमीकरणेन,

$$\begin{aligned}(3a + 4b + 5c)^2 &= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)\\ &= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac\end{aligned}$$

उदाहरणम् 20 : $(4a - 2b - 3c)^2$ इत्येतत् विस्तारयन्तु।

समाधानम्

$$\begin{aligned}(4a - 2b - 3c)^2 &= [(4a + (-2b) - (3c)]^2\\ &= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)\\ &= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac\end{aligned}$$

उदाहरणम् 21 : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ इत्येतत् अपवर्तयन्तु।

सामाधानम् : अत्र $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$

$$= [2x + (-y) + z]^2$$

$$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)$$

एतावत्पर्यन्तं वर्गपदयुक्तानि एव नित्यसमीकरणानि वयं दृष्टवन्तः। इदानीं $(x+y)^3$ इत्येतत् परिकलयितुं प्रथमं नित्यसमीकरणं विस्तारयामः।

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2))$$
$$= (x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3)$$
$$= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$
$$= (x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + y^3)$$

एवम् अधोदत्तं नित्यसमीकरणं प्रति प्राप्नुमः।

नित्यसमीकरणम् VI : $(x + y)^3 = (x^3) + y^3 + 3xy(x + y) + y^3)$

अपि च षष्ठे नित्यसमीकरणे y स्थाने –y इति प्रतिष्ठापनेन,

नित्यसमीकरणम् VII : $(x - y)^3 = (x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$$= (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$$

उदाहरणम् 22 : अधोदत्तानि घनानि विस्तृत्य लिखन्तु -

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

समाधानम् : दत्तं व्यञ्जकं $(x + y)^3$ इत्यनेन तोलनेन, पश्यामः यत्

$$x = 3a \text{ तथा } y = 4b$$

षष्ठेन नित्यसमीकरणेन ज्ञायते,

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

दत्तं व्यञ्जकं $(x - y)^3$ इत्यनेन तोलनेन, पश्यामः यत्

$$x = 5p \text{ तथा } y = 3q$$

सप्तमेन नित्यसमीकरणेन ज्ञायते,

$$(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$$
$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

उदाहरणम् 23 : उचितैः नित्यसमीकरणैः अधोदत्तान् परिकलयन्तु।

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

समाधानम् (i) अत्र,

$(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)\,(4)(100 + 4)$ (षष्ठेन नित्यसमीकरणेन)

$= (1000000 + 64 + 124800)$

$= 1124864$

(ii) अत्र,

$(999)^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 + 3(1000)\,(1)\,(1000 - 1)$ (सप्तमेन नित्यसमीकरणेन)

$= (1000000000 - 1 - 2997000)$

$= 997002999$

उदाहरणम् 24 : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ इत्येतत् अपवर्तयन्तु।

समाधानम् दत्तं व्यञ्जकम् एवं लेखितुं शक्नुमः

$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)\,(3y) + 3(2x)\,(9y^2)$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2\,(3y) + 3(2x)\,(3y)^2$

$= (2x + 3y)^3$ (षष्ठेन नित्यसमीकरणेन)

$= (2x + 3y)\,(2x + 3y)(2x + 3y)$

इदानीं $(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ इत्येतत् अवलोकयन्तु।

विस्तारणेन, गुणफलम् एवं भवति

$x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz$

$+ x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (सरलीकरणेन)

अतः अधोदत्तं नित्यसमीकरणं प्राप्नुमः

नित्यसमीकरणम् VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

उदाहरणम् 25 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$ इत्येतत् अपवर्तयन्तु ।

समाधानम् $= (2x)^3 + (y)^3 + (3z)^3 - 3(2x)\,(y)\,(3z)$

$= (2x + y + 3z)\,[(2x)^2 + (y)^2 + (3z)^2 - (2x)\,(y) - (y)\,(3z) - (2x)\,(3z)]$

$= (2x + y + 3z)\,(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$

प्रश्नावलिः 2.5

1. अधोदत्तानि गुणफलानि अन्वेष्टुम् उचितानि नित्यसमीकरणानि उपयुज्यन्ताम्

   (i) $(x + 4)\,(x + 10)$ (ii) $(x + 8)\,(x - 10)$ (iii) $(3x - 4)(3x - 5)$

   (iv) $(y^2 + \frac{3}{2})\,(y^2 - \frac{3}{2})$ (v) $(3 - 2x)(3 + 2x)$

2. अधोदत्तानाम् गुणफलं साक्षात् गुणनं विना परिकलयन्तु

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. उचितानि नित्यसमीकरणानि उपयुज्य अधोदत्तानि अपवर्तयन्तु।

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. उचितैः नित्यसमीकरणैः अधोदत्तेषु प्रत्येकम् अपि विस्तारयन्तु

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1]^2$

5. अपवर्तयन्तु

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

6. अधोदत्तानि घनानि विस्तारयन्तु

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $[\frac{3}{2}x + 1]^3$ (iv) $[x - \frac{3}{2}y)]^3$

7. अधोदत्तानां परिकलनम् उचितैः नित्यसमीकरणैः कुर्वन्तु।

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. अधोदत्तं प्रत्येकं बहुपदम् अपवर्तयन्तु

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. परिशीलयन्तु (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. प्रत्येकम् अपि अधोदत्तं अपवर्तयन्तु।

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

(टिप्पणी - नवमम् प्रश्नं पश्यन्तु)

11. अपवर्तयन्तु : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. परिशीलयन्तु : $x^3 + y^3 + z^3 = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. यदि $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ इति साधयन्तु।

14 घनानां साक्षात् परिकलनं विना, प्रत्येकं अधोदत्तस्य मानं अन्विषन्तु।

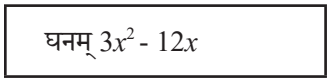
(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$ (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. अधोदत्तस्य प्रत्येकम् आयतस्य दीर्घतायाः विशालतायाः च उचितान् व्यञ्जकान् यच्छन्तु। आयतस्य क्षेत्रफलं दत्तम् अस्ति।

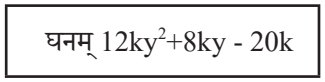
क्षेत्रफलम् - $25a^2 - 35a + 12$	क्षेत्रफलम् - 35y2+13y-12

(i) (ii)

16. अधोदत्तस्य प्रत्येकं घनाभस्य विमानां कृते उचितान् व्यञ्जकान् यच्छन्तु। घनाभस्य घनम् दत्तम् अस्ति।



(i)



(ii)

2.7 सारांशः

अस्मिन् अध्याये अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः

1. x इति चरयुक्तं $p(x)$ बहुपदम् अधोदत्तरूपेण व्यज्यते
   $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
   यत्र $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ अचराः तथा $a_n \neq 0$। $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ क्रमशः $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$ इत्येतेषां सहगुणकानि। तथा n इत्येतत् बहुपदस्य घातः इति उच्यते। $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots a_0, \ a_n \neq 0$ इत्येषु प्रत्येकम् अपि $p(x)$ बहुपदस्य पदम् इति उच्यते।
2. एकपद-युतं बहुपदम् एकपदम्।
3. पदद्वय-युतं बहुपदं द्विपदम्।
4. पदत्रय-युतं बहुपदं त्रिपदम्।
5. एक-घात-युतं बहुपदं रैखिक-बहुपदम् इति उच्यते।
6. घातद्वय-युतं बहुपदं – वर्गबहुपदम् इति उच्यते।
7. घातत्रय-युतं बहुपदं घन-बहुपदम् इति उच्यते।
8. यदा $p(a) = 0$, तदा a इति वास्तविक-सङ्ख्या $p(x)$ इत्यस्य बहुपदस्य शून्यता भवति। अस्यां स्थित्यां a इत्येतत् $p(x) = 0$ इत्यस्य समीकरणस्य मूलं भवति।
9. एकपदयुतस्य रैखिक-बहुपदस्य अपि एकम् अद्वितीया शून्यता अस्ति, अशून्य-अचर-बहुपदस्य शून्यता न विद्यते, तथा प्रत्येकं वास्तविक-सङ्ख्या अपि शून्य-बहुपदस्य शून्यता अस्ति।
10. **शेषफल-प्रमेयम्** - यदि $p(x)$ इति किञ्चन बहुपदं यस्य घातम् एकं वा एकाधिकं वा भवति तथा $p(x)$ इत्येतत् $(x - a)$ इत्यनेन रैखिक - बहुपदेन विभज्यते, तर्हि शेषफलं $p(a)$ भवति।
11. अपवर्तनप्रमेयम् - यदि $p(a) = 0$, तर्हि $(x - a)$ इत्येषः $p(x)$ बहुपदस्य अपवर्तः अस्ति। अपि च यदि $(x - a)$ एषः $p(x)$ बहुपदस्य अपवर्तः अस्ति, तर्हि $p(a) = 0$।
12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$
14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$
15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

अध्यायः 3

निर्देशाङ्क-ज्यामितिः

What's the good Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridan Lines ? So the Bellman would cry ; and crew would reply 'They are merely conventional sings

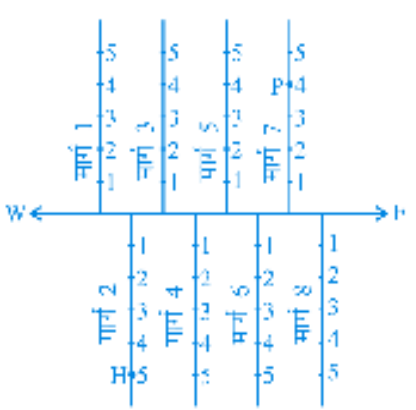
(मेर्कटरस्य उत्तरध्रुवाणि भुमध्यरेखाः, आलङ्कारिकाः, मण्डालानि तथा मध्याह्नरेखाभिः किं प्रयोजनम् ? इति बेल्मानस्य प्रश्नस्य प्रत्युत्तरं तस्य श्रमिकदलः ददाति यति – ताः केवलं रूढीयचिह्नानि इति !)

लेविस् करोल्, दी हण्टिङ् आफ् दिस् नार्कः इति ग्रन्थात्

3.1 प्रस्तावना

सङ्ख्यारेखायां कस्यचिद् बिन्दोः अवस्थापनं कथं करणीयम् इति पूर्वमेव अधीतम् । रेखायां बिन्दुस्थानं वर्णयितुम् अपि भवन्तः जानन्ति । बह्व्यः स्थितयः एवं भवन्ति यत्र- बिन्दोः अन्वेषणार्थं तस्य स्थानविवरणम् एकाधिकरेखाः उपयुज्य दातव्यं भवति । उदारहणार्थं काश्चन स्थितीः पश्यामः –

I. 3.1 आकृत्यां कश्चन पूर्व-पश्चिमदिशोः विस्तृतः मार्गः दर्शितः अस्ति । मार्गसङ्ख्या पश्चिमतः पूर्वगा अस्ति । अपि च प्रतिमार्गं द्वारसङ्ख्या चिह्निता अस्ति । अत्र कस्यचन मित्रस्य गृहम् अन्वेषुटुम् एकस्य एव प्रासङ्गिकबिन्दोः ज्ञानं पर्याप्तं किम् ? उदाहरणार्थम् – यदि अस्माकं मित्रं द्वितीये मार्गे वसति इति जानीमः चेत् तस्य

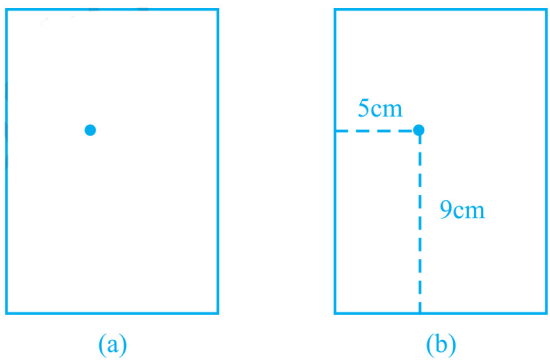


आकृतिः 3.1

गृहम् अन्वेषुं शक्नुमः किम् ? यदि सूचनाद्वयं न जानीमः, तर्हि एतत् तावत् सरलं न । ते सूचने – मार्गसङ्ख्या, द्वारसङ्ख्या च । यदि वयं द्वितीयमार्गे विद्यमानं पञ्चमं गृहं प्राप्तुम् इच्छामः तर्हि आरम्भे द्वितीयं मार्गम् अभिज्ञाय तत्र पञ्च इति चिह्नितं गृहं ज्ञातव्यम् । 3.1 आकृत्यां H इति चिह्नं गृहावस्थितिं दर्शयति । समानतया P इति चिह्नं सप्तममार्गे स्थितस्य '४' इति संख्यया अङ्कितस्य गृहस्य अवस्थितिं दर्शयति ।

II. भवन्तः कस्मिंश्चित् कर्गदपटले कञ्चन बिन्दुं स्थापयन्ति इति चिन्तयन्तु [3.2(*a*)आकृतिं पश्यन्तु] । यदि वयं पत्रे बिन्दोः स्थानं वदन्तु इति पृच्छामः चेत् भवन्तः एतत् कार्यं कथं कुर्वन्ति? प्रायः भवन्तः एवं यत्नं कुर्युः – यथा 'बिन्दुः पत्रस्य उपरितने अर्धभागे अस्ति' । अथवा 'सः वामधारायाः समीपे अस्ति'। अथवा 'बिन्दुः पत्रस्य उपरितन-कोणे वामधारायाः समीपे अस्ति'। एतानि वाक्यानि पत्रे बिन्दुस्थानं परिशुद्धतया सूचयन्ति

III. किम् ? न ! किन्तु भवन्तः एवं वदन्ति चेत् 'बिन्दुः वामधारायाः 5cm मिते दूरे अस्ति,' एतत् वाक्यं बिन्दोः विषये कञ्चन विचारं जनयितुम् उपकरोति । किन्तु बिन्दुं स्पष्टतया न सूचयति । किञ्चित् चिन्तनात् परं वक्तुं शक्यते यत् अधोरेखायाः 9 cm मिते दूरे अस्ति इति । इदानीं बिन्दुः कुत्र अस्ति इति वयं जानीमः ।



आकृतिः 3.2

एतदर्थं बिन्दोः स्थानं स्थिररेखाद्वयात् दूरसङ्केतद्वारा सूचितवन्तः। ते स्थिररेखे तु पत्रस्य वामधारः तथा पत्रस्य अधोरेखा {3.2(b)आकृतिः} च । अन्यशब्दैः उच्यते चेत् – बिन्दोः स्थानम् अन्वेष्टुं द्वे पृथक् सूचने स्याताम् ।

इदानीम् 'आसनव्यवस्था' इति कक्ष्याभ्यासम् अधोदत्तप्रकारेण कुर्वन्तु

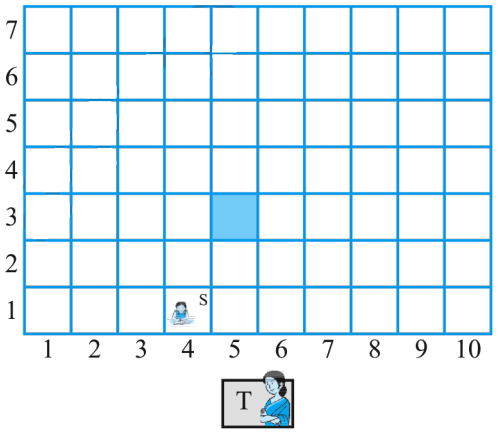
कक्ष्याभ्यासः – १ (आसनव्यवस्था) : भवतां कक्ष्यायाः सर्वाः उत्पीठिकाः अपसर्प्य काञ्चन आसनव्यवस्थां चित्रयन्तु । प्रत्येकम् उत्पीटिकां वर्गाकारद्वारा सूचयन्तु । प्रत्येकं वर्गाका तस्यां तस्याम् उत्पीठिकायाम् उपविशतः छात्रस्य नाम लिखन्तु । प्रत्येकं छात्रस्य स्थानं द्वाभ्यां पृथक् सूचचनाभ्यां विव्रियते ।

I. यत्र छात्रः उपविशति सः स्तम्भः

II. पङ्क्तिः – यत्र छात्रः अथवा छात्रा उपविशति

यदि भवान् पञ्चमस्तम्भे, तृतीयपङ्क्त्यां स्थितायाम् उत्पीठिकायाम् उपविशति (3.3 आकृत्यां छायाङ्कितवर्गद्वारा सूचितः)। भवतः स्थानम् (5,3) इति लिख्यते । प्रथमं स्तम्भसङ्ख्या लिख्यते, अग्रे पङ्क्तिसङ्ख्या । एतत् (3,5) इत्यनेन समानं वा ? अन्येषां छात्राणां नामानि तथा कक्ष्यायां तेषां स्थानानि च

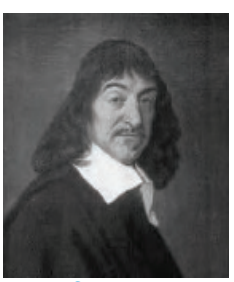
लिखन्तु । उदाहरणार्थम् – यदि सोनिया चतुर्थस्तम्भे प्रथमपङ्क्त्याम् उपविशति –S (4,1) इति लिखन्तु । अध्यापकस्य उत्पीठिका भवताम् आसनव्यवस्थायाः कश्चन भागः नास्ति । वयम् अध्यापकं प्रेक्षकम् इत्येव भावयामः।



आकृतिः 3.3

उपरितनचर्चायाम् भवन्तः अवलोकयन्ति यत् कस्मिंश्चित् समतले विद्यमानस्य कस्यचित् वस्तुनः स्थानस्य सूचनां तु परस्परसमालम्ब-रेखाद्वयेन कर्तुं शक्नुवन्ति । बिन्दोः स्थाननिर्देशनार्थम् पत्रस्य वामधारायाः, अधोरेखायाः च विद्यमानं बिन्दोः दूरम् अपेक्ष्यते। आसनव्यवस्थायाः प्रसङ्गे स्तम्भपङ्क्त्योः सङ्ख्या अपेक्ष्यते। एषः सामान्यविचारः महत्परिणामवान् अस्ति, तथा एकं पृथक् गणितीयविभागम् अजनयत् । अस्य विभागस्य नाम **निर्देशाङ्क-ज्यामितिः** । अस्मिन् अध्याये वयं निर्देशाङ्कज्यामितेः कांश्चन आधारांशान् प्रस्तौमः। अस्य विषये उच्चकक्ष्यासु भवन्तः अधिकं पठिष्यन्ति । अस्य अध्ययनं तु आरम्भे फ्रेन्स्-देशीय-दार्शनिकेन तथा गणितज्ञेन **रेणे डेकार्टस् - वर्येण(Rene Descartes)** विकसितम् ।

रेणे डेकार्टस् सप्तमशतकस्य फ्रेन्स्-देशीयः महान् गणितज्ञः आसीत् । सः शय्यायां शयित्वा चिन्तयितुम् इच्छति स्म । कस्मिंश्चित् दिने यदा सः तल्पे शयानः आसीत् तदा सः समतले स्थितस्य बिन्दोः स्थानसम्बद्धायाः समस्यायाः समाधानं कृतवान् । एतस्य विधानं तु अक्षांशरेखांशसम्बद्धस्य प्राचीनविचारस्य विकासः आसीत् । डे कार्टस्-वर्यस्य सम्मानने, या पद्धति तले बिन्दोः स्थनविवरणं करोति, सा पद्धति **कार्टिशन् पद्धतिः** इति उच्यते ।



आकृतिः 3.4

प्रश्नावलिः - 3.1

1. भवतः अध्ययन-उत्पीठिकायां विद्यमानस्य पीठदीपस्य स्थानविवरणम् अन्येभ्यः कथं कर्तुं शक्नुवन्ति?
2. **(वीथीयोजना)** - कस्मिंश्चित् नगरे द्वौ मुख्यमार्गौ स्तः यौ नगरस्य मध्ये परस्परं सङ्क्रमणं कुरुतः। एतौ मार्गौ उत्तरदक्षिणदिशि तथा पूर्वपश्चिमदिशि स्तः । नगरस्य अन्याः वीथयः एतयोः मार्गयोः समान्तराः सन्ति । अपि च परस्परं 200 M मिते दूरे सन्ति । प्रत्येकं दिशि 5 वीथ्यः सन्ति । 1cm = 200m इति परिगण्य, टिप्पणीपुस्तके अस्य नगरस्य किञ्चन प्रतिरूपं चित्रयन्तु । मार्गान् वीथीः च एकैक-रेखाभिः चित्रयन्तु ।

   भवतां प्रतिरूपे बह्व्यः सङ्क्रमणवीथ्यः सन्तिः। कस्याञ्चन सङ्क्रमणवीथ्यां वीथिकाद्वयम् भवति । एका वीथिका उत्तरदक्षिण-दिशि प्रसृता अस्ति । अपरा च पूर्वपश्चिमदिशायाम् । प्रत्येकं सङ्क्रणमरेखा अधोदत्तप्रकारेण सूच्यते ।

   यदि द्वितीया रेखा उत्तरदक्षिणदिशि गच्छति, पञ्चमवीथिका पूर्वपश्चिमदिशि गच्छति, तथा ते द्वे वीथिके कस्मिंश्चित् सङ्क्रमणे मिलतः, तर्हि एतां सङ्क्रमणवीथिकाम् (2,5) इति वदामः। एतां रूढीम् उपयुज्य –

   (i) (4,3) इत्यनेन कति सङ्क्रमणवीथिकाः सूचयितुं शक्यन्ते ?

   (ii) (3,4) इत्यनेन कति सङ्क्रमणवीथिकाः सूचयितुं शक्यन्ते ?

3.2 कार्टिशन्-पद्धतिः

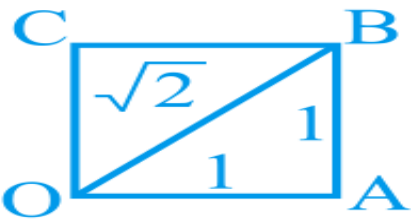
भवन्तः 'सङ्ख्यापद्धतिः' इति पाठे **सङ्ख्यारेखाविषये** अधीतवन्तः। सङ्ख्यारेखायां नियतबिन्दोः दूरं समानमात्रकैः धनदिशि तथा ऋणदिशि चिह्नीक्रियते । यस्मात् बिन्दोः दूरं चिह्नीक्रियते सः **मूलबिन्दुः** इति उच्यते । कस्यांश्चित् रेखायां समदूरेषु बिन्दूनाम् अङ्कनं कर्तुम् सङ्ख्यारेखायाः उपयोगः क्रियते । यदि एक-मात्रकमितं दूरम् '1' इति सङ्ख्या सूचयति, '3' इति संख्या त्रि-मात्रकमितं दूरं सूचयति । '0' इति सङ्ख्या च मूलबिन्दुं सूचयति । मूलबिन्दोः r इति दूरे धनदिशि विद्यमानः बिन्दुः r इति सङ्ख्यया उच्यते । मूलबिन्दोः r इति दूरे ऋणदिशि विद्यमानः बिन्दुः -r इति सङ्ख्यया उच्यते । विविधसङ्ख्यानां सङ्ख्यारेखायाम् अवस्थितेः क्रमः 3.5 आकृत्यां दर्शितः अस्ति ।



आकृतिः

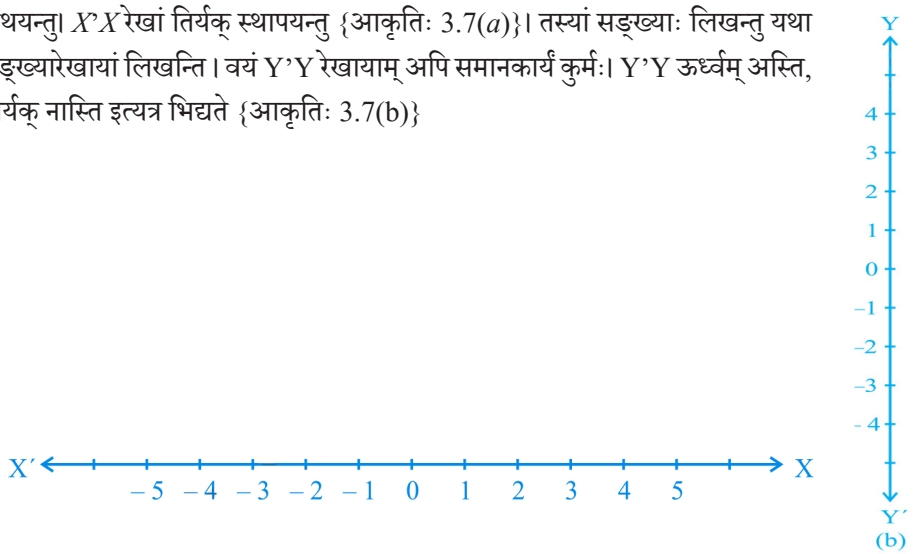
डे-कार्टस् एव तले रेखाद्वयं परस्परं समालम्बं स्थापयित्वा तयोः, ते रेखे आधारीकृत्य बिन्दूनाम् अवस्थितेः क्रमम् आविष्कृतवान् । यथा 3.6 आकृत्यां दर्शितं, तथा समालम्बरेखाद्वयं कस्याञ्चित् अपि दिशि भवितुम्

अर्हति। किन्तु अस्मिन् अध्याये तले बिन्दुम् अवस्थितिं कर्तुं यदा रेखाद्वयं चिनुमः तदा एका रेखा तिर्यक् अपरा च ऊर्ध्वा भवति।



आकृतिः 3.6

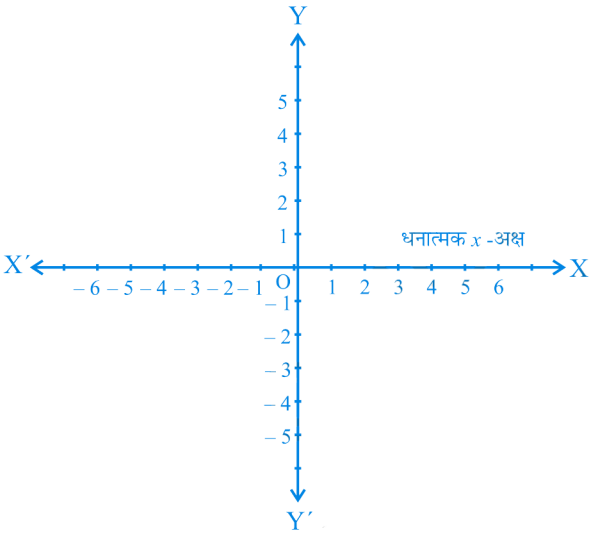
एते द्वे रेखे अधोदत्तप्रकारेण प्राप्ते स्तः। सङ्ख्यारेखाद्वयं स्वीकुर्वन्तु। $X'X$, Y'Y इति नाम्ना कथयन्तु। $X'X$ रेखां तिर्यक् स्थापयन्तु {आकृतिः 3.7(a)}। तस्यां सङ्ख्याः लिखन्तु यथा सङ्ख्यारेखायां लिखन्ति। वयं Y'Y रेखायाम् अपि समानकार्यं कुर्मः। Y'Y ऊर्ध्वम् अस्ति, तिर्यक् नास्ति इत्यत्र भिद्यते {आकृतिः 3.7(b)}



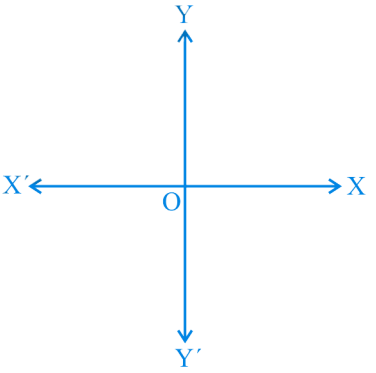
आकृतिः 3.7

द्वे अपि रेखे यथा परस्परं मूलबिन्दौ सङ्क्रमणं कुरुतः तथा संयोजयतु (3.8 आकृति)। $X'X$ इति तिर्यक्-रेखा x अक्षः इत्युच्यते। Y'Y इति तिर्यक्-रेखा Y अक्षः इत्युच्यते। यस्मिन् बिन्दौ $X'X$, Y'Y परस्परं सङ्क्रमणं कुरुतः सः बिन्दुः **मूलबिन्दुः** इत्युच्यते। सः च '0' इत्यनेन सूच्यते। धनसङ्ख्याः 'OX, OY' इत्यनयोः दिशोः सन्ति इत्यतः OX इति x अक्षस्य, OY इति च Y-अक्षस्य धनदिक् इत्युच्येते। तथैव OX', OY' च क्रमशः x अक्षस्य तथा Y अक्षस्य ऋणदिक् इत्युच्यते।

भवन्तः अवलोकयन्तु यत् एतौ अक्षौ तलं चतुर्धा विभजतः। एते चत्वारः भागाः **चतुर्थकाः** इति कथ्यन्ते। तथा I, II, III, IV इति क्रमेण OX रेखायाः घटी-विलोमक्रमेण सूच्यन्ते (3.9 आकृतिं पश्यन्तु)। अतः तले अक्षाः, चतुर्थांशाः च सन्ति। एतं तलं कार्टिसन्-तलम् अथवा निर्देशाङ्कीयतलम् अथवा xyतलम् इति कथयामः। अक्षाः तु निर्देशाङ्क- अक्षाः इति उच्यन्ते।

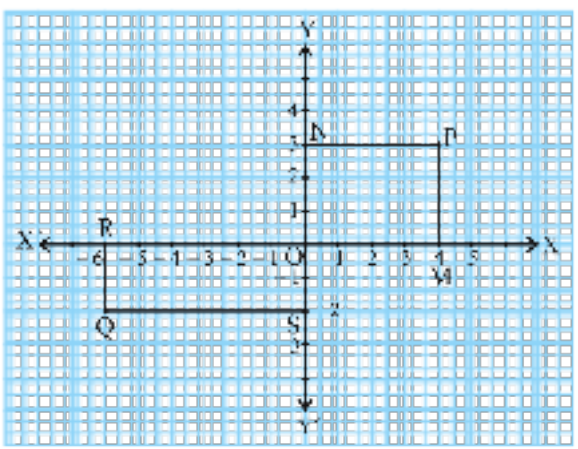


आकृतिः 3.8



आकृतिः 3.9

इदानीं पश्यामः यत् एषा पद्धतिः किमर्थं गणितस्य आधारभूता , कथम् उपयुक्ता च अस्ति इति । अधोदत्ताम् आकृतिं पश्यन्तु यत्र अक्षौ आलेखीयपत्रे(gr*a*ph) चित्रितौ स्तः। इदानीं अक्षेभ्यः P बिन्दोः Q बिन्दोः च दूरं कियत् इति पश्यामः। एतदर्थं PM इति x-अक्षतः समालम्बरेखां, तथा PN इति Y-अक्षतः समालम्बरेखां चित्रयामः। तथैव 3.10 चित्रे यथा दर्शितं तथा QR, QS समालम्बरेखे चित्रयामः।



आकृतिः 3.10

वयं पश्यामः यत् –

(i) Y-अक्षतः P इति बिन्दोः समालम्बदूरं x अक्षस्य धनदिशि मापयामः। तत्तु PN = OM = 4

मात्रकाणि।

(ii) x अक्षतः P इति बिन्दोः समालम्बदूरं Y अक्षस्य धनदिशि मापयामः। तत्तु PM = ON = 3 मात्रकाणि।

(iii) Y अक्षतः Q इति बिन्दोः समालम्बदूरं x अक्षस्य ऋणदिशि मापयामः। तत्तु OR = SQ = 6 मात्रकाणि।

(iv) x अक्षतः P इति बिन्दोः समालम्बदूरं Y अक्षस्य ऋणदिशि मापयामः। तत्तु OS = RQ = 2 मात्रकाणि।

इदानीम् एतानि दूराणि उपयुज्य सम्भ्रमं विना बिन्दून् कथं विवरितुं शक्नुमः। बिन्दूनां निर्देशम् अधोदत्तरूढीभिः लिखामः।

(i) कस्यचन बिन्दोः x निर्देशः नाम, y-अक्षतः विद्यमानः समलम्बदूरः यः x अक्षानुदिशं मापितः भवति। (x अक्षस्य धनदिशि धनसङ्ख्याः भवन्ति तथा ऋणदिशि ऋणसङ्ख्याः भवन्ति)। अत्र तु P इति बिन्दोः सः + 4, Q बिन्दोः च 6 अस्ति। x अक्षः भुजः इत्यपि उच्यते।

(ii) कस्यचन बिन्दोः y निर्देशः नाम, x अक्षतः विद्यमानः समलम्बदूरः यत् y-अक्षानुदिशं मापितः भवति। (y अक्षस्य धनदिशि धनसङ्ख्याः भवन्ति तथा ऋणदिशि ऋणसङ्ख्याः भवन्ति)। अत्र, P इति बिन्दोः सः + 3, Q बिन्दोः च - 2 अस्ति। Y- अक्षः **कोटिः** इत्यपि उच्यते।

(iii) निर्देशाङ्कतले बिन्दोः निर्देशाङ्कनसमये x निर्देशः आदौ, y-निर्देशः ततः परं च सूचनीयः। निर्देशम् आवरणे स्थापयामः।

अतः P बिन्दोः निर्देशः (4, 3) तथा Q-बिन्दोः निर्देशः (- 6, - 2)

अवगच्छन्तु यत् निर्देशः कञ्चन बिन्दुं तले अद्वियीयरूपेण निर्दिशति। (3, 4) इति निर्देशः (4, 3) इत्यनेन समः नास्ति।

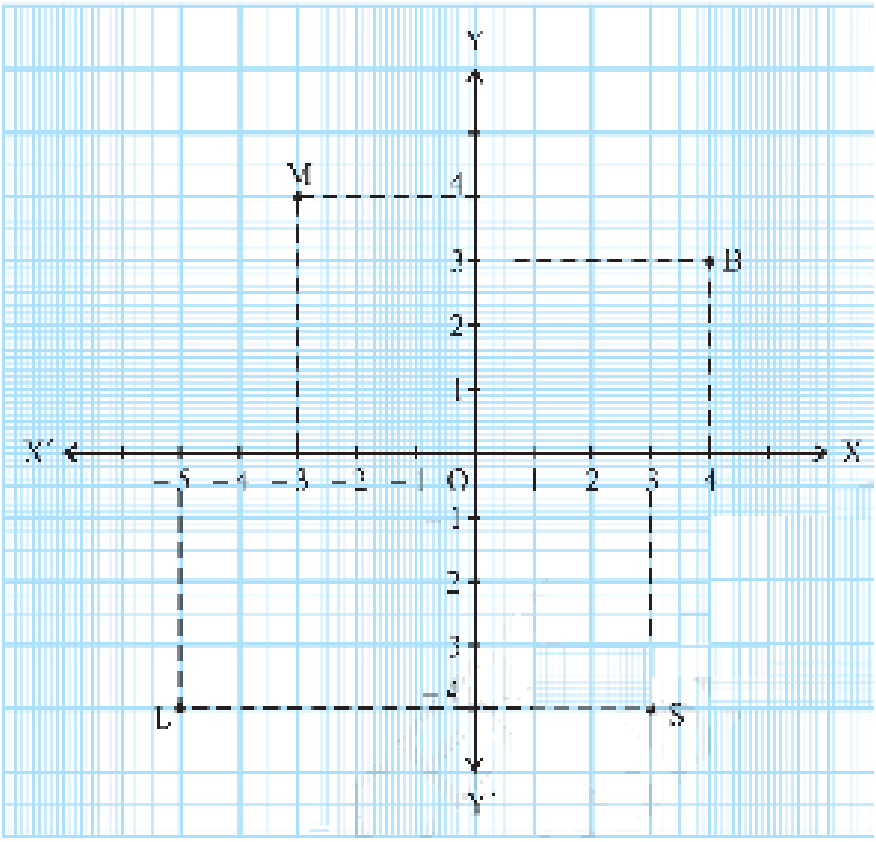
उदाहरणम् 1 : 3.11 आकृतिं दृष्ट्वा अधोदत्तवाक्यानि पूरयन्तु –

(i) B इति बिन्दोः भुजः तथा कोटिः क्रमशः ..... तथा .....। अतः B -बिन्दोः निर्देशः ..... भवति।

(ii) M इति बिन्दोः भुजः तथा कोटिः क्रमशः ..... तथा .....। अतः M-बिन्दोः निर्देशः ..... भवति।

(iii) L इति बिन्दोः भुजः तथा कोटिः क्रमशः ..... तथा .....। अतः L-बिन्दोः निर्देशः ..... भवति।

(iv) S इति बिन्दोः भुजः तथा कोटिः क्रमशः ..... तथा .....। अतः S-बिन्दोः निर्देशः ..... भवति।



आकृतिः 3.11

समाधानम् (i) यतः B इति बिन्दोः y -अक्षतः दूरं 4 मात्रकाणि, B बिन्दोः x - निर्देशः अथवा भुजः 4 इति उच्यते। B बिन्दोः x -अक्षतः दूरं 3 मात्रकाणि, अतः B बिन्दोः Y-निर्देशः अथवा कोटिः 3 इत्युच्यते। B बिन्दोः निर्देशः (4, 3). प्रथम-उदाहरणवत्।

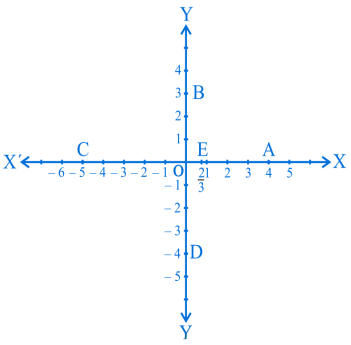
(ii) M इति बिन्दोः x -निर्देशः तथा y- निर्देशः क्रमशः -3 तथा 4. अतः M इति बिन्दोः निर्देशः (-3, 4)

(iii) L इति बिन्दोः x -निर्देशः तथा y - निर्देशः क्रमशः -5 तथा -4. अतः L इति बिन्दोः निर्देशः(-5,-4)

(iv) S इति बिन्दोः x -निर्देशः तथा y निर्देशः क्रमशः 3 तथा -4. अतः M इति बिन्दोः निर्देशः (3,-4)

उदाहरणम् 2 : 3.12 आकृत्यां दर्शितानां, अक्षयोः उपरि अङ्कितानां बिन्दूनां निर्देशाङ्कान् लिखन्तु।

समाधानम् : भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् –



(i) A इति बिन्दुः y-अक्षतः 4 मात्रकदूरे, x अक्षतः शून्यदूरे च अस्ति। अतः A इति बिन्दोः x निर्देशः 4, y निर्देशः 0. अतः A इति बिन्दोः निर्देशः (4, 0).

(ii) B इति बिन्दोः निर्देशः (0, 3). किमर्थम् ?

(iii) C इति बिन्दोः निर्देशः (-5, 0). किमर्थम् ?

(iv) D इति बिन्दोः निर्देशः (0, -4). किमर्थम् ?

(v) E इति बिन्दोः निर्देशः $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. किमर्थम् ?

यतः x -अक्षे विद्यमानाः सर्वे बिन्दवः x -अक्षतः शून्यदूरे सन्ति, अतः x -अक्षे विद्यमानानां सर्वेषां बिन्दूनां y - निर्देशः 0 भवति। तेन कारणेन x -अक्षे विद्यमानस्य कस्यचन बिन्दोः निर्देशः $(x, 0)$ -यत्र x तु y अक्षतः बिन्दुपर्यन्तं विद्यमानं दूरं सूचयति। तथैव y –अक्षे विद्यमानस्य कस्यचन बिन्दोः निर्देशः (0, y) इति भवति | अत्र y इत्येतत् x -अक्षतः बिन्दुपर्यन्तं विद्यमानं दूरं सूचयति। किमर्थम् ?

मूलबिन्दुः 'o' इत्यस्य निर्देशः कौ ? अक्षद्वयतः मूलबिन्दोः तु दूरं शून्यम् एव। अतः मूलबिन्दोः भुजः कोटिः च शून्यमेव भवति। मूलबिन्दोः निर्देशः (0,0) भवतः।

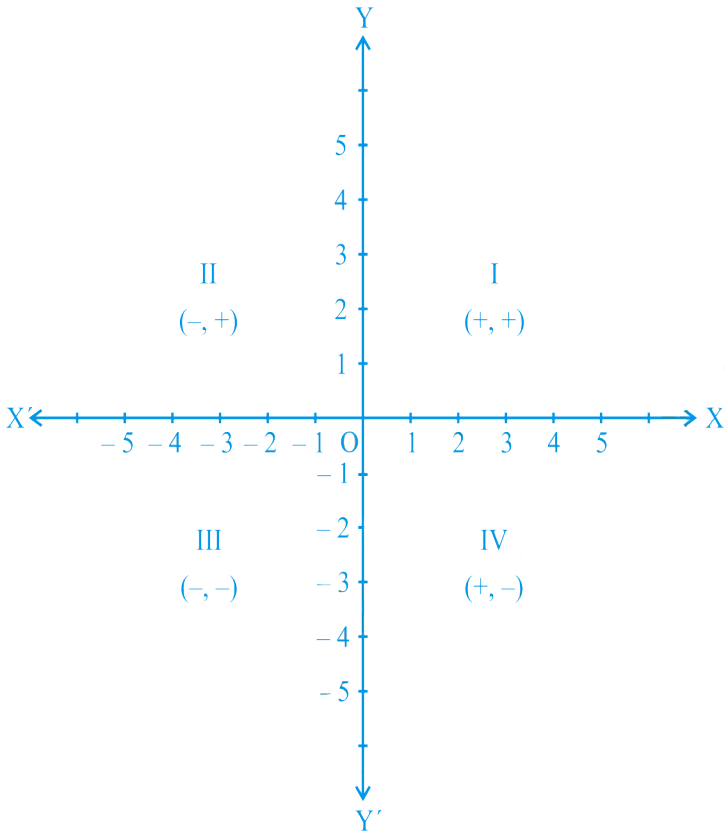
उपरिदत्त-उदाहरणेभ्यः भवन्तः अधोदत्तप्रकारेण बिन्दुनिर्देशाङ्क-चिह्नानां तथा बिन्दोः चतुर्थांशस्य च मध्ये कञ्चन सम्बन्धम् अवलोकितवन्तः।

(i) यदि कश्चन बिन्दुः प्रथमे चतुर्थांशे अस्ति , तर्हि सः बिन्दुः (+, +) इति स्वरूपे भवति। यतः प्रथम-चतुर्थांशौ धन-x,y अक्षाभ्याम् आवृतः अस्ति।

(ii) यदि कश्चन बिन्दुः द्वितीये चतुर्थांशे अस्ति , तर्हि सः बिन्दुः (-, +) इति स्वरूपे भवति। यतः द्वितीय-चतुर्थांशौ ऋण- x अक्षेण, तथा धन-y अक्षेण च आवृतः अस्ति।

(iii) यदि कश्चन बिन्दुः तृतीये चतुर्थांशे अस्ति , तर्हि सः बिन्दुः (-, -) इति स्वरूपे भवति। यतः तृतीयप्रथम-चतुर्थांशौ ऋण-x,y अक्षाभ्याम् आवृतः अस्ति।

(iv) यदि कश्चन बिन्दुः चतुर्थे चतुर्थांशे अस्ति , तर्हि सः बिन्दुः (+, -) इति स्वरूपे भवति। यतः चतुर्थ-चतुर्थांशौ धन- x अक्षेण तथा ऋण y अक्षेण च आवृतः अस्ति। (3.13 आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 3.13

टिप्पणी : कस्मिंश्चित् तले कस्यचन बिन्दोः विवरणं कर्तुं यां पद्धतिं चर्चितवन्तः सा पद्धतिः समग्रे विश्वे अङ्गीकृता काचित् रूढिः एव । आदौ कोटिः ततः परं भुजः इत्यपि लेखितुं शक्यते । किन्तु समग्रे विश्वे एषा पद्धतिः एव अवलम्ब्यते इति कारणेन वयमपि एतां पद्धतिं सम्भ्रमं निवारयितुं विवृतवन्तः।

प्रश्नावलिः 3.2

1. अधोदत्तप्रश्नानां उत्तराणि लिखत –
   (i) कार्टिसन्-तले स्थाननिर्धारणार्थं रच्यमाणयोः तिर्यक्-ऊर्ध्व-रेखयोः नाम किम् ?
   (ii) एताभिः रेखाभिः निर्मितानां तलस्य प्रत्येकं भागानां नाम किम् ?
   (iii) यत्र द्वे रेखे प्रतिच्छेदं कुरुतः तस्य बिन्दोः नाम लिखत
2. 3.14 आकृतिं दृष्ट्वा अधोदत्तानि लिखत –
   (i) B इति बिन्दोः निर्देशः
   (ii) C बिन्दोः निर्देशः
   (iii) -3,-5 इति निर्देशाङ्काभ्याम् अभिज्ञातं बिन्दुं लिखत

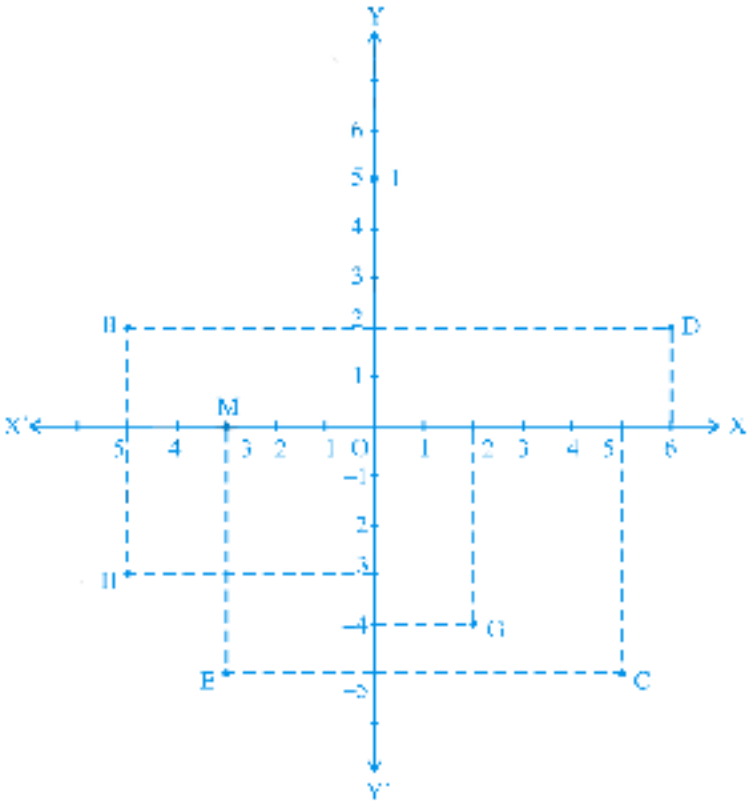
(iv) 2, -4 इति निर्देशाङ्काभ्याम् अभिज्ञातं बिन्दुं लिखत

(v) D बिन्दोः भुजः

(vi) H बिन्दोः कोटिः

(vii) L बिन्दोः निर्देशः

(viii) M बिन्दोः निर्देशः

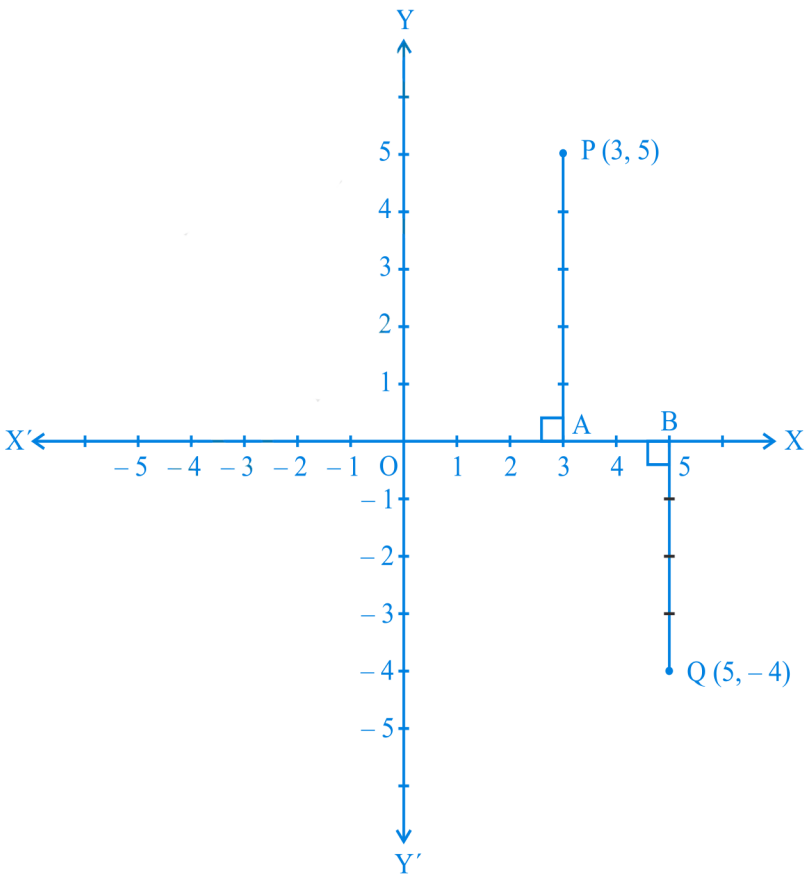


आकृतिः 3.14

3.3 तले दत्तनिर्देशस्य बिन्दोः आलेखनम्

एतावत्पर्यन्तं बिन्दूनाम् आलेखनं कृत्वा निर्देशः सूचयन्तु इति उक्तम्। इदानीं तले यदि निर्देशः ज्ञातौ स्तः, तर्हि बिन्दूनाम् आलेखनं कथं करणीयम् इति दर्शयामः। एतां प्रक्रियां 'बिन्दु-आलेखनम्' इति कथयामः।

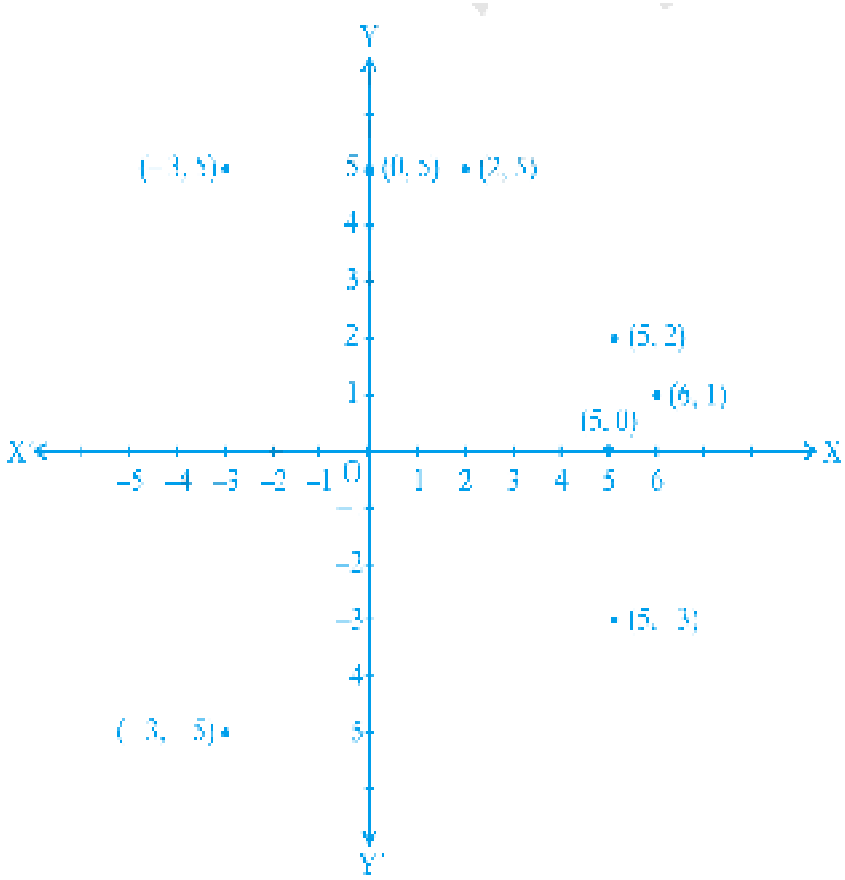
(3, 5) इति कस्यचन बिन्दोः निर्देशः भवताम् । एषः बिन्दुः निर्देशाङ्कनतले आलेखनीयः। आदौ अक्षौ चित्रयित्वा उचित-मात्रकं चिनुमः, यथा उभयोः अक्षयोः अपि 1cm मितिः एकमात्रकं सूचयति । (3, 5) इति बिन्दोः निर्देशः वदतः यत् x -अक्षानुदिशम् अस्य बिन्दो y -अक्षतः दूरम् त्रिमात्रकाणि, तथा y -अक्षानुगुणं x -अक्षतः अस्य बिन्दोः दूरं 5 मात्रकाणि । मूलबिन्दुम् आरभ्य x -अक्षे 3 मात्रकाणि गणयामः, तं बिन्दुम् A इति अङ्कयामः । इदानीम् A आरभ्य y -अक्षानुदिशं धनदिशि चलित्वा 5 मात्रकाणि गणयामः। तं बिन्दुं P इति अङ्कयामः (3.15 आकृतिं पश्यन्तु)। भवन्तः पश्यन्ति यत् P इति बिन्दोः y -अक्षतः 3 मात्रकाणि तथा x -अक्षतः 5 मात्रकाणि दूरम् इति । अतः अस्य बिन्दोः P एव स्थानम् । अत्र अवगच्छन्तु यत् P बिन्दोः निर्देशाङ्कद्वयम् अपि धनम् इति कारणेन P बिन्दुः प्रथम-चतुर्थांशे अस्ति । तथैव भवन्तः निर्देशाङ्कतले Q (5, -4) इत्यस्य बिन्दोः आलेखं कर्तुं शक्नुवन्ति । ऋण- y अक्षानुदिशं x -अक्षतः Q इति बिन्दोः दूरम् 4 मात्रकाणि, अस्य y - निर्देशः -4. (3.5 आकृतिं पश्यन्तु) Q बिन्दुः चतुर्थ-चतुर्थके अस्ति । किमर्थम् ?



आकृतिः 3.15

उदाहरणम् 3 : कार्टिसन्-तले (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (-3, 5), (-3, -5), (5, -3), (6, 1) एतान् बिन्दून् अवस्थापयन्तु।

समाधानम् 1cm मितम् = 1 मात्रकम् इति स्वीकृत्य xy अक्षयोः चित्राङ्कनं कुर्मः। बिन्दूनां स्थानानि 3.16 आकृत्यां चिह्नितानि सन्ति।



आकृतिः 3.16

टिप्पणी : उपरितने उदाहरणे भवन्तः पश्यन्ति यत् (5, 0) तथा (0,5) समानस्थाने न स्तः इति। तथैव (5, 2) तथा (2, 5) भिन्नस्थानेषु स्तः इति। अपि च (-3, 5) तथा (5, -3) भिन्नस्थानेषु स्तः। बहूनि उदाहरणानि स्वीकृत्य पश्यामः चेत् भवन्तः पश्यन्ति यत् यदि $x \neq y$, तर्हि (x, y) इत्यस्य स्थानं कार्टिसन्-तले (y, x) इत्यस्मात् स्थानात् भिन्नम् अस्ति। अतः यदि (x, y) इत्यनयोः निर्देशस्य अन्तर्विनिमयं कुर्मः तर्हि (y, x) इत्यस्य स्थानम् (x, y) इत्यस्मात् स्थानात् भिन्नं भवति। इतः ज्ञायते यत् (x, y) इति निर्देशस्य अङ्कने x, y इत्यनयोः क्रमः महत्त्वपूर्णः इति। अतः (x, y) क्रमितयुग्मः इति उच्यते। क्रमितयुग्मः $(x, y) \neq$ क्रमितयुग्मः (y, x) यदि $x \neq y$। अपि च $(x, y) = (y, x)$ यदि $x = y$.

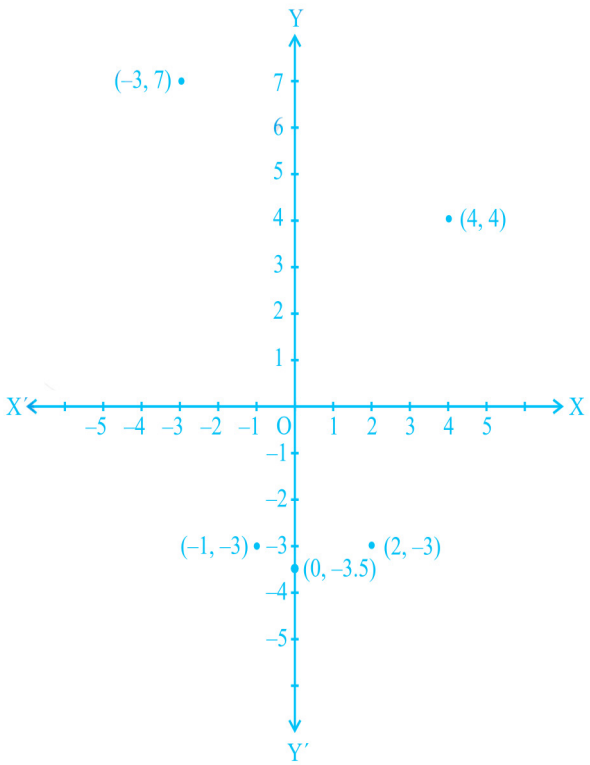
उदाहरणम् 4 :

अधोदत्तान् क्रमितयुग्मान् कार्टिसन्-तले आलेखयन्तु –

1cm मितम् = 1 मात्रम् इति उभयाक्षयोः उपयोगं कुरुत।

X	-3	0	-1	4	2
Y	7	-3.5	-3	4	-3

समाधानम् कोष्ठके दत्त-सङ्ख्यानां युग्मः (-3, 7), (0, -3 5), (-1, -3), (4, 4), (2, -3) इति एतैः सूचयितुं शक्यते। बिन्दूनाम् अवस्थापनानि 3.17 आकृत्यां दर्शितानि सन्ति।



आकृतिः 3.17

द्वितीयाभ्यासः द्वयोः जयनोः क्रीडा (आवश्यकता: पटलद्वयम् अथवा नाणकद्वयम्, आलेखीयचित्रम्, भिन्नवर्णयोः अक्षद्वयम् – उदाहरणार्थम् – रक्तं हरितं च इति)

प्रतिनानाङ्कम् अपि (0, 0) इति बिन्दौ स्थापयतु। स्पर्धालुः अक्षद्वयम् अपि युगपत् क्षिपेत्। उदाहरणार्थम् - यदा प्रथमस्पर्धालुः क्षिपति तदा रक्ताक्षः 3 इति दर्शयति, तथा हरिताक्षः 1 इति दर्शयति इति चिन्तयन्तु। तदा सा स्पर्धालुः स्वपटलम् (3, 1) इति बिन्दुं प्रति नयति। तथैव द्वितीयस्पर्धालुः रक्ताक्षे 2 इति

क्षिपति, हरिताक्षे 4 इति, तदा सा स्वपटलं (2, 4) इति बिन्दुं प्रति नयति । द्वितीयक्षेपणे यदा प्रथमस्पर्धालुः रक्ताक्षे 1, हरिताक्षे 4 इति क्षिपति तदा सा स्वपटलं (3, 1) इति बिन्दुतः (3 + 1, 1 + 4), इति बिन्दुं प्रति नयति - अर्थात् x निर्देशाङ्केन सह एकस्य योजनम्, y निर्देशाङ्केन सह चतुर्णां योजनम् ।

अस्याः क्रीडायाः उद्देशः तु अतिगमनं विना प्रथमतया (10, 10) बिन्दुप्राप्तिः – अर्थात् – भुजः अथवा कोटिः 10 इति सङ्ख्यायाः अधिकं न स्याताम् । अपि च एकस्मिन् एव स्थाने पटलद्वयस्य अपि स्थापनं न स्यात् । उदाहरणार्थम् – प्रथमस्पर्धालोः पटलं पूर्वप्राप्तस्य द्वितीयस्पर्धालोः पटलस्य स्थानं प्राप्नुयात् चेत्, द्वितीयस्पर्धालोः पटलं मूलबिन्दुं प्रति गच्छेत् । यदि अतिगमनं विना चलनं न शक्यते तर्हि सा स्पर्धालुः तं पर्यायं त्यजेत् । भवन्तः एतां क्रीडां बहुभिः मित्रैः सह यथा क्रीडितुं शक्नुवन्ति तथा विस्तारयितुं शक्नुवन्ति ।

टिप्पणी : कार्टिसन्-तले बिन्दूनाम् आलेखनं तु देशकालयोःआलेखनं, भुजपरिध्योः आलेखनम् इत्यादि-सन्दर्भैः सह कार्टिसन्-तले बिन्दूनाम् आलेखनं तोलयितुं शक्यते । भवन्तः एतेषां विषये पूर्वतनकक्ष्यासु अधीतवन्तः। एतेषु सन्दर्भेषु xy -अक्षयोः स्थाने अक्षान् t -अक्षेण, d -अक्षेण, s -अक्षेण p -अक्षेण वा निर्देष्टुं शक्नुमः।

प्रश्नावलिः – 3.3

1. कस्मिन् चतुर्थके अथवा कस्मिन् अक्षे एते बिन्दवः- (-2, 4), (3, -1), (-1, 0), (1, 2), (-3, -5) सन्ति ? कार्टिसन्-तले एतानि बिन्दून् अवस्थाप्य स्व-उत्तराणि परिशीलयन्तु ।
2. अधोदत्तकोष्ठकस्थान् (x, y) इति बिन्दून् तले आलेखयन्तु । अक्षेषु विद्यमानानां दूराणाम् उचितमात्रकाणि चिन्वन्तु ।

X	-2	-1	0	1	3
Y	8	7	-1.25	3	-1

3.4 - सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तांशान् अधीतवन्तः –

1. कस्मिंश्चित् तले कस्यचित् वस्तुनः स्थानस्य अथवा बिन्दोः अवस्थापनार्थं द्वयोः समालम्बरेखयोः आवश्यकता अस्ति । तयोः एका तिर्यक् स्यात् अपरा च ऊर्ध्वा स्यात् ।
2. तलं तु कार्टिसन्-तलम् अथवा निर्देशाङ्कीय-तलम् इति कथयामः। तथा रेखाः तु निर्देशाङ्काक्षौ इति कथयामः।
3. तिर्यग्रेखा x -अक्षः इति कथ्यते, ऊर्ध्वरेखा च y -अक्षः इति कथ्यते ।
4. निर्देशाङ्काक्षौ तलं चतुर्धा विभजतः – तत्र प्रत्येकं भागः चतुर्थकः इति कथ्यते ।
5. अक्षयोः प्रतिच्छेदबिन्दुः मूलबिन्दुः इति कथ्यते ।
6. कस्यचित् बिन्दोः y -अक्षतः विद्यमानं दूरं x -निर्देशः अथवा भुजः इति उच्यते । बिन्दोः x -अक्षतः

विद्यमानं दूरम् y -निर्देशः अथवा कोटिः इति उच्यते।

7. बिन्दोः भुजः x, कोटिः y इति स्वीकुर्मः चेत् तर्हि (x, y) एतौ बिन्दोः निर्देशः स्तः।

8. x -अक्षे बिन्दोः निर्देशः $(x, 0)$ इत्यस्मिन् स्वरूपे भवति, y -अक्षे च $(0, y)$ इत्यस्मिन् स्वरूपे भवति।

9. मूलबिन्दोः निर्देशः (0,0)

10. प्रथम-चतुर्थांशे बिन्दोः निर्देशः (+, +) इत्यस्मिन् स्वरूपे भवतः, द्वितीयचतुर्थांशे (-, +), तृतीयचतुर्थांशे (-, -) तथा चतुर्थचतुर्थांशे (+, -) इत्यस्मिन् स्वरूपे भवतः, यत्र + इति धनवास्तविकसङ्ख्यां सूचयति, - इति ऋणवास्तविकसङ्ख्यां सूचयति।

11. यदि $x \neq y$ तर्हि $(x, y) \neq (y, x)$। तथा $(x, y) = (y, x)$ यदि $x = y$

अध्याय: 4

चरद्वययुक्तं रैखिकसमीकरणम्

The principal use of the Analaytic Art is to bring Mathematical problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be .
(विश्लेषणकलायाः प्रधानप्रयोजनं तु गणितीयसमस्यानां समीकरणरूपेण परिवर्तनं, पुनः तेषाम् सरलरीत्या अभिव्यक्तिः च।)

एड्वर्ड् हेली

4.1 - प्रस्तावना

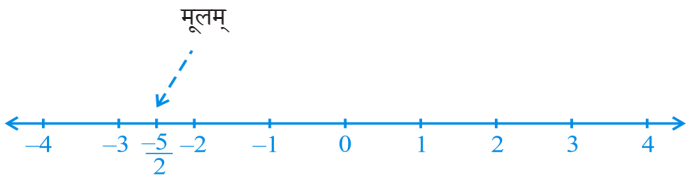
पूर्वतनवर्गेषु भवन्तः एकचरयुक्तं रैखिकसमीकरणं पठितवन्तः। किं भवन्तः एकचरयुक्तं रैखिकसमीकरणं लेखितुं शक्नुवन्ति ? $x+1=0, x+\sqrt{2}=0$, तथा $\sqrt{2}\,y+\sqrt{3}=0$, इत्यादयः एकचरयुतानां रैखिकसमीकरणानाम् उदाहरणानि इति भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति । ईदृशसमीकरणानाम् एकमेव अद्वितीयं समाधानम् अस्ति इति भवन्तः जानीयुः । समीकरणस्य समाधानं सङ्ख्यारेखायां प्रतिनिधीयते इति भवन्तः जानीयुः। अस्मिन् अध्याये एकचरयुतस्य रैखिकसमीकरणस्य ज्ञानं स्मृत्वा अग्रे तत् चरद्वयं प्रति विस्तारयामः। भवन्तः ईदृशान् प्रश्नान् चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यथा - चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य समाधानम् अस्ति वा ? यदि अस्ति तत् अद्वितीयं वा इति ? कार्टिसन्-समतले अस्य समाधानं कीदृशं दृश्यते ? भवन्तः तृतीयाध्याये पठिताः अवधारणाः उपयुज्य एतेषां प्रश्नानाम् उत्तराणि दातुम् अर्हन्ति ।

4.2 रैखिकसमीकरणानि

आदौ पूर्वं पठितविषयान् पुनः स्मरामः। अधोदत्तं समीकरणम् अवलोकयन्तु –

$$2x+5=0$$

अस्य समाधानम् – अर्थात् अस्य समीकरणस्य मूलं तु - $\frac{5}{2}$ अस्ति । सङ्ख्यारेखायाम् अधोदत्तप्रकारेण एतस्य मूलस्य प्रातिनिध्यं कर्तुं शक्नुमः।



आकृतिः 4.1

समीकरणस्य समाधानसमये अधोदत्तांशाः स्मरणीयाः।

रैखिकसमीकरणस्य समाधानं तदा दूषितं न भवति, यदा –

(i) समानसङ्ख्या समीकरणस्य उभयपक्षयोः अपि सङ्कलितं वा व्यवकलितं वा भवति।

(ii) समीकरणस्य उभयपक्षे अपि समानया शून्येतरसङ्ख्यया गुणनं वा विभजनं वा क्रियते।

इदानीम् एतं सन्दर्भं चिन्तयन्तु –

नागपुरे भारतश्रीलङ्कयोः मध्ये प्रचलिते एकदिन-अन्तर्देशीय-क्रिकेट्-स्पर्धायां द्वौ भारतीय-पट्टिकाधरौ 176 अङ्कान् अर्जितवन्तौ। एतद्विषयं समीकरणरूपेणं प्रकटयतु।

अत्र पश्यन्ति चेत् द्वयोः अपि वैयक्तिम् अर्जनं न ज्ञायते। अर्थात् – अत्र द्वे अव्यक्तराशी स्तः। तौ वयं x, y चेति वदामः। तयोः एकेन अर्जिताः अङ्काः x इति, अपरेण अर्जिताः अङ्काः y इति च भवतु। वयं जानीमः यत् –

$$x + y = 176$$

इति वाञ्छितं समीकरणम्।

एतत् चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य एकम् उदाहरणम्। अत्र ईदृशे समीकरणे चराणां सूचना तु x, y द्वारा क्रियते इति रूढीबद्धविधिः अस्ति। किन्तु अन्याक्षराणि अपि उपयोक्तुं शक्यन्ते। चरद्वययुतानां रैखिकसमीकरणानाम् अन्यानि कानिचन उदाहरणानि –

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9,\ 3 = \sqrt{2}\,x\ - 7y$$

एतानि समीकरणानि एवमपि लेखितुं शक्नुमः –

$$`2s + 3t - 5 = 0,\ p + 4q - 7 = 0,\ \pi u + 5v - 9 = 0\ ,\ \sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$$

अतः यत् समीकरणं $ax + by + c = 0$ इति रूपेण लेखितुं शक्यते, तत् चरद्वययुतं रैखिकसमीकरणम् इति उच्यते - यत्र a, b, c वास्तविकसङ्ख्याः सन्ति, तथा a, b शून्येतरौ, । भवन्तः ईदृशानि अनेकसमीकरणानि चिन्तयितुं शक्नुवन्ति।

उदाहरणम् 1 : अधोदत्तानि प्रत्येकं समीकरणानि $ax + by + c = 0$ इति रूपेण लिखित्वा प्रतिस्थिति a, b, c इति चराणां मानानि सूचयतु।

(i) $x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$, (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = 4y$

समाधानम् (i) $2x + 3y = 4.37$ इति समीकरणं $2x + 3y - 4.37 = 0$ इति लेखितुं शक्यते। अत्र $a = 2$, $b = 3$, $c = -4.37$

(ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$; इति समीकरणं $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ इति लेखितुं शक्यते। अत्र $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = -4$

(iii) $4 = 5x - 3y$ इति समीकरणं $5x - 3y - 4 = 0$ इति लेखितुं शक्यते। अत्र $a = 5$, $b = -3$, $c = -4$. एतत् समीकरणम् $-5x + 3y + 4 = 0$ इति अपि लेखितुं शक्ये इति भवन्तः अङ्गीकुर्वन्ति वा? अत्र $a = -5$, $b = 3$, $c = 4$

(iv) $2x = 4y$ इति समीकरणम् $2x - y + 0 = 0$ इति अपि लेखितुं शक्यते। अत्र $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$

$ax + b = 0$ इत्येवंप्रकारकसमीकरणानि अपि चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य उदाहरणानि सन्ति। यतो हि तेषां प्रकटनम् एवं कर्तुं शक्यते। $ax + 0y + b = 0$

उदाहरणार्थं $4 - 3x = 0$ इति समीकरणम् $-3x + 0y + 4 = 0$ इति लेखितुं शक्यते।

उदाहरणम् 2 : अत्र दत्तं प्रत्येकमपि चरद्वयसमीकरणरूपेण लिखतु –

(i) $x = -5$; (ii) $y = 2$; (iii) $2x = 3$; (iv) $5y = 2$

समाधानम् : (i) $x = -5$ इति समीकरणम् $1x + 0y = -5$ अथवा $1x + 0y + 5 = 0$ इति लेखितुं शक्यते।

(ii) $y = 2$ इति समीकरणम् $0x + 1y = 2$ अथवा $0x + 1y - 2 = 0$ इति लेखितुं शक्यते।

(iii) $2x = 3$ इति समीकरणम् $2x + 0y - 3 = 0$ इति लेखितुं शक्यते।

(iv) $5y = 2$ इति समीकरणम् $0x + 5y - 2 = 0$ इति लेखितुं शक्यते।

प्रश्नावलिः 4.1

1. कस्यचन टिप्पणीपुस्तकस्य मूल्यं लेखन्याः मूल्यस्य अपेक्षया द्विगुणितम् अस्ति। एतत् वाक्यं चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य रूपेण प्रकटयन्तु (टिप्पणिपुस्तकस्य मूल्यम् x -रूप्यकाणि, लेखन्याः च y -रूप्यकाणि इति स्वीकरोतु)।

2. अधोदत्त-रैखिकसमीकरणानि $ax + by + c = 0$ इति रूपेण प्रकटयन्तु, तथा a, b, c इत्यादीन् मानानि सूचयन्तु।

(i) $2x + 3y = 9.35$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

(v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 रैखिकसमीकरणस्य समाधानम्

भवन्तः दृष्टवन्तः यत् एकचरस्य प्रत्येकं समीकरणस्य अपि किञ्चन अद्वितीयं समाधानम् अस्ति। भवन्तः चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य समाधानस्य विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति? अस्मिन् समीकरणे चरद्वयम् अस्ति इति कारणेन समाधानम् अपि मानयोः युगलं स्यात्। एकं तु x इत्यस्य मानः, अपरं तु y इत्यस्य मानः यौ दत्तं समीकरणं परिपूरयतः।

$2x + 3y = 12$ इति किञ्चन समीकरणं चिन्तयामः। अत्र $x = 3$, $y = 2$ इति समाधानम्। यतः $x = 3$ तथा $y = 2$ इति च समीकरणे कल्पयन्ति चेत्

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

एतत् समाधानं (3, 2) इति क्रमितयुग्मरूपेण लेखितुं शक्नुमः। आदौ x इत्यस्य मानं लिखित्वा तत्परम् y इत्यस्य मानं लिखामः। तथैव, (0, 4) इति युग्मम् अपि उपरितनस्य समीकरणस्य समाधानम् असित।

किन्तु, (1, 4) इति युग्मम् $2x + 3y = 12$ इत्यस्य समीकरणस्य समाधानं नास्ति, यतः अस्मिन् समीकरणे $x = 1$, $y = 4$ इत्यनयोः कल्पनेन $2x + 3y = 14$ इति भवति, न तु 12 इति। अपि च (0, 4) इति एव समाधानं, न तु (4, 0) इत्येतत् अवलोकयन्तु।

भवन्तः $2x + 3y = 12$ इत्यस्य समीकरणस्य (3, 2) तथा (0, 4) इति समाधानद्वयं दृष्टवन्तः। भवन्तः अन्यत् किमपि समाधानम् अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति वा? (6, 0) इति युग्मम् अपि अन्यत् किञ्चन समाधानम् इति अङ्गीकुर्वन्ति वा? अस्य सत्यत्वं परीक्षन्ताम्। वास्तविकतया वयम् अनेन प्रकारेण अन्यानि बहूनि समाधानानि प्राप्तुं शक्नुमः। स्वेच्छया x इत्यस्य कञ्चन मानं चिन्वन्तु। $2x + 3y = 12$ इति समीकरणे, $x = 2$ इति। तदा समीकरणं $4 + 3y = 12$ इति भवति। एतत् तु एकचरयुक्तं रैखिकसमीकरणम् अस्ति। अस्य समाधानेन $y = \frac{8}{3}$ इति प्राप्तुं शक्नुमः। अतः $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ इति युग्मं $2x + 3y = 12$ इति समीकरणस्य अन्यत् समाधानम् अस्ति। तथैव $x = -5$ इत्यस्य चयनेन समीकरणं तु $-10 + 3y = 12$ इति भवति। अनेन $y = \frac{22}{3}$ इति प्राप्तुं शक्नुमः। अत $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ इति युग्मम् अपि $2x + 3y = 12$ इत्यस्य समीकरणस्य अन्यत् समाधानम् अस्ति। अतः चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य विविधसमाधानानाम् परिधिः एव नास्ति। अर्थात् चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य अनन्तसमाधानानि सन्ति।

उदाहरणम् 3 : $x + 2y = 6$ इत्यस्य समीकरणस्य चत्वारि विविधसमाधानानि अन्विषन्तु।

समाधानम् : निरीक्षणेन $x = 2$, $y = 2$ इति एकं समाधानम्। यतः $x = 2$, $y = 2$ इत्येतस्य कृते समीकरणं तु $x + 2y = 2 + 4 = 6$ इति भवति। इदानीं $x = 0$ इति चिनोतु। अनेन x इत्यस्य मानेन, दत्तं समीकरणं $2y = 6$ इति भवति। समीकरणस्य $y = 3$ इति अद्वितीयं समाधानम् इति अस्ति। अतः $x = 0$, $y = 3$ इत्येतत् $x + 2y = 6$ इत्यस्य अन्यत् समाधानम् अस्ति। तथैव $y = 0$ इति स्वीक्रियते चेत् दत्तं समीकरणम् $x = 6$ इति भवति। अतः $x = 6$, $y = 0$ इत्येतदपि $x + 2y = 6$ इत्यस्य समाधानं भवति। अन्ते $y = 1$ इति स्वीकुर्मः। तदा, दत्तं समीकरणं $x + 2 = 6$ इति भवति। अस्य समाधानं $x = 4$ इति उच्यते। अतः (4, 1) इति अपि दत्तस्य समीकरणस्य समाधानम् अस्ति। अतः दत्तसमीकरणस्य अनन्तसमाधानेषु चत्वारि समाधानानि एवं सन्ति –

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0), (4, 1)$$

टिप्पणी : समाधानं प्राप्तुं सरलमार्गः तु $x = 0$ इति स्वीकृत्य तत्सङ्गतस्य y इत्यस्य मानप्राप्तिः। तथैव $y = 0$ इति स्वीकृत्य तत्सङ्गतस्य x इत्यस्य मानप्राप्तिः।

उदाहरणम् 4 : अधोदत्तेषु प्रत्येकं समीकरणस्य समाधानद्वयम् अन्विषन्तु –

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

समाधानम् : (i) $x = 0$ इति स्वीकृत्य $3y = 12$ इति प्राप्नुमः। अर्थात् $y = 4$. अतः (0, 4) इति अस्य समीकरणस्य एकं समाधानम् अस्ति। तथैव $y = 0$ इति स्वीक्रियते चेत् $x = 3$ इति प्राप्यते। अतः (3, 0) इत्यपि अपरं समाधानम्।

(ii) $x = 0$ इति स्वीकृत्य $5y = 0$ अर्थात् $y = 0$. अतः अस्य समीकरणस्य (0, 0) इति एकं समाधानम् अस्ति।

इदानीं $y = 0$ इति स्वीक्रियते चेत् (0, 0) इत्येव समाधानं प्राप्नुमः। एतत्तु पूर्वतनसमाधानस्य समानम् अस्ति। अन्यत् समाधानं प्राप्तुं $x = 1$ इति स्वीकरोतु। अग्रे तत्सङ्गतस्य y इत्यस्य मानं $-\frac{2}{5}$ इति भवति। अतः $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ इति एतद् अपि $2x + 5y = 0$ इत्यस्य समीकरणस्य अन्यत् समाधानम् अस्ति।

(iii) $3y + 4 = 0$ इति समीकरणम् $0.x + 3y + 4 = 0$ इति लेखनेन x इत्यस्य यत्किमपि मानं स्यात्, $y = -\frac{4}{3}$ इति प्राप्यते। अतः समीकरणस्य समाधानद्वयं तु $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ तथा $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$

प्रश्नावलिः 4.2

1. एषु विकल्पेषु किं सत्यम्, किमर्थम् इति च वदतु।
$y = 3x + 5$ इत्यस्य
(i) अद्वितीयं समाधानम् वर्तते (ii) समाधानद्वयम् एव वर्तते (iii) अनन्तसमाधानानि सन्ति।

2. प्रत्येकं समीकरणस्य चत्वारि समाधानानि लिखत –
(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. $x - 2y = 4$, इत्यस्य समीकरणस्य अत्र दत्तविकल्पेषु, कानि समाधानानि, कानि च न इति परिशीलयत –
(i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0) (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) (1, 1)

4. यदि $2x + 3y = k$ इत्यस्य समीकरणस्य $x = 2$, $y = 1$ इति समाधानम् अस्ति, तर्हि k इत्यस्य मानं वदत।

4.4 चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य आलेखः

एतावत्पर्यन्तं बीजगणितीयपद्धत्या चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य समाधानानि प्राप्तवन्तः। इदानीं ज्यामितीयपद्धत्या पश्यामः। ईदृशस्य प्रत्येकं समीकरणस्य अनन्तसमाधानानि सन्ति इति भवन्तः जानन्ति। एतानि समाधानानि निर्देशाङ्कसमतले कथं दर्शयामः? भवन्तः कांश्चन बिन्दून् अवगतवन्तः स्युः येषां समाधानं मानयुग्मरूपेण प्रकटयामः।

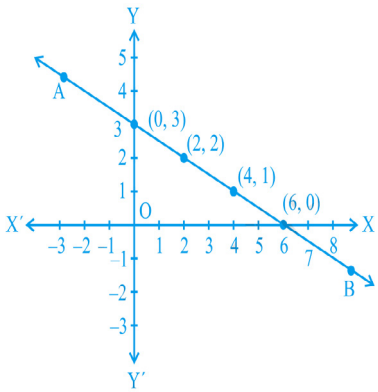
$$x + 2y = 6 \qquad (1)$$

इति समीकरणं कोष्टकद्वारा प्रकटयितुं शक्नुमः। तत्र y इत्यस्य मानानि x इत्यस्य मानानाम् अधः लिखामः।

प्रथमं कोष्ठकम्

x	0	2	4	6	....
y	3	2	1	0	....

पूर्वतने अध्याये बिन्दून् आलेखपत्रे अङ्कयितुं ज्ञातवन्तः। इदानीम् आलेखपत्रे (0, 3) (2, 2) (4, 1) (6, 0) इति बिन्दूनाम् अङ्कनं कुर्मः। पुनः एषु बिन्दुषु कयोश्चित् द्वयोः बिन्द्वोः योजनेन एकां रेखां प्राप्नुवन्तु। अस्याः रेखायाः नाम AB इति स्थापयामः। (4.2 आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 4.2

अन्यबिन्दुद्वयम् अपि AB इति रेखायाम् एव स्तः इति भवन्तः पश्यन्ति किम् ? इदानीं रेखायाम् (8, -1) इति अन्यं बिन्दुं चिन्वन्तु। एतत् समाधानं किम् ? वस्तुतः $8 + 2(-1) = 6$ अतः (8, -1) इति एकं समाधानम् अस्ति। AB रेखायाम् अन्यं कञ्चन बिन्दुं चित्वा तस्य निर्देशाङ्कौ समीकरणं सम्पूरयति वा न वा इति परिशीलयन्तु। इदानीं AB इति रेखायाम् अविद्यमानं कञ्चन बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। यथा (2, 0) अस्य निर्देशाङ्कौ समीकरणं पुरयतः किम् ? भवन्तः परिशीलयन्ति चेत् जानन्ति यत् तौ समीकरणं न परिपूरयतः इति।

इदानीम् अस्माकम् अवलोकनानाम् आवलिं कुर्मः –

1. प्रत्येकं बिन्दुः यस्य निर्देशाङ्कौ प्रथमं समीकरणं(1) पूरयतः, सः AB इति रेखायाम् एव अस्ति।
2. AB इति रेखायां प्रत्येकं बिन्दुः (a, b) प्रथमसमीकरणस्य $x = a$, $y = b$ इति समाधानं यच्छति।
3. AB इति रेखायाम् अविद्यमानः कश्चन बिन्दुः प्रथमसमीकरणस्य समाधानं नास्ति।

अतः भवन्तः एतं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुवन्ति यत् रेखायां विद्यमानः प्रत्येकं बिन्दुः तं समीकरणं परिपूरयति, तथा समीकरणस्य प्रत्येकं समाधानं तस्यां रेखायां कश्चन बिन्दुः भवति इति। वस्तुतः चरद्वययुतं रैखिकसमीकरणं तु कयाचित् रेखया ज्यामितीयरीत्या प्रकटयितुं शक्यते इति। एतस्यां रेखायां विद्यमान-बिन्दूनां सङ्ग्रहः एव समीकरणस्य समाधानानि भविष्यन्ति। एतदेव रैखिकसमीकरणस्य आलेखचित्रम् इति उच्यते। अतः चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य आलेखचित्रं प्राप्तुं रेखायां समीकरणस्य समाधानसङ्गतं बिन्दुद्वयस्य अङ्कनं कृत्वा, तत् बिन्दुद्वयं रेखया योजयामः चेत् पर्याप्तम्। किन्तु बिन्दुद्वयस्य अपि अपेक्षया बिन्दूनाम् अङ्कनम् एव उचितं यतो हि भवन्तः झटिति आलेखचित्रस्य साधुत्वं परिशीलयितुं शक्नुवन्ति।

टिप्पणी : $ax + by + c = 0$ इति एकघातस्य बहुपदसमीकरणं रैखिकसमीकरणम् इति उच्यते, यतो हि तस्य ज्यामितीय-प्रकटनं तु ऋजुरेखाद्वारा भवति।

उदाहरणम् 5 :(1, 2) इति बिन्दुः दत्तः, अस्य बिन्दोः रेखायाः समीकरणम् अन्विष्यत। तादृशानि कति समीकरणानि सन्ति ?

समाधानम् : अत्र (1, 2) रैखिकसमीकरणस्य एकं समाधानम् अस्ति यत् भवतः अपेक्षितं समाधानम् अस्ति। अतः भवन्तः (1, 2) इति बिन्दोः द्वारा गम्यमानायाः कस्याश्चन रेखायाः अन्वेषणं कुर्वन्तः सन्ति। तादृशस्य रैखिकसमीकरणस्य एकम् उदाहरणं तु $x + y = 3$ इति। अन्यानि उदाहरणाति तु $y - x = 1$, $y = 2x$, यतो हि एते समीकरणे अपि (1, 2) इति बिन्दोः निर्देशाङ्कैः द्वारा सम्पूरिते भवतः। वस्तुतः एतादृशानि अनन्तरैखिकसमीकरणानि सन्ति यानि (1, 2) इति बिन्दोः निर्देशाङ्कैः परिपूरितानि सन्ति। किम् एतत् भवद्भिः चित्ररूपेण द्रष्टुं शक्यते?

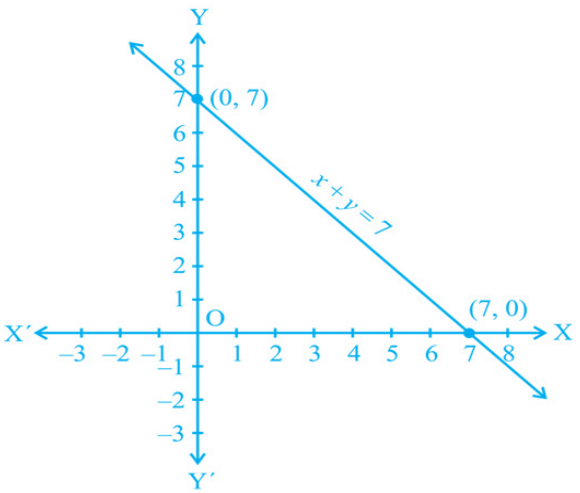
उदाहरणम् 6 : $x + y = 7$ इत्यस्य आलेखीयचित्रं लिखत।

समाधानम् : आलेखस्य चित्राङ्कनं कर्तुम् अस्माकं समीपे न्यूनातिन्यूनं समीकरणस्य समाधानद्वयं स्यात्। भवन्तः $x = 0$, $y = 7$ तथा $x = 7$, $y = 0$ उभे अपि दत्तसमीकरणस्य समाधाने भवतः। अतः भवन्तः अधोदत्तकोष्ठकम् आलेखचित्राङ्कनार्थम् उपयोक्तुं शक्नुवन्ति।

द्वितीयं कोष्ठकम्

X	0	7
Y	7	0

द्वितीयकोष्ठकतः बिन्दुद्वयम् अङ्कयित्वा आलेखचित्रं लिखामः। अग्रे बिन्दुद्वयम् अपि रेखया योजयामः। (4.3 आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 4.3

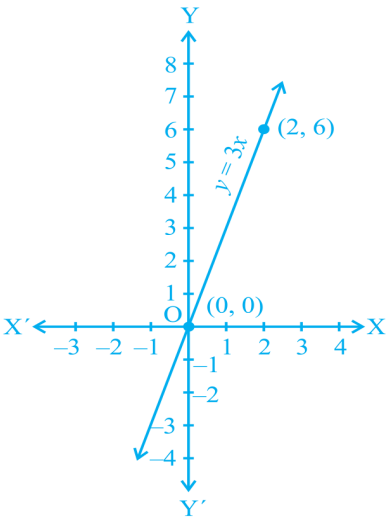
उदाहरणम् 7 : भवन्तः जानन्ति यत् कस्मिंश्चित् वस्तुनि प्रयुज्यमानं बलं तु तस्मिन् उत्पद्यमानस्य वेगोत्कर्षस्य साक्षात्समनुपातिकम् अस्ति। एतां स्थितिं प्रकटयितुं किञ्चन समीकरणं लिखित्वा तस्य आलेखचित्राङ्कनं कुरुत।

समाधानम् : अत्र विद्यमानं चरद्वयं तु एकं बलम्, अन्यत् त्वरणम् इति । अतः प्रयुज्यमानस्य बलस्य y -मात्रकाणि, तथा वेगोत्कर्षस्य x -मात्रकाणि इति चिन्तयामः। अनुपात-समानुपाततः भवन्तः एतत् तथ्यं

$$y = kx$$

इति समीकरणद्वारा प्रकटयितुं शक्नुवन्ति, यत्र k इति अचरः अस्ति (विज्ञानस्य अध्ययनात् भवन्तः जानीयुः यत् k इति अचरः तु वस्तुनः द्रव्यमानम् अस्ति इति)।

इदानीं k इत्यस्य मानं किम् इति न जानीमः इति कारणात् $y = k$ इत्यस्य समीकरणस्य सङ्क्षिप्तम् आलेखं कुर्मः। किन्तु k इत्यस्य किमपि मानं दत्तं चेत् एव आलेखस्य चित्राङ्कनं कर्तुं शक्यते। $k = 3$ इति स्वीकुर्मः, अर्थात् $y = 3x$ इत्यस्य प्रकटनरूपेण रेखां चित्रयामः । एतदर्थम् अस्य समीकरणस्य समाधानद्वयम् अन्विषामः, यथा (0, 0), (2, 6) इति। (4.4आकृतिं पश्यतु)



आकृतिः 4.4

आलेखचित्रतः भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् त्रि-मात्रक-बलं प्रयुज्यते चेत् एकमात्रकः वेगोत्कर्षः भवति। अपि च पश्यन्तु यत् (0, 0) इति बिन्दुः आलेखे अस्ति। अर्थात् - यदा प्रयुज्यमानं बलं 0 -मात्रकम् अस्ति तदा उत्पादितः वेगोत्कर्षः 0 -मात्रकवान् ।

टिप्पणी : $Y = kx$ इति समीकरणस्य आलेखचित्रं काचन रेखा भवति या सर्वदा मूलबिन्दुद्वारा गच्छति।

उदाहरणम् 8 : 4.5 आकृत्यां दत्तस्य प्रत्येकम् आलेखचित्रस्य कृते अधोदत्तेभ्यः विकल्पेभ्यः आलेखचित्रानुगुणम् उचितं समीकरणं चिनुत।

(a) 4.5 (i) आकृतेः कृते

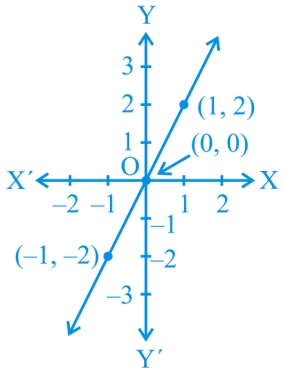
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

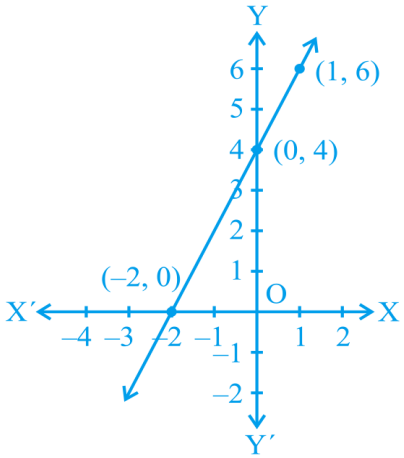
(b) 4.5 (ii) आकृतेः कृते

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

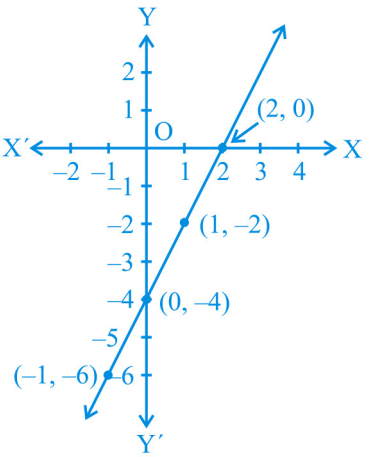
(c) 4.5 (iii) आकृतेः कृते

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$





(ii)



(iii)

आकृतिः 4.5

समाधानम् : (*a*) 4.5 (i) आकृत्यां रेखायां विद्यमानाः बिन्दवः तु (-1, -2), (0, 0), (1, 2) इति । निरीक्षणेन ज्ञायते यत् $y = 2x$ इति समीकरणम् अस्य आलेखचित्रेण सङ्गतम् इति । भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् प्रत्येकस्याम् अपि स्थित्याम् y -निर्देशाङ्कः x -निर्देशाङ्कस्य द्विगुणितः अस्ति ।

(b) 4.5 (ii) आकृत्यां रेखायां विद्यमानाः बिन्दवः (-2, 0), (0, 4), (1, 6) इति । भवन्तः जानीयुः – अस्य आलेखचित्रस्य बिन्दूनां निर्देशाङ्काः $y = 2x + 4$ इति समीकरणस्य सङ्गताः भवन्ति । अतः $y = 2x + 4$ इति समीकरणं 4.5(ii) आकृतेः अलेखचित्रेण सङ्गतम् अस्ति इति ।

(C) 4.5 (Iii) आकृत्यां रेखायां विद्यमानाः बिन्दवः तु (-1, -6), (0, -4), (1, -2), (2, 0) इति । निरीक्षणेन ज्ञायते यत् $y = 2x - 4$ इति समीकरणं दत्तालेखचित्रस्य रेखया सङ्गतम् अस्ति ।

प्रश्नावलिः – 4.3

1. अधोदत्तस्य प्रत्येकं चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य आलेखचित्रं कुरुत।
   (i) $x + y = 4$, (ii) $x - y = 2$, (iii) $y = 3x$, (iv) $3 = 2x + y$
2. (2, 14) इत्यस्य बिन्दोः द्वारा गम्यमानयोः द्वयोः रेखयोः समीकरणे लिखन्तु। अत्र इतोऽपि एवं कति रेखाः सन्ति, कथम्?
3. (3, 4) इति बिन्दुः $3y = ax + 7$ इत्यस्य समीकरणस्य आलेखचित्रे अस्ति चेत् a इत्यस्य मानम् अन्विषतु
4. कस्मिंश्चित् नगरे भाटक-कार्-यानस्य शुल्कानि एवं सन्ति – प्रथम-किलोमीटर्-कृते – 8/- रूप्यकाणि, तथा अनुगतप्रतिकिलोमीटर्-दूरस्य 5/- रूप्यकाणि इति। प्रयातं दूरं x -किलोमीटर्-मितम् इति स्वीकृत्य, तथा पूर्णं शुल्कं y -रूप्यकाणि इति च स्वीकृत्य अस्याः सूचनायाः कृते किञ्चन समीकरणं लिखित्वा आलेखचित्रं कुरुत।
5. अधोदत्त-विकल्पेभ्यः 4.6 तथा 4.7 आकृत्योः दत्त-आलेखचित्राणुगुनं समीकरणं चिन्तयत।

4.6 आकृतेः कृते –

(i) $y = x$

(ii) $x + y = 0$

(iii) $y = 2x$

(iv) $2 + 3y = 7x$

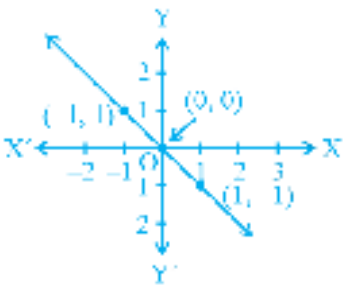
4.7 आकृतेः कृते –

(i) $y = x + 2$

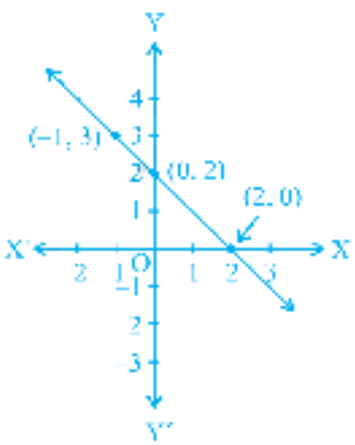
(ii) $y = x - 2$

(iii) $y = -x + 2$

(iv) $x + 2y = 6$



आकृतिः4.6,



आकृतिः4.7

6. स्थिरबलप्रयोगेन वस्तुनि कृतं कार्यं तु वस्तुना प्रयातस्य दूरस्य समाने अनुपाते अस्ति। एतां सूचनाम् चरद्वययुतस्य समीकरणस्य रूपेण प्रकटयन्तु, तथा स्थिरबलं तु पञ्चमात्रकाणि इति स्वीकृत्य अस्य आलेखचित्रं कुर्वन्तु। अपि च यदा वस्तुना प्रयातं दूरं

   (i) 2 मात्रकम् (ii) 0 मात्रकम्

तदा कृतं कार्यम् अपि आलेखचित्रम् उपयुज्य पठन्तु ।

7. यामिनी तथा फातिमा इति कस्यचित् विद्यालयस्य नवमकक्ष्यायाः छात्रद्वयं मिलित्वा प्रधानमन्त्रि-सहायनिधि-निमित्तं भूकम्पपीडितेभ्यः शतं रूप्यकाणि दत्तवत्यौ । अस्य दत्तांशस्य अनुगुणम् एकं रैखिकसमीकरणं लिखत (भवन्तः तयोः वैयक्तिकदानं x रूप्यकाणि तथा y रूप्यकाणि इति स्वीकर्तुं शक्नुवन्ति) । अस्य समीकरणस्य आलेखचित्रम् अपि कुरुत।

8. युएस्ए(US*A*) तथा केनडा(C*ana*d*a*) इत्यादिषु देशेषु तापमानस्य मापनं फ़्यारन्हीट्(F*ar*henheit)इति मानेन कुर्वन्ति। किन्तु भारतादि-देशेषु सेल्षियस्(Celcius) इति मानेन कुर्वन्ति । फ़्यारन्हीट्(F*ar*henheit)-मानतः सेल्षियस्(Celcius) मानं प्रति रूपान्तरं कर्तुम् अत्र किञ्चन रैखिकसमीकरणम् अस्ति।

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) उपरि विद्यमानस्य रेखिकसमीकरणस्य आलेखचित्रणं करोतु यस्मिन् x -अक्षः celcius मानः, तथा y -अक्षः f*ar*henheit मानः भवतु ।

(ii) यदि तापमानं 30^0C -मितं भवति, तर्हि ^{0}F-माने तस्य तापमानं किं भवति ?

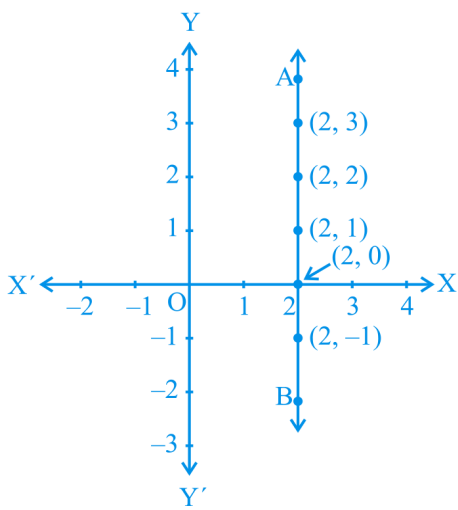
(iii) यदि तापमानं 95^0F मितं भवति, तर्हि ^{0}C -माने तस्य तापमानं किं भवति ?

(iv) यदि तापमानं 0^0C मितं भवति तर्हि ^{0}F-माने तस्य तापमानं किं भवति ? तथा, यदि तापमानं 0^0F मितं भवति तर्हि ^{0}C -माने तस्य तापमानं किं भवति ?

(v) तादृशं तापमानं किं यस्य ^{0}C, ^{0}F इत्यनयोः सांख्यिक-समानता स्यात् ?

4.5 x -अक्षस्य, y -अक्षस्य च समान्तररेखानां समीकरणानि।

भवन्तः अधीतवन्तः यत् कार्टिसन्-समतले दत्तस्य बिन्दोः निर्देशाङ्काः कथं लेखनीयाः इति। भवन्तः जानन्ति किं यत् कार्टिसन्-समतले (2, 0) (-3, 0), (4, 0), (n, 0) [यत्र n काचित् वास्तविकसङ्ख्या] कुत्र भवन्ति इति? आम्, ते सर्वे x-अक्षे भवन्ति। किन्तु किमर्थम् इति जानन्ति किम् ? यतो हि x-अक्षे प्रत्येकं बिन्दोः y-निर्देशाङ्कः 0 भवति। वस्तुतः x-अक्षे प्रत्येकं बिन्दोः रूपम् अपि (x, 0) इति भवति । इदानीं x-अक्षस्य समीकरणम् अनुमातुं शक्नुवन्ति किम् ? तत्तु $y = 0$ इत्यनेन द्वारा निर्दिश्यते । अवगच्छन्तु यत् $y = 0$ इति $0.x + 1y = 0$ इति प्रकटयितुं शक्यते । तथैव अवलोकयतु यत् y-अक्षस्य समीकरणम् $x = 0$ इत्यनेन निर्दिश्यते ।



आकृतिः 4.8

इदानीं $x - 2 = 0$ समीकरणं स्वीकरोतु। यदि एतत् एकचर-समीकरणम् इति स्वीक्रियते तर्हि अस्य सङ्ख्यारेखायां $x = 2$ इति किञ्चन अद्वितीयं समाधानं प्राप्यते। किन्तु चरद्वययुतं समीकरणम् इति यदा स्वीक्रियते तदा $x + 0.y - 2 = 0$ इति प्रकटयितुं शक्यते। अस्य अनन्तसमाधानानि सन्ति। वस्तुतः एतेषां सर्वेषामपि स्वरूपं तु (2, r) इति, यत्र r काचित् वास्तविकसङ्ख्या अस्ति। अपि च भवन्तः परिशीलयितुं शक्नुवन्ति यत् (2, r) इति रूपम् अस्य समीकरणस्य समाधानम् अस्ति। अतः चरद्वययुतं समीकरणं $x - 2 = 0$ आलेखचित्रे AB इति रेखाद्वारा प्रकटयितुं शक्यते।

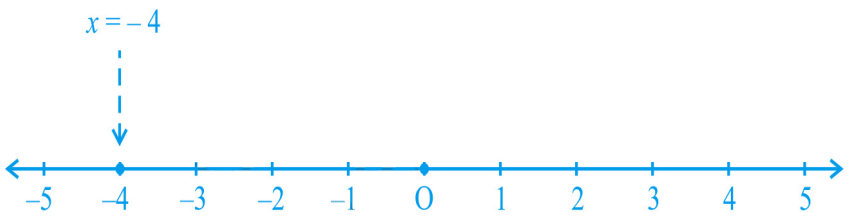
उदाहरणम् 9 : $2x + 1 = x - 3$ इत्यस्य समीकरणस्य समाधानं कृत्वा तानि समाधानानि – (i) सङ्ख्यारेखायां, (ii) कार्टिसन्-तले प्रकटयतु।

समाधानम् : $2x + 1 = x - 3$ इत्यस्य समाधानं कृत्वा

$2x - x = -3 - 1$

अर्थात् $x = -4$ इति प्राप्नुमः।

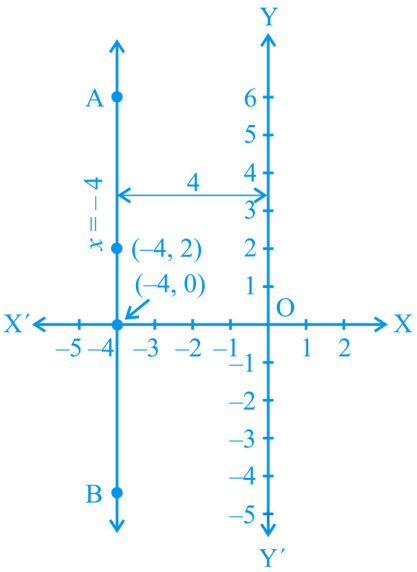
(i) 4.9 आकृत्यां सङ्ख्यारेखायाम् अस्य समाधानस्य प्रकटनं दर्शितम् अस्ति, यत्र $x = -4$ इति समीकरणम् एकचरसमीकरणम् इति स्वीकृतम् अस्ति।



आकृतिः 4.9

(ii) वयं जानीमः यत् $x = -4$ इति समीकरणम् $x + 0.y = -4$ इति लेखितुं शक्यति। एतत्तु x, y इति चरयोः रैखिकसमीकरणम् अस्ति। एतस्य प्रकटनं रेखाद्वारा क्रियते। इदानीं सर्वेपि y -मानाः अनुमताः, यतः $0.y$ सदा 0 भवति। किन्तु x -मानं तु $x = -4$ इति समीकरणस्य अनुगुणं स्यात्। अतः दत्तसमीकरणस्य समाधानं तु $x = -4$, $y = 0$, तथा $x = -4$, $y = 2$ इति।

अत्र पश्यन्तु यत् AB इति आलेखचित्रं y -अक्षस्य समान्तरम् अस्ति। तथा वामतः चतुर्मात्रकमिते दूरे अस्ति। (4.10 आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 4.10

तथैव भवन्तः x -अक्षस्य समान्तरणं काञ्चन रेखां प्राप्तुं शक्नुवन्ति या अधोदत्तसमीकरणेन सङ्गता भवति। $y = 3$, अथवा $0.x + 1.y = 3$

प्रश्नावलिः – 4.4

1. (i) एकचरे, (ii) चरद्वये

$y = 3$ इत्यस्य समीकरणस्य ज्यामितीय-प्रकटनं कुर्वन्तु।

2. (i) एकचरे, (ii) चरद्वये

$2x + 9 = 0$ इत्यस्य समीकरणस्य ज्यामितीय-प्रकटनं कुर्वन्तु।

4.6 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्त-बिन्दून् पठितवन्तः –

1. समीकरणम् $ax + by + c = 0$ यत्र a, b, c वास्तविकसङ्ख्याः तथा a, b शून्येतरे स्तः। एतादृशं समीकरणं चरद्वययुतं रैखिकसमीकरणम् इति उच्यते।
2. चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य अनन्तसमाधानानि सन्ति।
3. चरद्वययुतस्य प्रत्येकं रैखिकसमीकरणस्य आलेखचित्रं तु ऋजुरेखा भवति।
4. $x = 0$ इति y-अक्षस्य समीकरणम्, तथा $y = 0$ इति x -अक्षस्य समीकरणम्।
5. $x = a$ इत्यस्य समीकरणस्य आलेखचित्रणम् y -अक्षस्य समान्तरं भवति।
6. तथैव $y = a$ इत्यस्य समीकरणस्य आलेखचित्रणम् x -अक्षस्य समान्तरं भवति।

7. $y = mx$ इति समीकरणविशेषः मूलबिन्दुद्वारा गम्यमानां रेखां सूचयति।

8. चरद्वययुतस्य रैखिकसमीकरणस्य आलेखचित्रे विद्यमानः प्रत्येकं बिन्दुः अपि तस्य रैखिकसमीकरणस्य समाधानं भवति । अपि च रैखिकसमीकरणस्य प्रत्येकं समाधानं तु रैखिकसमीकरणस्य आलेखचित्रे बिन्दुः भवति।

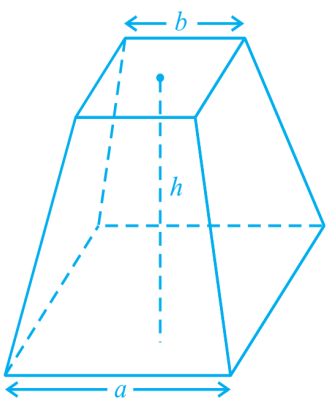
अध्यायः 5

यूक्लिडीय-ज्यामितेः परिचयः

5.1 - प्रस्तावना

ज्यामितिः इति पदम् 'ज्या नाम भूमिः, मितिः नाम मापनम्' इत्येतयोः योगेन जातम्। भूखण्डस्य मापनादिव्यावहारनिमित्तात् ज्यामितिः उत्पन्ना अस्ति। गणितस्य एषा शाखा बह्वीषु प्राचीनसभ्यतासु प्रचलिता आसीत्। ईजिप्ट्, बेबिलोनिया, चीनः, भारतम्, यवनदेशः, इन्कास्-देशः इत्यादिषु देशेषु अधीयाना च आसीत्। एतासां सभ्यतानां जनाः बह्व्यः व्यावहारिकसमस्याः अभिमुखीकुर्वन्तः, तासां समाधानार्थं ज्यामितेः विकासं बहुप्रकारेण कृतवन्तः।

उदाहरणार्थं यदा यदा नैल्-नदी अतिप्रवहति, तदा तदा सा नैकानां भूखण्डस्वामिनां संलग्नक्षेत्राणां सीमाः नाशयति स्म। एतदर्थम् ईजिप्टीयाः सामान्य-विस्तीर्णानि गणयितुं तथा सामान्य-निर्माणानि कर्तुं बहूनि ज्यामितीयतन्त्राणि विकसितवन्तः। धान्यभाण्डागारस्य घनफलं प्राप्तुम्, कुल्यानां शुण्डाकारस्तम्भानां च निर्माणार्थं प्रयुक्तवन्तः। भिन्नाग्र-शुण्डाकारस्तम्भ-घनं गणयितुमपि ते साधुसूत्रं ज्ञातवन्तः। भवन्तः जानन्ति यत् शुण्डाकारस्तम्भः काचित् दृढाकृतिः, यस्य आधारः तु त्रिभुजं, वर्गः अथवा अन्यत् किमपि बहुभुजं स्यात् इति, तस्य पार्श्वमुखानि च त्रिभुजानि भवेयुः - यानि उपरितनम् एकशृङ्गं प्रति संस्यन्दन्ते। अस्य अग्रभागः कर्तितः चेत् भिन्नाग्र-शुण्डाकारस्तम्भः प्राप्यते।



आकृतिः 5.1

भारतीय-उपद्वीपे मोहेन्जेदारो-हरप्पादीनि खननानि तु सिन्धुसभ्यता (प्रायः 3000 BCE मध्ये) ज्यामितेः विपुलप्रयोगम् अकरोत् इति दर्शयन्ति। स तु अत्यन्तं सुव्यवस्थितः समाजः आसीत्। नगराणि अपि सुविकसितानि तथा सस्यक् रचितानि आसन्। उदाहरणार्थम् – नगरस्य मार्गाः तु परस्परं समान्तराः आसन्। तथा सुरङ्गजलनिकासतन्त्रम् अपि आसीत्। गृहेषु अनेके नानाप्रकारप्रकोष्ठाः आसन्। एतैः विषयैः नागरिकाः

क्षेत्रगणिते, व्यावहारिक-अङ्कगणिते च निपुणाः आसन् इति द्योत्यते। निर्माणार्थम् उपयुक्ताः इष्टिकाः आपाकपक्वाः तथा तासां दैर्घ्य-वैशाल्य-गाढतानाम् अनुपातः 4 : 2 : 1 इति दृष्टम् अस्ति।

प्राचीने भारते शुल्बसूत्राणि (800-500BCE) एव ज्यामितीय-निर्माणार्थं सहकारि-पुस्तकानि आसन्। वैदिककालस्य ज्यामितेः मूलं तु वेदीनां निर्माणार्थं तथा वैदिककर्मानुष्ठानाय अग्निस्थापनार्थं च आसीत्। पवित्र-अग्नीनां संस्थापनं तु यदि प्रभावकारीसाधनाय भवेत् तर्हि तेषाम् आकारः विस्तीर्णं च उक्तनियमानुसारं भवेत्। वर्गाकार-वृत्ताकर-वेदीनाम् उपयोगः गृह्यकर्मणां कृते, आयत-त्रिभुज-समलम्ब-आकाराणां संयुक्तवेदीनाम् उपयोगः सामूहिककर्मार्थम् च भवति स्म। अथर्ववेदोक्ते श्रीयन्त्रे तु अन्तर्वीत-समद्विबाहु-त्रिभुजानि नव सन्ति। एतानि त्रिभुजानि एवं क्रमेण स्थापिताः यथा तेषु वयं त्रिचत्वारिंशत् गौणत्रिभुजानि द्रष्टुं शक्नुमः। यद्यपि पूर्वजाः वेदिनिर्माणार्थं परिशुद्धज्यामितीयपद्धतिं ज्ञातवन्तः तथापि तेषां पृष्ठतः विद्यमानसिद्धान्ताः न चर्चिताः।

एतानि उदाहरणानि द्योतयति यत् ज्यामितिः तु विश्वे सर्वत्र विकसिता प्रयुक्ता च आसीत् इति। किन्तु एतत् अव्यवस्थितरीत्या चलति स्म। प्राचीने विश्वे ज्यामितेः विषये रसकरः अंशः तु तस्याः विकासस्य पद्धतिः एकवंशतः अग्रिमवंशपर्यन्तं वाचिकपरम्परया ताडपत्रैः अन्यपद्धत्या वा प्राप्यमाना आसीत्। अपि च बाबिलोनियादिषु कासुचित् सभ्यतासु, भारते रोमदेशे च ज्यामितिः प्रयोगनिर्देशितशास्त्ररूपेण एव अवशिष्टा। ईजिप्ट-देशीयैः विकसितायां ज्यामित्यां तु फलवाक्यानि एव आसन्। किन्तु पद्धतेः सामान्यनियमाः न आसन्। वस्तुतः बेबिलोनियदेशीयाः तथा ईजिप्ट-देशीयाः तु व्यावहारिकप्रयोजनाय एव ज्यामितिं प्रयुक्तवन्तः। तस्याः व्यवस्थितविज्ञानरूपेण विकासार्थं तेषां योगदानम् अत्यल्पम्। किन्तु यवन(ग्रीक्)देशीयादि-सभ्यतासु तत्र निर्माणानि कथं प्रयुज्यन्ते इति तर्के एव अधिकावधानम् आसीत्। यवन(ग्रीक्)देशीयाः, तैः आविष्कृतानां वाक्यानां सत्यतायाः संस्थापने एव दत्तावधानाः आसन्। तदर्थं ते निगमनचिन्तनस्य प्रयोगं कृतवन्तः (प्रथमं परिशिष्टं पश्यन्तु)।

थेल्स् नाम कश्चन यवनगणितज्ञः प्रथमं गणितीय-उपपत्तिं दत्तवान् इति पुरस्क्रियते। कश्चन वृत्तः स्वस्य व्यासेन एव समद्विच्छिन्नं भवति इत्यस्य वाक्यस्य उपपत्तिं सः दत्तवान्। थेल्स्-महोदयस्य प्रसिद्धतमेषु शिष्येषु पैथागोरस् (572 BCE) अन्यतमः यस्य विषये एतावता भवन्तः श्रुतवन्तः एव स्युः। पैथागोरस् तथा तस्य गणः अनेकान् ज्यामितीय-गुणधर्मान् आविष्कृत्य ज्यामितीयसिद्धान्तम् व्यापकतया विकसितवन्तः। एषा प्रक्रिया 300 BCE वर्षपर्यन्तम् अनुवर्तमाना आसीत्। तदा ईजिप्ट-देशस्य अलेक्सान्ड्रिया-नगरीयः यूक्लिड् इति कश्चन गणिताध्यापकः ज्ञातान् गणितग्रन्थान् संगृह्य 'एलिमन्ट्' इति प्रसिद्धसंहितायां तान् ग्रन्थान् व्यवस्थापितवान्। सः एलिमन्ट्-ग्रन्थं त्रयोदश- अध्यायैः विभक्तवान्। एतैः पुस्तकैः सम्पूर्णविश्वस्य ज्यामितीय-ज्ञानविषये प्रजाः प्रभाविताः अभवन्।



थेल्स्
640 सा.यु.पू. -546 सा.यु.पू.
आकृतिः 5.2



यूक्लिड
640 सा.यु.पू. -546 सा.यु.पू.
आकृतिः 5.3

5.2 यूक्लिडस्य व्याख्याः, स्वयंसिद्धानि, आधारप्रतिज्ञाश्च

यूक्लिडीयकालस्य यवन (ग्रीक्) गणितज्ञाः तु ज्यामितिं स्वस्य समयस्य विश्वस्य सङ्क्षिप्त-प्रतिदर्शरूपेण दृष्टवन्तः । बिन्दुः, रेखा, समतलम् इत्यादीनाम् अभिप्रायान् तु स्वं परितः दृश्यमानात् विश्वात् ते व्युत्पादितवन्तः । अवकाशस्य तथा स्वं परितः विद्यमाने परिसरे घनाकृतीनां च अध्ययनेन, घनाकृतीनां विषये कञ्चन संक्षिप्त-ज्यामितीय-अभिप्रायं च ते विकसितवन्तः । कस्यचित् घनाकृतेः परिमाणम्, आकारः स्थानं च अस्ति, तथा ताम् एकस्मात् स्थानात् अन्यत् स्थानं प्रति चालयितुं शक्नुमः । घनाकृतीनां सीमावलयानि तलानि इति उच्यन्ते । ते अवकाशम् भागशः विभजन्ते । तेषां गाढता नास्ति इति उच्यते । तलानां सीमाः तु वक्राः अथवा ऋजुरेखाः भवन्ति । एताः रेखाः बिन्दौ पर्यवस्यन्ति । घनाकृतिभ्यः बिन्दुपर्यन्तं विद्यमानानि त्रीणि सोपानानि चिन्तयन्तु (घनाकृतयः – तलानि- रेखाः-बिन्दवः) । प्रतिसोपानम् एकं विस्तारं नश्यति, यस्य नाम विमा इति । अतः घनाकृतेः तिस्रः विमाः सन्ति, तलस्य द्वे, रेखायाः एका, तथा बिन्दोः नैकापि । यूक्लिडः एतानि वाक्यानि परिभाषारूपेण सङ्गृहीतवान् । एलिमन्ट्स् इति पुस्तके सः 23 परिभाषाणाम् आवलिकरणेन स्व- सिद्धान्तम् आरब्धवान् । तेषु कानिचन अधोदत्तानि सन्ति ।

1. कस्यचन **बिन्दोः** नैकोऽपि भागः भवति ।
2. कस्याश्चन **रेखायाः** विस्ताररहितदीर्घता अस्ति
3. रेखायाः **अन्ते बिन्दवः** भवन्ति ।
4. ऋजुरेखा नाम तादृशी रेखा या स्वस्य बिन्दुभिः समानरूपेण प्रसृता अस्ति ।
5. तलं नाम तत् यस्य दीर्घता, विशालता च अस्ति
6. तलस्य धाराः रेखाः भवन्ति ।
7. समतलं नाम तादृशं तलं यत् स्वस्य रेखाभिः समानरूपेण प्रसृतम् अस्ति ।

यदि भवन्तः एताः परिभाषाः अवधानेन पठन्ति तर्हि अवगच्छन्ति यत् भागः, विशालता, दीर्घता, समानता इत्यादीनि पारिभाषिकपदानि इतोऽपि स्पष्टतया वक्तव्यानि भवन्ति इति । उदाहरणार्थम् – बिन्दोः परिभाषां चिन्तयन्तु – अस्यां परिभाषायां 'भाग' शब्दः निर्वचनीयः। यदि भवन्तः 'भागः नाम सः यः किञ्चन क्षेत्रं व्याप्नोति' इति भागस्य निर्वचनं कुर्वन्ति, तर्हि 'क्षेत्र' शब्दः पुनः निर्वचनीयः भवति । अतः एकस्य विषयस्य निर्वचनं कर्तुम् अन्ये बहवः विषयाः अपि निर्वचनीयाः भवन्ति, येन अनन्तनिर्वचनशृङ्खलां प्राप्नुमः। एतैः कारणैः गणितज्ञाः कानिचन ज्यामितीयपदानि अनिर्वचनीयानि इति अङ्गीकुर्वन्ति। किन्तु बिन्दोः ज्यामितीय-सङ्कल्पनायाः विषये अस्माकम् आत्मस्फुरणं तु उपरितन-निर्वचनस्य अपेक्षया सम्यक् अवगमयति । अतः वयं बिन्दुं कणम् इति निर्दिशामः, यद्यपि कणस्य काचित् विमा भवति ।

उपरितने द्वितीये निर्वचने समाना समस्या उत्पन्ना भवति यतः तत् निर्वचनं दीर्घतां विशालतां च सूचयति, यौ अंशौ अनिर्वचनीयौ स्तः। अतः अध्ययनस्य कस्यचित् प्रकल्पस्य विकसने कानिचन पदानि अनिर्वचनीयानि इत्येव स्थापितानि । ज्यामित्यां बिन्दुं रेखां तलं च अनिर्वचनीयपदानि इत्येव स्वीकुर्मः। अत्र एकः एव विषयः यत् तानि पदानि आत्मस्फुरणेनैव प्रकटयितुं शक्नुमः अथवा भौतिकप्रतिदर्शैः विवरीतुं शक्नुमः।

पारिभाषिकपदैः आरभ्य, यूक्लिडः केचन गणधर्माः निरूपयितुं न शक्यन्ते इति परिकल्पितवान् । एतानि

परिकल्पनानि तु वस्तुतः सुस्पष्टवैश्विकसत्यानि एव। सः तानि परिकल्पनानि द्विधा विभक्तवान् - स्वयंसिद्धानि, आधारप्रतिज्ञाः चेति । सः ज्यामिति-केन्द्रित-परिकल्पनानाम् आधारप्रतिज्ञाः इति पदं दत्तवान् । सामान्य-अभिप्रायान् स्वयंसिद्धानि इति उक्तवान् । अर्थात् – तानि न केवलं ज्यामिति-केन्द्रितानि अपि तु सम्पूर्णगणितीयक्षेत्रेण सह सम्बद्धानि। स्वयंसिद्धानाम् आधारप्रतिज्ञानां च विषये ज्ञातुं प्रथमं परिशिष्टं पश्यन्तु।

युक्लिडीय-स्वयंसिद्धेषु कानिचन अधोदत्तानि।

(1) ये पदार्थाः समानपदार्थैः सह समानाः, ते परस्परं समानाः भवन्ति।

(2) यदि समानाः समानैः सह योजिताः तर्हि तेषां पूर्णाः अपि समानाः भवन्ति।

(3) यदि समानाः समानेभ्यः विकलिताः तर्हि शेषफलानि अपि समानानि भवन्ति।

(4) येषां पदार्थानां परस्परं सन्निपातः भवति, ते परस्परं समानाः भवन्ति।

(5) पूर्णांशः तु भागांशस्य अपेक्षया महत्तरः।

(6) ये पदार्थाः समानपदार्थैः द्विगुणिताः, ते परस्परं समानाः भवन्ति।

(7) ये पदार्थाः समानपदार्थानाम् अर्धगुणिताः, ते परस्परं समानाः भवन्ति।

एते सामान्याभिप्रायाः किञ्चनप्रकारकं परिमाणं सूचयन्ति। प्रथमः सामान्याभिप्रायः समतलाकृतिषु प्रयुज्यते। उदाहरणार्थम् – त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् आयतस्य क्षेत्रफलस्य समानम् अस्ति चेत्, तथा आयतस्य क्षेत्रफलं वर्गक्षेत्रफलस्य समानम् अस्ति चेत्, त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं वर्गक्षेत्रफलस्य समानं भवति। समप्रकारकपरिमाणानि तोलयितुं योजयितुं च शक्यानि । किन्तु भिन्नप्रकारकानि परिमाणानि तोलयितुं न शक्यानि। उदाहरणार्थम् – आयतेन सह रेखा योजयितुं न शक्या, तथैव कोणः पञ्चभुजेन सह तोलयितुं नैव शक्यः।

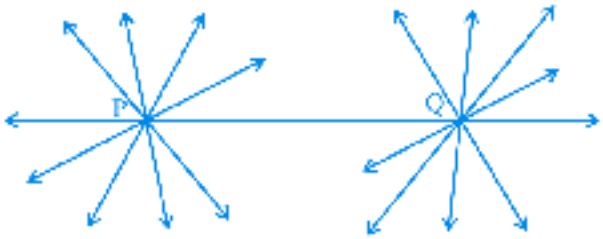
उपरिदत्तं चतुर्थम् स्वयंसिद्धम् एवं वदति यत् – यदि समानरूपं पदार्थद्वयं समानं भवति। अथवा, सर्वे पदार्थाः स्वेन समानाः एव भवन्ति। एतत् तु समारोपण-सिद्धान्तस्य औचित्यं कल्पयति। पञ्चमं स्वयंसिद्धं तु 'महत्तर' पदस्य निर्वचनं करोति। उदाहरणार्थम् – यदि B -इति राशिः A -इति राशेः भागः अस्ति, तर्हि A -इति राशिः, B राशेः तथा C इति तृतीयराशेः सङ्कलनरूपेण लेखितुं शक्या। सङ्केतरूपेण A>B इत्यस्य अर्थः, तत्र C इति अन्यराशिः अस्ति, यथा $A = B + C$ इति।

इदानां यूक्लिडस्य पञ्चानाम् आधारप्रतिज्ञानां विषये चर्चयामः।

प्रथमा आधारप्रतिज्ञा – *कस्माच्चित् एकस्मात् बिन्दोः कस्यचिदपि अपरबिन्दोः पर्यन्तं काञ्चित् रेखां चित्रयितुं शक्यते*। अवगच्छत यत् एषा अभिधारणा वदति यत् न्यूनातिन्यूनम् एका रेखा बिन्दुद्वयद्वारा गच्छति। किन्तु एकस्याः रेखायाः अधिकं भवितुं नार्हति इति एषा आधारप्रतिज्ञा न वदति। किन्तु स्वस्य कृत्यां यूक्लिडः वारं वारम् उल्लेखं विना एवं कल्पितवान् यत् काचित् अद्वितीयरेखा बिन्दुद्वयं योजयति इति। एतं परिणामम् स्वयंसिद्धस्य द्वारा अधोदत्तप्रकारेण वदामः।

5.1 स्वयंसिद्धम् : *द्वौ भिन्नौ बिन्दू दत्तौ चेत् ताभ्यां द्वारा काचिद् अद्वितीयरेखा गच्छति इति*।

(5.4 आकृतिं पश्यन्तु) अत्र कति रेखाः P इति बिन्दुद्वारा तथा Q इति बिन्दुद्वारा गच्छन्ति। एका एव रेखा – PQ इति। पुनः कति रेखाः याः Q द्वारा गच्छन्ति ताः P द्वारा अपि गच्छन्ति ? एका एव PQ नाम रेखा। अतः उपरिदत्तं वाक्यं स्वयं सिद्धम् अस्ति इति कारणेन स्वयंसिद्धम् इति स्वीक्रियते।



आकृतिः 5.4

द्वितीया आधारप्रतिज्ञा - *कांचन सान्तरेखाम् अनिश्चिततया विस्तारयितुं शक्यते* ।
अवगच्छन्तु यत् इदानीन्तने काले यं रेखाखण्डम् इति वदामः सा एव यूक्लिडस्य सान्तरेखा इति । वर्तमानस्य परिभाषायां द्वितीया प्रतिज्ञा वदति यत् - रेखाखण्डम् उभयत्रापि विस्तार्य रेखां कर्तुं शक्यते । (5.5 आकृतिं पश्यन्तु)

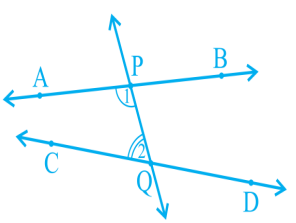


आकृतिः 5.5

तृतीया आधारप्रतिज्ञा - *केनचित् अपि केन्द्रेण, कयाचित् वा त्रिज्यया किञ्चन वृत्तं चित्रयितुं शक्यते ।*

चतुर्थी आधारप्रतिज्ञा - *सर्वेपि समकोणाः परस्परं समानाः सन्ति* ।

पञ्चमी आधारप्रतिज्ञा - काचित् ऋजुरेखा द्वयोः ऋजुरेखयोः स्थित्वा समानपार्श्वे अन्तःकोणान् करोति । तयोः अन्तःकोणयोः सङ्कलनं द्वाभ्यां समकोणाभ्यां न्यूनम् अस्ति चेत्, - द्वे ऋजुरेखे अनिश्चिततया विस्तार्येते चेत् ते तस्मिन् पार्श्वे मिलतः यत्र कोणयोः सङ्कलनं समकोणयोः सङ्कलनात् न्यूनम् अस्ति।
उदाहरणार्थम् – 5.6 आकृत्यां PQ इति रेखा *A*B, CD रेखयोः तथा तिष्ठति यथा प्रथम-द्वितीय-अन्तःकोणयोः सङ्कलनं PQ इति रेखायाः वामपार्श्वे 1800 मितात् न्यूनम् अस्ति । अतः *A*B तथा CD इति रेखे फलस्वरूपेण PQ इति रेखायाः वामपार्श्वे प्रतिछिनत्तः।



आकृतिः 5.6

पञ्च-प्रतिज्ञानां सङ्क्षिप्त-अवलोकनेन एतत् अवगच्छामः यत् पञ्चमप्रतिज्ञा अन्यासाम् अपेक्षया जटिलतरा अस्ति । अन्यत्र, प्रथमतः चतुर्थपर्यन्तं प्रतिज्ञाः सरलाः तथा सुस्पष्टाः सन्ति । अतः ताः सर्वाः स्वयंसिद्धसत्याः इति स्वीक्रियते । किन्तु एताः अभिधारणाः निरूपयितुं न शक्नुमः। अतः एतानि वाक्यानि उपपत्तिं विना एव अङ्गीक्रियते । (प्रथमं परिशिष्टं पश्यन्तु)

स्वस्याः जटिलतायाः कारणेन पञ्चमप्रतिज्ञां प्रति अधिकावधानं दद्मः । इदानीन्तने काले स्वयंसिद्धानि,

आधारप्रतिज्ञा - इत्यादिपदानि परस्परविनिमयरीत्या समानार्थेषु च प्रयुज्यन्ते । प्रतिज्ञा इति वस्तुतः काञ्चित् क्रियां सूचयति । आधारप्रतिज्ञा इति वदामः चेत् 'विश्वे अवलोकितं किञ्चन सिद्धान्तम् अवलम्ब्य उच्यमानं वाक्यम्' इति अर्थः। अस्य सत्यता तथा मान्यीकरणं तु अग्रे परिशील्यते । यदि तत् सत्यं, तर्हि आधारप्रतिज्ञा इति अङ्गीक्रियते ।

स्वयंसिद्धानां व्यवस्था तदा नियता इति उच्यते यदा अस्मात् स्वयंसिद्धात् अन्यत् किञ्चन स्वयंसिद्धम् व्युत्पादयितुं न शक्नुमः यत् -अन्यत् स्वयंसिद्धं वा पूर्वनिरूपितं कमपि वाक्यं वा न विरुद्ध्यति । अतः स्वयंसिद्धानां व्यवस्थाः यदा दीयन्ते तदा ते नियताः वा इति निश्चेतव्याः भवन्ति ।

यूक्लिडः स्वस्य स्वयंसिद्धानाम् आधारप्रतिज्ञानां च कथनात् परं तानि अन्यपरिणामान् निरूपयितुम् उपयुक्तवान् । पुनः तान् परिणामान् उपयुज्य, निगमनतर्कद्वारा अन्यान् परिणामान् निरूपितवान् । यानि वाक्यानि निरूपितानि तानि सिद्धान्तः अथवा प्रमेयम् इति उच्यते । यूक्लिडः स्वस्य स्वयंसिद्धैः, आधारप्रतिज्ञाभिः, निर्वचनैः, पूर्वनिरूपित-प्रमेयैः च कस्याञ्चन विश्लेषणशृङ्खलायां 465 सिद्धान्तान् व्युत्पादितवान् । ज्यामित्याम् अग्रिमेषु केषुचित् अध्यायेषु भवन्तः कानिचन प्रमेयाणि निरूपयितुम् एतेषाम् आधारप्रतिज्ञानाम् उपयोगं कुर्वन्ति । इदानीं केषुचित् उदाहरणेषु यूक्लिडः स्वस्य स्वयंसिद्धैः आधारप्रतिज्ञाभिश्च परिणामान् कथं निरूपितवान् इति पश्यामः।

उदाहरणम् 1: यदि A, B, C इति कस्याञ्चन रेखायां त्रयः बिन्दवः सन्ति तथा B इति बिन्दुः A, C बिन्द्वोः मध्ये अस्ति तर्हि $AB + BC = AC$ इति निरूपयन्तु (5.7 आकृतं पश्यन्तु)।



आकृतिः 5.7

समाधानम् : उपरिदत्तायाम् आकृत्याम् AC इति रेखा $AB + BC$ इति रेखया सह ऐक्यम् आप्नोति ।

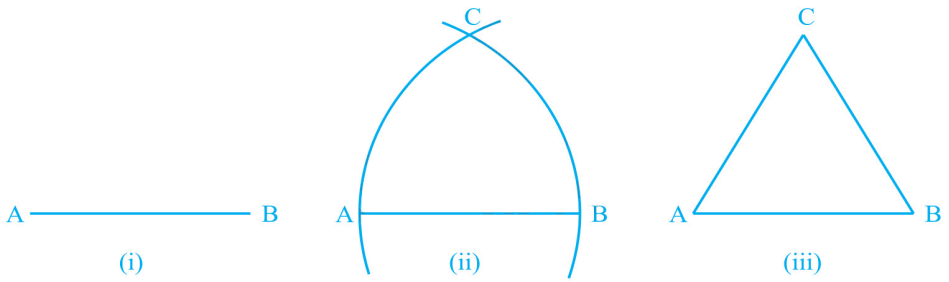
अपि च यूक्लिडस्य चतुर्थं स्वयंसिद्धम् एवं वदति – "येषां पदार्थानां परस्परं सन्निपातः भवति, ते परस्परं समानाः भवन्ति" इति । अतः एवं व्युत्पादयितुं शक्यते यत्

$$AB + BC = AC \text{ इति ।}$$

अवगच्छन्तु यत् अस्मिन् समाधाने एवं परिकल्पनां कृतवन्तः यत् द्वाभ्यां बिन्दुभ्याम् अपि काचित् अद्वितीया रेखा गच्छतीति ।

उदाहरणम् 2 : किमपि एकं रेखाखण्डम् उपयुज्य एकं समबाहु-त्रिभुजं निर्मातुं शक्यते इति निरूपयन्तु ।

समाधानम् : उपरिदत्तस्य वाक्यस्य अनुगुणं AB इति मितमात्रकः रेखाखण्डः दत्तः इति चिन्तयन्तु । (5.8 (i) आकृतिं पश्यतु)



आकृतिः 5.8

अत्र किञ्चन निर्माणं करणीयं भवति । यूक्लिडस्य तृतीयाम् आधारप्रतिज्ञाम् उपयुज्य भवन्तः A इति बिन्दुं केन्द्रीकृत्य AB इति त्रिज्यया किञ्चन वृत्तं चित्रयितुं शक्नुवन्ति । समानतया B इति बिन्दुं केन्द्रीकृत्य BA त्रिज्यया अन्यत् वृत्तं चित्रयतु । द्वे अपि वृत्ते C इति बिन्दौ मिलतः। इदानीं AC तथा BC रेखाखण्डद्वयं रचित्वा ΔABC त्रिभुजां निर्मान्तु ।

एतत् त्रिभुजं समबाहुत्रिभुजम् इति, अर्थात् $AB = AC = BC$ इति निरूपणीयम् ।

इदानीं $AB = AC$ यतः ते द्वे समानवृत्तस्य त्रिज्ये ।

तथैव, $AB = BC$ (समानवृत्तस्य त्रिज्ये).

एताभ्यां तथ्याभ्यां, तथा यूक्लिडस्य स्वयंसिद्धात् ज्ञायते यत् ये पदार्थाः समानपदार्थैः सह समानाः, ते परस्परं समानाः भवन्ति इति । भवन्तः एतं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुवन्ति यत् $AB = BC = AC$ इति । अतः ΔABC इति त्रिभुजं समबाहुत्रिभुजम् अस्ति ।

अत्र अवगच्छन्तु यत् कुत्रापि कथनं विना यूक्लिडः एवं परिकल्पितवान् यत् A तथा B इति बिन्दौ केन्द्रीकृत्ये चित्रिते द्वे वृत्ते कस्मिंश्चित् बिन्दौ मिलतः।

इदानीम् एकं प्रमेयं निरूपयामः यस्य प्रयोगः वारं वारं बहुषु परिणामेषु उपयुज्यते ।

प्रमेयम् – 5.1 द्वयोः विभिन्नरेखयोः एकः एव सामान्यबिन्दुः भवितुम् अर्हति ।

उपपत्तिः अत्र l तथा m इति द्वे रेखे दत्ते स्तः । तयोः रेखयोः एकः एव सामान्यबिन्दुः अस्ति इति निरूपणीयम् ।

इदानीम् एवं कल्पयामः यत् ते द्वे रेखे विभिन्नबिन्दुषु प्रतिच्छेदं कुरुतः इति –तौ बिन्दू P, Q च इति चिन्तयन्तु । अतः P तथा Q इति विभिन्नबिन्द्वोः द्वारा द्वे विभिन्ने रेखे गच्छतः । किन्तु एषा परिकल्पना -"विभिन्नबिन्दुद्वयद्वारा एका एव रेखा गच्छति" इति एतेन स्वयंसिद्धेन सह न सङ्गच्छते । अतः विभिन्नबिन्दुद्वय-द्वारा द्वे रेखे गच्छतः इति आरब्धा परिकल्पना दोषपूर्णा इति ।

इतः कं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः ?

अतः अस्माभिः एषः निष्कर्षः प्राप्तव्यः यत् - विभिन्नरेखाद्वयस्य एकः एव सामान्यबिन्दुः अस्ति इति ।

प्रश्नावलिः – 5.1

1. अधोदत्तवाक्येषु कानि सत्यानि असत्यानि च इति वदन्तु, स्वस्य उत्तराणां कारणानि यच्छन्तु ।
   (i) एकेन बिन्दुना एका एव रेखा गन्तुं शक्नोति ।
   (ii) विभिन्न-बिन्दुद्वयद्वारा अनन्तरेखाः गन्तुं शक्नुवन्ति ।

(iii) काचित् सान्तरेखा उभयपार्श्वे अपि अनिश्चिततया विस्तारयितुं शक्या।

(iv) यदि द्वे वृत्ते समे स्तः, तर्हि तयोः त्रिज्ये अपि समे भवतः।

(v) 5.9 आकृत्यां यदि $AB = PQ$ तथा $PQ = XY$ तर्हि $AB = XY$



आकृतिः 5.9

2. अधोदत्तानां प्रतिपदस्य निर्वचनं करोतु – एतत्पूर्वं निर्वचनीयानि अन्यपदानि अपि सन्ति वा? तानि कानि, कथं निर्वचनीयानि ?

   (i) समान्तररेखाः (ii) समालम्बरेखाः (iii) रेखाखण्डः

   (iv) वृत्तस्य त्रिज्या (v) वर्गः

3. अधोदत्त-प्रतिज्ञाद्वयं चिन्तयन्तु –

   (i) यदि विभिन्नबिन्दुद्वयम् A, B च दत्तं चेत् तत्र C इति तृतीयः बिन्दुः A, B बिन्द्वोः मध्ये भवति।

   (ii) समानरेखायाम् अविद्यमानाः न्यूनातिन्यूनं त्रयः वा बिन्दवः भवन्ति।

   एतयोः प्रतिज्ञयोः अनिर्वचनीयानि पदानि सन्ति वा? एते आधारप्रतिज्ञे नियते वा ? एते यूक्लिडस्य आधारप्रतिज्ञाः अनुगच्छतः वा ? विवृणुत

4. यदि A, B इति बिन्द्वोः मध्यो C इति कश्चित् बिन्दुः अस्ति, यथा $AC = BC$, तर्हि $AC = \frac{1}{2} AB$ इति निरूपयतु। आकृतिं चित्रयित्वा विवृणोतु।

5. चतुर्थे प्रश्ने AB इति रेखाखण्डस्य C इति मध्यबिन्दुः अस्ति। प्रत्येकं रेखाखण्डस्य अपि एकमात्रः मध्यबिन्दुः अस्ति इति निरूपयन्तु।

6. 5.10 आकृत्यां यदि $AC = BD$ तर्हि $AB = CD$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 5.10

7. यूक्लिडस्य स्वयंसिद्धानाम् आवल्यां पञ्चमं स्वयंसिद्धं केवलं वैश्विकसत्यम् इति किमर्थम् उच्यते ? (अत्र अवगच्छन्तु यत् एषः प्रश्नः पञ्चम्याः आधारप्रतिज्ञायाः विषये नास्ति इति)

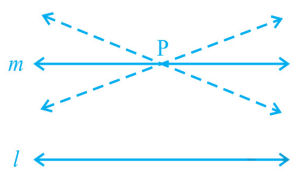
5.3 – यूक्लिडस्य पञ्चम्याः आधारप्रतिज्ञायाः तुल्यपाठाः

गणितीय-चरित्रे यूक्लिडस्य पञ्चमी प्रतिज्ञा अतिमहत्त्वपूर्णा अस्ति। 5.2 अनुच्छेदात् तां पुनः स्मरन्तु। ततः ज्ञायते यत् - पतनरेखायाः समपार्श्वस्य अन्तःकोणः साक्षात् 180^0 भवति चेत् रेखानां प्रतिच्छेदः न सम्भवति। अस्याः प्रतिज्ञायाः बहवः तुल्यपाठाः सन्ति। तेषु अन्यतमम् एव 'प्लेफेर्-स्वयंसिद्धम्' इति। (जान् प्लेफेर् इति

स्काट्लाण्ड-देशीय-गणितज्ञः 1729 CE वर्षे दत्तवान्) तत् स्वयंसिद्धम् अधः दत्तम्।

प्रत्येकम् l इति रेखायाः, l इति रेखायाम् अविद्यमानस्य प्रत्येकं P इति बिन्दोः च काचन m इति अद्वितीयरेखा अस्ति या P इति बिन्दुद्वारा गच्छति तथा l इति रेखायाः समान्तरम् अस्ति।

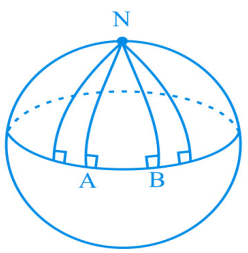
आकृतितः P इति बिन्दुद्वारा गम्यमानासु सर्वासु रेखासु m इति एका एव रेखा l इति रेखायाः समानान्तरे अस्ति।



आकृतिः 5.11

एतं परिणामम् अधोदत्तप्रकारेण अपि वक्तुं शक्यते। परस्परं प्रतिच्छेद्यमाने विभिन्ने द्वे रेखे कस्याश्चित् एकस्याः एव रेखायाः समान्तरे भवितुं न अर्हतः।

यूक्लिडः स्वस्य 28 प्रमेयाणि निरूपयितुं पञ्चम-प्रतिज्ञायाः आवश्यकतां न अनुभूतवान्। तेन सह बहवः गणितज्ञाः अवगतवन्तः यत् पञ्चम-प्रतिज्ञा वस्तुतः एकं प्रमेयम् एव यस्य निरूपणम् अन्याभिः चतसृभिः आधारप्रतिज्ञाभिः तथा अन्यैः स्वयंसिद्धैः च कर्तुं शक्यते इति। किन्तु प्रमेयरूपेण पञ्चमप्रतिज्ञायाः निरूपणे कृताः सर्वे यत्नाः विफलाः एव जाताः। किन्तु एते यत्नाः अपरां काञ्चन महतीं सिद्धिं प्राप्तुं सहकारिणः अभवन्। अर्थात् – अन्येषां विभिन्नानां ज्यामितीनाम् उत्पादने उपकृतवन्तः।



आकृतिः 5.12

एताः ज्यामित्यः यूक्लिडीय-ज्यामितेः बहु भिन्नाः।

ताः अयूक्लिडीय-ज्यामितयः इति उच्यन्ते। एतासां सर्जनं चिन्तनस्य चरित्रे सीमाङ्काः इति चिन्त्यते, यतः तावत्पर्यन्तं सर्वे विश्वसितवन्तः यत् यूक्लिडस्य मात्रम् एव ज्यामितिः अपि च विश्वमेव यूक्लिडीयम् इति। वस्तुतः अस्य नाम गोलीय-ज्यामितिः इति उच्यते। गोलीय-ज्यामित्यां रेखाः ऋजवः न भवन्ति। ते महावृत्तानां भागाः भवन्ति। (अर्थात् – यानि वृत्तानि गोलतलयोः प्रतिच्छेदेन प्राप्यन्ते तथा गोलस्य मध्ये गच्छन्ति।)

12 आकृत्यां AN, BN इति रेखे (ये गोलस्य महावृत्तानां भागभूते) AB इति रेखायाः समालम्बे स्तः। किन्तु ते रेखे AB इति रेखायाः समपार्श्वस्थ-कोणानां योगे मिलतः। तौ कोणौ समकोणयोः न्यूनौ न स्तः। (वस्तुतः $90^0 + 90^0 = 180^0$). अत्र एतदपि अवगच्छन्तु यत् NAB इति त्रिभुजस्य कोणानां योगः 180^0 मितस्य अपेक्षया अधिकतरः अस्ति, यतः $\angle A + \angle B = 180^0$। अतः यूक्लिडीय-ज्यामितिः तले विद्यमानानाम् आकृतीनां विषये एव मान्या भवति। वक्रीयतलेषु सा मानिता न भवति।

उदाहरणम् 3 : एतत् वाक्यं चिन्तयन्तु – ऋजरेखयोः किञ्चन युग्मं परस्परं सर्वत्र समदूरे वर्तते। एतत् वाक्यम् यूक्लिडस्य पञ्चम-प्रतिज्ञायाः साक्षात् फलस्वरूपं किम् ? विवृण्वन्तु।

समाधानम् : l इति काञ्चन रेखां तथा तस्यां रेखायां विद्यमानं कञ्चन बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। प्लोफेर्-स्वयंसिद्धेन (यत् पञ्चमप्रतिज्ञायाः तुल्यम् अस्ति) अवगच्छामः यत् तत्र काचन m इति काचन अद्वितीया रेखा भवति, या P इति बिन्दुद्वारा गच्छति। सा m रेखा l इति रेखायाः समान्तरा अस्ति।

इदानां कस्याश्चन रेखायाः बिन्दुपर्यन्तं बिद्यमानं दूरं तु तद्बिन्दोः रेखापर्यन्तं विद्यमानस्य समालम्बरेखायाः दीर्घता अस्ति। एतद्दूरं तु m इति रेखायां विद्यमानात् कस्माच्चित् बिन्दोः l इति रेखायाः पर्यन्तं, तथा l इति रेखायां विद्यमानात् कस्माच्चित् बिन्दोः m इति रेखापर्यन्तं समानं भवति। अतः एते रेखे द्वे परस्परं सर्वत्र समदूरे स्तः।

टिप्पणी - अग्रिमेषु केषुचित् अध्यायेषु भवन्तः यूक्लिडीय-ज्यामितिं पठिष्यन्ति । किन्तु अस्माभिः उपयुज्यमानानि स्वयंसिद्धानि, प्रमेयाणि च यूक्लिडियात् भिन्नानि भवन्ति ।

प्रश्नावलिः – 5.2

1. भवन्तः सरलतया अवगमनयोग्या यथा स्यात् तथा यूक्लिडस्य पञ्चमप्रतिज्ञां कथं पुनः लेखितुं शक्नुवन्ति?
2. यूक्लिडस्य पञ्चमी आधारप्रतिज्ञा समान्तररेखानाम् अस्तित्वं ज्ञापयति वा? विवृण्वन्तु ।

5.4 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् पठितवन्तः।

1. यद्यपि यूक्लिडः बिन्दु-रेखा-तलानां निर्वचनं कृतवान् तथापि तानि निर्वचनानि गणितज्ञैः न अङ्गीक्रियन्ते । अतः एतानि पदानि अनिर्वचनीयानि इति स्वीक्रियते ।
2. स्वयंसिद्धानि, आधारप्रतिज्ञाश्च सुस्पष्ट-वैश्विक-सत्य-परिकल्पनानि । तानि न निरूपितानि ।
3. प्रमेयानि तु निर्वचनैः, स्वयंसिद्धैः, पूर्वं निरूपितवाक्यैः, निगमनतर्कैः च निरूप्यमाणानि वाक्यानि।
4. यूक्लिडस्य कानिचन स्वयंसिद्धानि-
   (1) ये पदार्थाः समानपदार्थैः सह समानाः, ते परस्परं समानाः भवन्ति ।
   (2) यदि समानाः समानैः सह योजिताः तर्हि पूर्णाः अपि समानाः भवन्ति ।
   (3) यदि समानाः समानेभ्यः विकलिताः तर्हि शेषफलानि अपि समानानि भवन्ति ।
   (4) येषां पदार्थानां परस्परं सन्निपातः भवति, ते परस्परं समानाः भवन्ति ।
   (5) पूर्णांशः तु भागांशस्य अपेक्षया महत्तरः।
   (6) ये पदार्थाः समानपदार्थेभ्यः द्विगुणिताः, ते परस्परं समानाः भवन्ति ।
   (7) ये पदार्थाः समपदार्थेभ्यः अर्धगुणिताः, ते परस्परं समानाः भवन्ति ।
5. यूक्लिडस्य आधारप्रतिज्ञाः तु -
   (1) एकस्मात् बिन्दोः अपरबिन्दुपर्यन्तं काञ्चित् रेखां चित्रयितुं शक्यते।
   (2) काचन सान्तरेखा अनिश्चिततया विस्तारयितुं शक्या ।
   (3) केनचित् केन्द्रेण कयाचित् च त्रिज्यया किञ्चन वृत्तं चित्रयितुं शक्यते ।
   (4) सर्वेपि समकोणाः परस्परं समानाः सन्ति ।
   (5) काचित् ऋजुरेखा द्वयोः ऋजुरेखयोः द्वारा गता समपार्श्वे अन्तःकोणान् करोति । यदि तयोः अन्तःकोणयोः सङ्कलनं द्वाभ्यां समकोणाभ्यां न्यूनम् अस्ति, तर्हि ते द्वे ऋजुरेखे अनिश्चिततया विस्तार्येते चेत् ते तस्मिन् पार्श्वे मिलतः यत्र कोणयोः सङ्कलनं समकोणयोः सङ्कलनात् न्यूनम् अस्ति।
6. यूक्लिडस्य पञ्चमप्रतिज्ञायाः तुल्यपाठौ
   (i) प्रत्येकम् *l* इति रेखायाः, *l* इति रेखायाम् अविद्यमानस्य प्रत्येकं P इति बिन्दोः च काचन

m इति अद्वितीयरेखा अस्ति या P इति बिन्दुद्वारा गच्छति तथा *l* इति रेखायाः समान्तरम् अस्ति।

(ii) परस्परं प्रतिच्छेद्यमाने विभिन्ने द्वे रेखे कस्याश्चित् एकस्याः एव रेखायाः समान्तरे भवितुं न अर्हतः।

7. यूक्लिडस्य पञ्चमप्रतिज्ञाम् अन्याभिः चतसृभिः प्रतिज्ञाभिः निरूपणस्य यत्नाः विफलाः जाताः। किन्तु एते यत्नाः अन्य-बहुविध-ज्यामितीनाम् आविष्कारे उपकारकाः अभवन्। एताः ज्यामितीयः अयूक्लिडीय-ज्यामितयः इति उच्यन्ते।

अध्यायः 6

रेखाः कोणाः च

6.1 प्रस्तावना

पञ्चमाध्याये भवन्तः पठितवन्तः यत् रेखानिर्माणार्थं बिन्दुद्वयम् अपेक्षितम् इति। भवन्तः कांश्चन स्वयंसिद्धानि अपि पठितवन्तः, तैः कानिचन अन्यानि वाक्यानि अपि निरूपितवन्तः। अस्मिन् अध्याये भवन्तः रेखयोः परस्पर-प्रतिच्छेदस्थले निर्मीयमाणानां कोणानां गुणधर्माणां विषये पठिष्यन्ति। अपि च यदा काचन रेखा द्वे समानान्तररेखे भिन्नबिन्दुषु प्रतिच्छिनत्ति, तदा प्राप्तानां कोणगुणधर्माणां विषये अपि पठिष्यन्ति। अग्रे भवन्तः एतान् गुणधर्मान् उपयुज्य निगमनतर्केण कानिचन वाक्यानि निरूपयिष्यन्ति (प्रथमं परिशिष्टं पश्यन्तु)। पूर्वतनकक्ष्यासु कैश्चित् क्रियाकलापैः एतानि वाक्यानि परिशीलितानि।

दैनन्दिने जीवने भवन्तः समतलानां धाराभिः निर्मीयमाणान् विविधान् कोणान् पश्यन्ति। समतलान् उपयुज्य समानतया कञ्चन प्रतिदर्शं निर्मातुं, भवतां कोणानां विषये सम्पूर्णज्ञानम् अपेक्षितम्। उदाहरणार्थं भवन्तः विद्यालयस्य प्रदर्शिन्यां कस्यचन कुटीरस्य प्रतिदर्शं वंशदण्डैः निर्मातुम् इच्छन्ति चेत् तर्हि कथं तस्य निर्माणं स्यात् इति कल्पयन्तु। भवन्तः कांश्चन वंशदण्डान् परस्परं समानान्तरं स्थापयन्ति तथा अपरान् दण्डान् तिर्यक् स्थापयन्ति। यदा काचन वास्तुतज्ज्ञा बह्वट्टभवनाय योजनां चित्रयति तदा सा बहुषु कोणेषु प्रतिच्छिन्नरेखाः. समानान्तररेखाः च चित्रयेत्। रेखानाम्, कोणानां गुणधर्मज्ञानं विना सा भवनस्य विन्यासं चित्रयितुं शक्नोति इति भवन्तः चिन्तयन्ति किम् ?

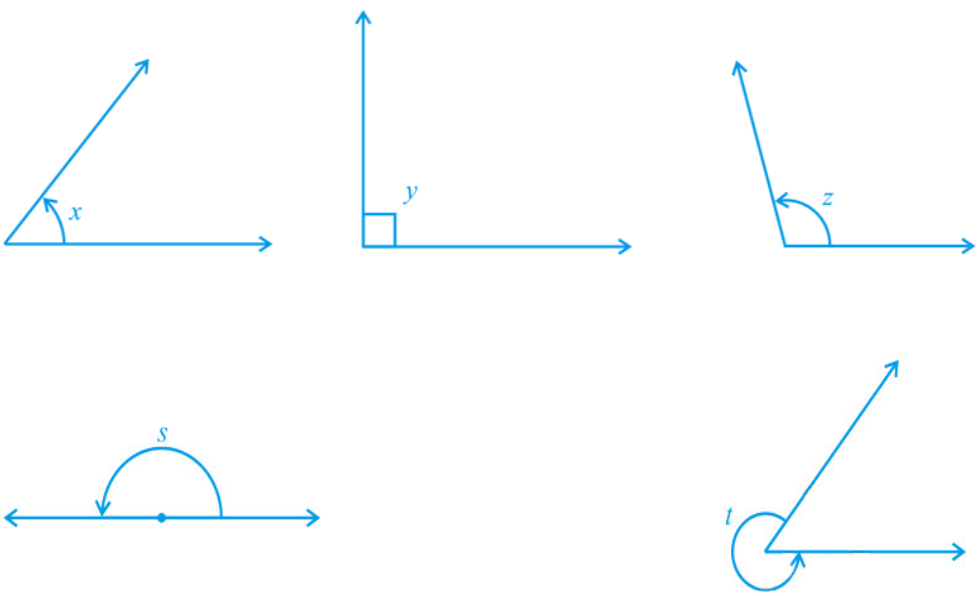
विज्ञाने भवन्तः प्रकाशस्य गुधर्मान् किरणचित्रैः पठन्ति। उदाहरणार्थं यदा प्रकाशः एकस्मात् अपरं माध्यमं प्रविशति तदा तस्य वक्रीभवनस्य अध्ययनार्थं भवन्तः प्रतिच्छिन्नरेखानां, समानान्तररेखानां गुमधर्मान् उपयुञ्जन्ति। यदा द्वयं द्व्यधिकं वा बलं कस्मिंश्चित् वस्तुनि प्रयुज्यते, तदा भवन्तः अनुसूचितरेखाखण्डानां द्वारा बलानि चित्रयन्ति, वस्तुनि तेषां बलानां पूर्णप्रभावं च ज्ञास्यन्ति। तदा भवन्तः समान्तरकिरणानाम् अथवा प्रतिच्छिन्नकिरणानां च मध्ये विद्यमानानां कोणानां सम्बन्धं जानीयुः। अट्टालिकायाः औन्नत्यं ज्ञातुम् अथवा दीपस्तम्भस्य महानौकायाः च मध्ये विद्यमानं दूरं ज्ञातुं वा दृष्टिरेखायाः, तिर्यग्दूरस्य च मध्ये विद्यमानः कोणः ज्ञातव्यः। अन्यानि बहूनि उदाहरणानि दातुं शक्यन्ते यत्र रेखाः कोणाः च उपयुज्यन्ते। ज्यामितेः अग्रिमपाठेषु भवन्तः रेखानां कोणानां च गुणधर्मान् उपयुज्य बहूपयोगिनः अन्यान् गुणधर्मान् निगमयितुं शक्नुवन्ति।
आदौ पूर्वतनकक्ष्यासु पठितानां रेखा-कोण-सम्बद्धानि पारिभाषिक-पदानि लक्षणानि च पुनः स्मरामः।

6.2 आधारभूतनि पारिभाषिकपदानि लक्षणानि च

स्मरन्तु यत् कस्याश्चन रेखायाः अन्त्यबिन्दुद्वययुक्तः कश्चन भागः **रेखाखण्डः** इति । रेखायाः एकान्त्यबिन्दुयुक्तः कश्चन भागः **किरणः** इति । अवगच्छन्तु यत् रेखाखण्डः AB, ($\overline{AB}$) इति सूच्यते । तथा तस्य दीर्घता AB इति सूच्यते । AB किरणः ($\overrightarrow{AB}$) इति सूच्यते, तथा रेखा ($\overleftrightarrow{AB}$) इति सूच्यते । किन्तु एतेषां चिह्नानाम् उपयोगं अधुना न कुर्मः। AB रेखाखण्डः, AB किरणः, AB दीर्घता, AB रेखा AB इति समानचिह्नेन एव सूचयामः। अर्थः तु सन्दर्भेण एव स्पष्टः भवति । कदाचित् l, m, n इत्यादिभिः अक्षरैः रेखाः सूच्यन्ते

यदि त्रयः त्र्यधिकाः वा बिन्दवः समानरेखायां सन्ति चेत् ते **सरैखिकबिन्दवः** इति उच्यते । नो चेत् **असरैखिकबिन्दवः** इति उच्यते ।

स्मरन्तु यत् यदा किरणद्वयं समानबिन्दुतः उत्पद्य निर्गच्छति, तदा तत्र **कोणः** निर्मीयेते । कोणयुतकिरणाः कोणस्य **भुजाः** उच्यन्ते । तथा अन्त्यबिन्दुः कोणस्य **शीर्षम्** इति उच्यते । भवन्तः लघुकोणः, समकोणः, अधिककोणः, ऋजुकोणः, प्रतिवर्तिकोणः इत्यादिकोणानां विषये पूर्वतनकक्ष्यासु पठितवन्तः (6.1 आकृतिं पश्यन्तु)।

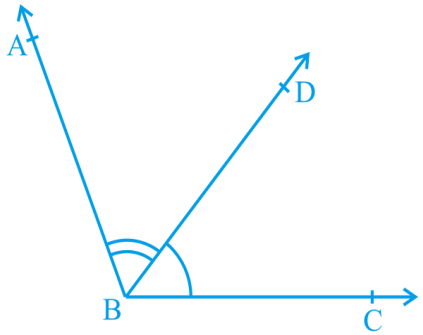


आकृतिः 6.1 कोणानां प्रकाराः (i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi)

लघुकोणः 0^0, 90^0 इत्यनयोः मध्ये भवति । **समकोणः** तु साक्षात् 90^0 भवति । यः कोणः 90^0 अपेक्षया अधिकः किन्तु 180^0 तः न्यूनः, सः **अधिककोणः**। अपि च साक्षात् 180^0 **ऋजुकोणः** भवति । यः 180^0 तः 360^0 मध्ये भवति सः **प्रतिवर्तिकोणः** इति । अग्रे द्वयोः कोणयोः योगः 90^0 चेत् तौ **पूरककोणौ** इति उच्यते । यदा द्वयोः कोणयोः योगः 180^0 अस्ति तौ **परिपूरककोणौ** इति उच्यते ।

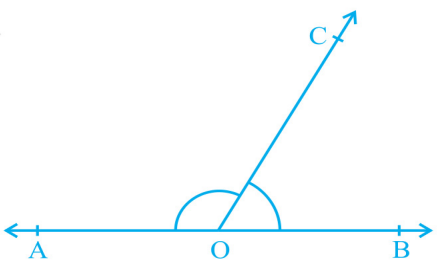
पूर्वतनकक्ष्यासु पार्श्वकोणानां विषये अपि

अधीतवन्तः (6.2 आकृतिं पश्यन्तु)। यदि कोणद्वयस्य किञ्चन समानशीर्षं, समानभुजा च विद्येते, असमानभुजे च समानभुजायाः भिन्नपार्श्वयोः भवतः, तर्हि तौ द्वौ कोणौ **पार्श्वकोणौ** इति उच्येते। 6.2 आकृत्यां $\angle ABD$, $\angle DBC$ च पार्श्वकोणौ स्तः। BD किरणः तयोः उभयनिष्ठभुजा तथा B बिन्दुः उभयनिष्ठशीर्षम्। अपि च यदा द्वौ कोणौ पार्श्वौ, तदा तयोः योगः तु द्वाभ्याम् असमानभुजाभ्यां निर्मितकोणतुल्यः अस्ति। अतः $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ इति लेखितुं शक्यते।



आकृतिः 6.2 : पार्श्वकोणौ

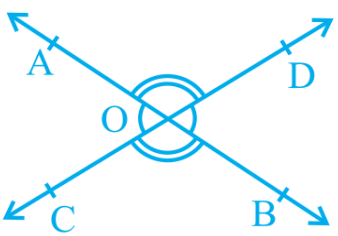
अत्र अवगच्छन्तु यत् $\angle ABC$, $\angle ABD$ च पार्श्वकोणौ न, किमर्थम् ? यतः तयोः असमानभुजे BD, BC च B*A* इति समानभुजायाः समानपार्श्वे स्तः। यदि 6.2 आकृत्यां विद्यमानौ B*A*, BC चेति असमानभुजद्वयं सम्भूय रेखां निर्माति, तर्हि सा रेखा 6.3 आकृतिवत् दृश्यते। अस्यां स्थित्यां $\angle ABD$, $\angle DBC$ **अनयोः युग्मं ऋजुकोणयुग्मम् इति** उच्यते।



आकृतिः6.3 रैखिक-कोणयुग्मः

भवन्तः स्मर्तुं शक्नुवन्ति - यदा *A*B, CD रेखे O बिन्दौ प्रतिच्छिनत्तः तदा **शीर्षाभिमुखकोणौ** निर्मीतः (6.4 आकृतिं पश्यन्तु)। तत्र शीर्षाभिमुखकोणस्य युग्मद्वयम् अस्ति।

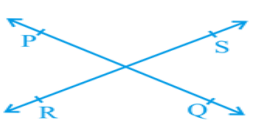
एकः युग्मः तु $\angle AOD$, $\angle BOC$. अपरं युग्मम् अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति किम् ?



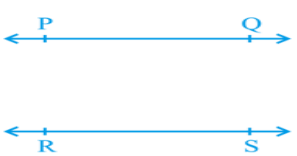
आकृतिः 6.4 शीर्षाभिमुखकोणौ

6.3 प्रतिच्छेदिरेखाः, अप्रतिच्छेदिरेखाः च

कस्मिंश्चित् पत्रे PQ, RS इति विविधरेखाद्वयं चित्रयन्तु। भवन्तः अवलोकयन्ति यत् रेखाद्वयम् अपि द्विविधप्रकारेण चित्रयितुं शक्यते इति। यथा 6.5 (i), 6.5 (ii) आकृत्योः दर्शितम्।



(i) प्रतिच्छेदित-रेखे



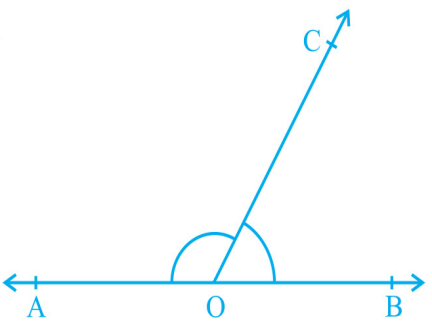
(ii) अप्रतिच्छेदित-रेखे

आकृतिः 6.5 रेखानां विविध-प्रकाराः

अत्र रेखायाः लक्षणं स्मरन्तु यत् अनिश्चिततया उभयदिशि अपि विस्तार्यते इति । 6.5 (i) आकृत्यां विद्यमाने PQ, RS प्रतिच्छेदिते रेखे । तथा 6.5 (ii) आकृत्यां समानन्तररेखे स्तः। अत्र अवगच्छन्तु यत् एतयोः रेखयोः मध्ये विविधबिन्दुषु विद्यमानं समालम्बदूरं समानं भवति । एषा समाना दीर्घता तु द्वयोः समानन्तररेखयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् इति उच्यते ।

6.4 कोणानां युग्मानि

6.2 अनुच्छेदे भवन्तः केषाञ्चन कोणयुग्मानां लक्षणानि अधीतवन्तः। यथा पूरककोणाः, परिपूरककोणाः, पार्श्वकोणाः ऋजुकोणयुग्मम् इत्यादयः। एतेषां कोणानां मध्ये विद्यमानं कञ्चन सम्बन्धं चिन्तयितुं शक्नुवन्ति वा? इदानीं, यदा रेखायां कश्चन किरणः तिष्ठति तदा निर्मितकोणानां मध्ये विद्यमानं सम्बन्धम् अवगच्छामः। 6.6 आकृत्यां दर्शितप्रकारेण यथा रेखायां किरणः तिष्ठेत् तथा एकं चित्रं चित्रयतु । तां रेखां AB इति, किरणं OC इति च कथयन्तु । O बिन्दौ के के कोणाः निर्मिताः सन्ति ? ते कोणाः $\angle AOC$, $\angle BOC$, $\angle AOB$ च ।



आकृतिः6.6 रैखिक-कोणयुग्मः

$\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ इति लेखितुं शक्नुमः वा? - (1)

आम् ! (किमर्थम्? 6.2 अनुच्छेदे विद्यमानौ पार्श्वकोणौ पश्यन्तु)

$\angle AOB$ इत्यस्य मानं किम्? तत्तु 180^0 (किमर्थम् ?) - (2)

प्रथम-द्वितीयसमीकरणाभ्याम् $\angle AOC + \angle BOC = 180^0$ इति वक्तुं शक्नुवन्ति किम् ?

आम् ! (किमर्थम्?)

उपरितनचर्चायाः वयम् अधोदत्तम् स्वयंसिद्धं वक्तुं शक्नुमः।

6.1 तमं स्वयंसिद्धम् - *यदि कश्चन किरणः रेखायां तिष्ठति, तर्हि तयोः पार्श्वकोणयोः योगः तु 180^0.*

यदा द्वयोः पार्श्वकोणयोः योगः यदा 180^0 भवति, तदा तयोः युग्मं **ऋजुकोणयुग्मम्** इति उक्तम् अत्र स्मरन्तु ।

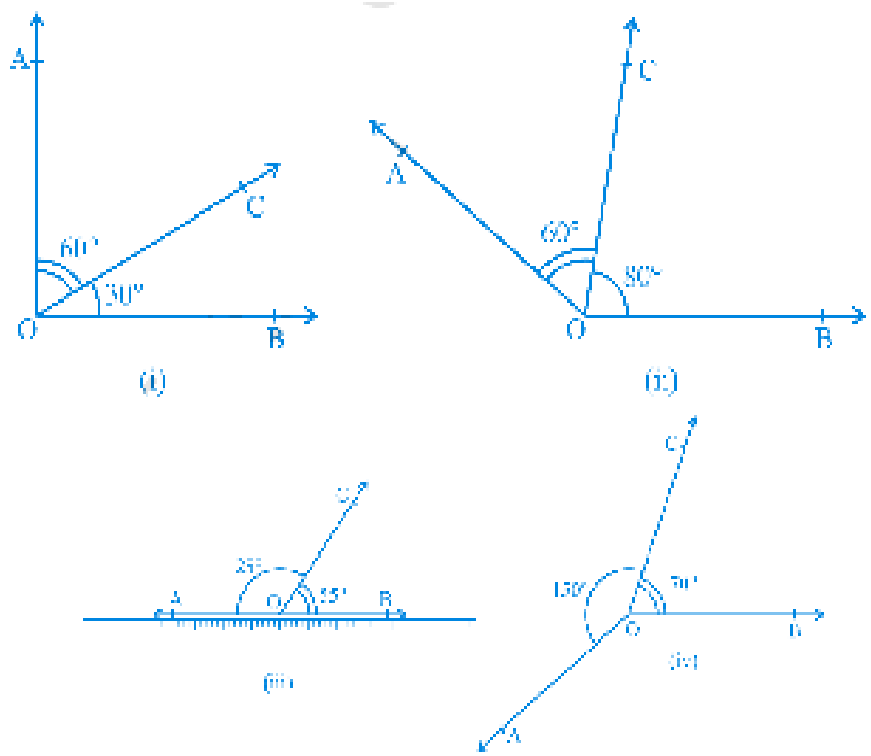
6.1 तमे स्वयंसिद्धे 'कश्चन किरणः रेखायां तिष्ठति' इति दत्तम् अस्ति । अत्र दत्तविषयात् वयम् एवं निर्कर्षं प्राप्तवन्तः यत् 'द्वयोः पार्श्वकोणयोः योगः180^0'. 6.1 तमं स्वयंसिद्धम् अन्येन प्रकारेण लेखितुं शक्नुमःवा ? अर्थात् 6.1 स्वयंसिद्धे विद्यमानः 'निष्कर्षः' 'दत्तः' इति स्वीकुर्मः, तथा 'दत्तः' 'निष्कर्षः' इति च स्वीकुर्मः । तदा एवं लेखितुं शक्नुमः।

(*A*) यदि द्वयोः पार्श्वकोणयोः योगः 180^0, तर्हि कश्चन किरणः रेखायां तिष्ठति (अर्थात् असमानभुजे रेखां निर्मान्ति)

इदानीं भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् 6.1तमं स्वयंसिद्धं, (*A*) च परस्परं प्रतिलोमे स्तः। एते परस्परं **विलोमे** स्त- इति वयं वदामः। (*A*) वाक्यं सत्यम् उत न इति न जानीमः, परिशीलयामः।

6.7 तमायाम् आकृत्यां दर्शितप्रकारेण विविधमानैः पार्श्वकोणौ चित्रयन्तु । प्रतिस्थित्याम् अपि असमानभुजासु

एकानुदिशं मापिकां स्थापयन्तु। अपरा असमानभुजा अपि मापिकानुदिशम् अस्ति वा ?



आकृतिः 6.7 विविध-मापयुक्त-पार्श्वकोणौ (i)(ii)(iii)(iv)

भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् 6.7 (iii) आकृत्यां केवलम् असमानभुजाद्वयम् अपि मापिकानुदिशं तिष्ठति इति। अर्थात् – A, O, B बिन्दवः समानरेखायां सन्ति। तथा OC किरणः तदुपरि स्थितः अस्ति। अपि च $\angle AOC + \angle COB = 125^0 + 55^0 = 180^0$ इति पश्यन्तु। इतः भवन्तः निष्क्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् (A) वाक्यम् सत्यम् एव इति। अतः एतत् वाक्यम् अधोदत्त-स्वयंसिद्धेन वक्तुं शक्नुवन्ति।

6.2 तमं स्वयंसिद्धम् – *यदि द्वयोः पार्श्वकोणयोः योगः 180^0 तर्हि कोणयोः असमानभुजाद्वयं रेखां निर्माति।*

स्पष्टतया ज्ञातकारणैः उपरिदत्त-स्वयंसिद्धद्वयम् अपि मिलित्वा **ऋजुयुग्म-स्वयंसिद्धद्वयम्** इति उच्यते।

इदानीं वयं - यदि रेखाद्वयं परस्परं प्रतिच्छिन्तः, तदा विद्यमानं स्थितिं पश्यामः।

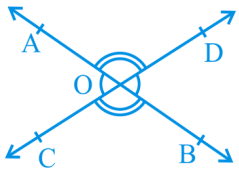
पूर्वतन-कक्ष्याभ्यः स्मरन्तु – यदा रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति तदा शीर्षाभिमुखकोणौ समानौ इति। एतं परिणामम् इदानीं निरूपयामः। उपपत्त्यां विद्यमानसामग्रीः प्रथमे परिशिष्टे पश्यन्तु, तथा ताः मनसि निधाय अधोदत्ताम् उपपत्तिं पठन्तु।

6.1 प्रमेयम् *यदि द्वे रेखे परस्परं प्रतिच्छिनत्तः तर्हि परस्पराभिमुखकोणौ समौ भवतः।*

उपपत्तिः – उपरिदत्ते वाक्ये 'द्वे रेखे परस्परं प्रतिच्छिन्तः'

इति दत्तम् अस्ति । अतः O इति बिन्दौ AB, CD इति द्वे रेखे प्रतिच्छिनत्ताम् (6.8 आकृतिं पश्यन्तु)। अनेन वयं शीर्षाभिमुखकोणयुग्मे प्राप्नुमः।

(i) $\angle AOC$, $\angle BOD$ च (ii) $\angle AOD$, $\angle BOC$ च



आकृतिः 6.8 **शीर्षाभिमुखकोणौ**

अस्माभिः $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle AOD = \angle BOC$ च इति निरूपणीयम् इदानीं OA किरणः CD रेखायां तिष्ठति।

अतः $\angle AOC + \angle AOD = 180^0$ (ऋजुयुग्म-स्वयंसिद्धम्) -(1)

$\angle AOD + \angle BOD = 180^0$ इति लेखितुं शक्नुमः किम्? आम् ! (कथम् ?) -(2)

प्रथमद्वितीयसमीकरणाभ्याम्

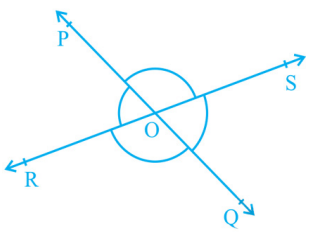
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$ इति लेखितुं शक्यते।

अनेन $\angle AOC = \angle BOD$ इति प्राप्यते (5.2 अनुच्छेदं, तृतीय-स्वयंसिद्धं पश्यन्तु)

तथैव $\angle AOD = \angle BOC$ इति निरूपयितुं शक्यते।

इदानीं 6.1 स्वयंसिद्धस्य, ऋजुयुग्म-प्रमेयस्य च आधारेण कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 1 : 6.9 तमायाम् आकृत्यां PQ, RS रेखे O बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिन्नतः। यदि $\angle PQR : \angle ROQ = 5:7$, सर्वान् कोणान् अन्विषन्तु।



आकृतिः.6.9

समाधानम् - $\angle PQR + \angle ROQ = 180^0$ (ऋजुकोणयुग्मः)

किन्तु $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ (दत्तम्)

अतः $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180^0 = 75^0$

तथैव $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180^0 = 105^0$

इदानीं $\angle POS = \angle ROQ = 105^0$ (शीर्षाभिमुखकोणौ)

तथा $\angle SOQ = \angle POR = 75^0$ (शीर्षाभिमुखकोणौ)

उदाहरणम् 2 : 6.10 आकृत्यां OS किरणः POQ रेखायां तिष्ठति । OR, OT किरणौ क्रमशः $\angle POS$, $\angle SOQ$ कोणयोः कोणार्धकौ स्तः। यदि $\angle POS = x$, $\angle ROT$ कोणम् अन्विषन्तु।

समाधानम् – OS किरणः POQ रेखायां तिष्ठति

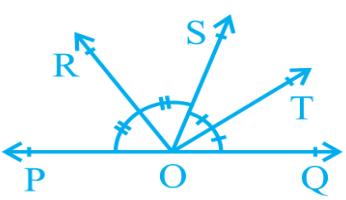
अतः $\angle POS + \angle SOQ = 180^0$

किन्तु $\angle POS = x$

अतः $x + \angle SOQ = 180^0$

अतः $\angle SOQ = 180^0 - x$

इदानीं OR किरणः $\angle POS$ कोणं अर्धयति, अतः



आकृतिः.6.10

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

तथैव $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$$= \frac{1}{2} \times (180^0 - x)$$

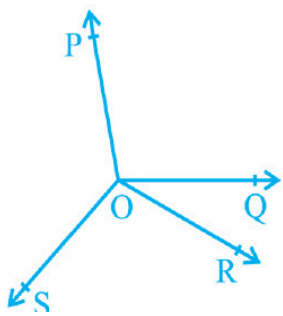
$$= 90^0 - \frac{x}{2}$$

इदानीं $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x}{2} + 90^0 - \frac{x}{2}$$

$$= 90^0.$$

उदाहरणम् 3 : 6.11 आकृत्यां OP, OQ, OR, OS इति चत्वारः किरणाः। निरुपयन्तु यत् $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^0$ |



आकृतिः.6.11

समाधानम् - 6.11 आकृत्यां भवद्भिः OP, OQ, OR, OS किरणाः पृष्ठतः कस्यचित् बिन्दोः पर्यन्तं विस्तारणीयाः भवन्ति । उदाहरणार्थं OQ किरणं T बिन्दुपर्यन्तं पृष्ठतः विस्तारयामः यथा TOQ इति काचित् रेखा प्राप्यते (6.12 आकृतिं पश्यन्तु)

इदानीं OP किरणः TOQ रेखायां तिष्ठति ।

अतः $\angle TOP + \angle POQ = 180^0$

(ऋजुयुग्म-स्वयंसिद्धम्)

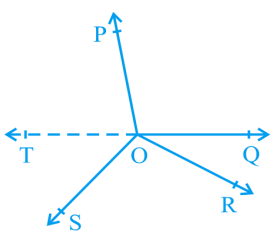
तथैव OS किरणः TOQ रेखायां तिष्ठति ।

अतः $\angle TOS + \angle SOQ = 180^0$ (2)

किन्तु $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

अतः द्वितीयसमीकरणं तु

$$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180^0 \quad \text{- (3)}$$



आकृतिः.6.12

प्रथमतृतीयसमीकरणयोगेन

$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360^0 \quad \text{- (4)}$$

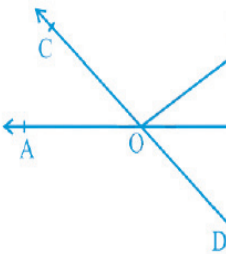
किन्तु $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

अतः चतुर्थसमीकरणं

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^0$$

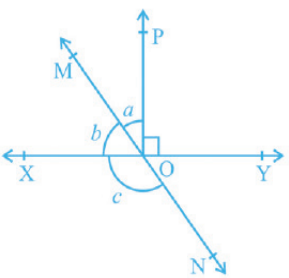
6.1 प्रश्नावलिः

1. 6.13 आकृत्यां AB, CD रेखे O बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिन्तः। यदि $\angle AOC + \angle BOE = 70^0$ तथा $\angle BOD = 40^0$, $\angle BOE$, प्रतिवर्ति - $\angle COE$ च अन्विषन्तु।



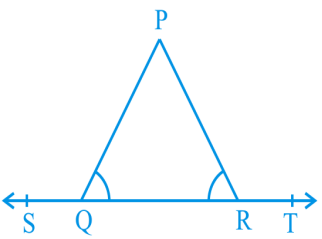
आकृतिः.6.13

2. 6.14 आकृत्यां XY, MN रेखे O बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिन्तः। यदि $\angle POY = 90^0$, तथा $a : b = 2 : 3$, c कोणस्य मानम् अन्विषन्तु।



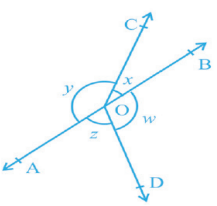
आकृतिः.6.14

3. 6.15 आकृत्यां $\angle PQR = \angle PRQ$ चेत्, $\angle PQS = \angle PRT$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.15

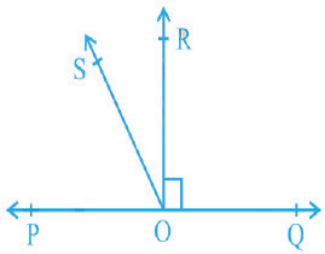
4. 6.16 आकृत्यां यदि $x + y = w + z$ तर्हि AOB काचित् ऋजुरेखा इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.16

5. 6.17 तमायाम् आकृत्यां POQ काचित् रेखा । OR किरणः PQ रेखायाः समालम्बः अस्ति । OS इति अन्यः किरणः OP, OR किरणयोः मध्ये अस्ति । अत्र निरूपयन्तु यत्

$\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS)$

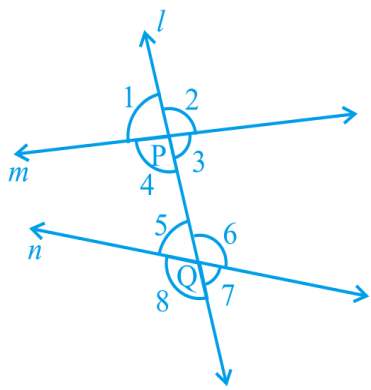


आकृतिः 6.17

6. $\angle XYZ = 64^0$,तथा XY रेखा P बिन्दुपर्यन्तं विस्तारिता अस्ति । एनां सूचनां चित्रयन्तु । यदि YQ किरणः $\angle ZYP$ कोणं अर्धयति, तर्हि $\angle XYQ$, प्रतिवर्ति- $\angle QYP$ इत्येतं कोणम् अन्विषन्तु ।

6.5 समानान्तररेखाः, छेदिका च

अत्र स्मरन्तु - या रेखा, रेखाद्वयं तदधिकं वा विविधबिन्दुषु प्रतिच्छिनत्ति, सा रेखा छेदिका इति उच्यते (6.18 आकृतिं पश्यन्तु) । l इति रेखा m,n रेखाद्वयं क्रमशः P,Q बिन्दुद्वये प्रतिच्छिनत्ति । अतः l रेखा m, n रेखयोः छेदिका अस्ति । अवलोकयन्तु यत् P बिन्दौ, Q बिन्दौ च प्रत्येकं चत्वारः कोणाः निर्मिताः भवन्ति ।



आकृतिः 6.18

वयम् एतान् कोणान् 6.18 चित्रे दर्शितप्रकारेण ∠ 1, ∠ 2,.... ∠ 8 इति कथयामः।

∠ 1, ∠ 2, ∠ 7, ∠ 8 च **बाह्यकोणाः** इति कथयामः।
∠ 3, ∠ 4, ∠ 5, ∠ 6 **अन्तःकोणाः** इति कथयामः।

यदा छेदिका रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति तदा जातानां केषाञ्चन कोणयुग्मानां नामानि पूर्वतनकक्ष्यासु कथितवन्तः इत्येतत् स्मरन्तु । तानि अधोदत्तप्रकारेण सन्ति ।

(a) अनुरूपकोणौ

(i) ∠ 1 तथा ∠ 5 (ii) ∠ 2 तथा ∠ 6

(iii) ∠ 4 तथा ∠ 8 (iv) ∠ 3 तथा ∠ 7

(b) पर्याय-अन्तःकोणौ

(i) ∠ 4 तथा ∠ 6 (ii) ∠ 3 तथा ∠ 5

(c) पर्यायबाह्यकोणौ

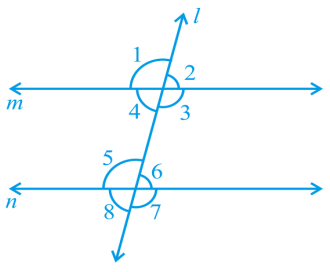
(i) $\angle 1$ तथा $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ तथा $\angle 8$

(d) छेदिकायाः समपार्श्वे विद्यमानौ अन्तःकोणौ

(i) $\angle 4$ तथा $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ तथा $\angle 6$

छेदिकायाः समानपार्श्वे विद्यमानाः अन्तःकोणाः **क्रमानुगत- अन्तःकोणाः अथवा मैत्रीकोणाः अथवा सहान्तःकोणाः** इति उच्यते। बहुधा पर्याय-अन्तःकोणान् सूचयितुम् पर्यायकोणाः इत्येव वदामः।

इदानीं, यदा m रेखा n रेखायाः समानान्तरा अस्ति, तदा युग्मगत-कोणानां मध्ये विद्यमानं सम्बन्धम् अवगच्छामः । भवन्तः जानन्ति यत् भवतां टिप्पणीपुस्तकानाम् अङ्कितरेखाः परस्परं समानान्तराः सन्ति। अतः मापिकया अङ्कन्या च एतासां रेखानुदिशं समानान्तररेखाद्वयं चित्रयन्तु तथा तत् प्रतिछेत्तुं छेदिकां च चित्रयन्तु (6.19 चित्रं पश्यन्तु)



आकृतिः 6.19

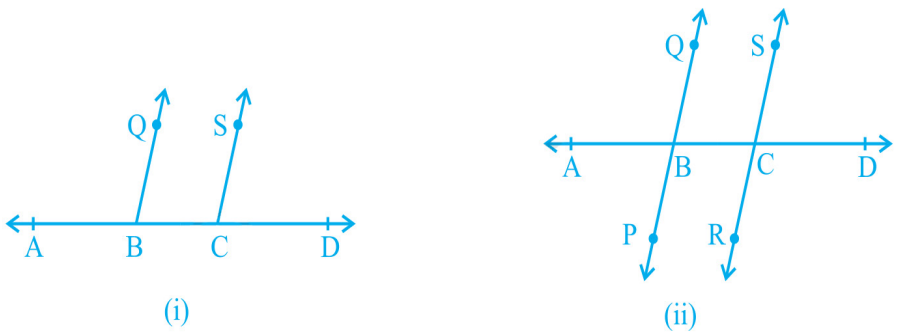
इदानीं कस्यचित् अनुरूपकोणयुग्मस्य मापनं कृत्वा तयोः कोणयोः मध्ये विद्यमानं सम्बन्धम् अन्विषन्तु। भवन्तः पश्यन्ति यत् $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 7$ इतः भवन्तः अधोदत्तम् स्वयंसिद्धं प्राप्तुं शक्नुवन्ति।

6.3 स्वयंसिद्धम् - *यदि काचित् छेदिका समानान्तररेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति, तर्हि अनुरूपकोणानां प्रत्येकम् अपि युग्मं समम् अस्ति।*

6.3 तमं स्वयंसिद्धम् **अनुरूपकोणानां स्वयंसिद्धम्** इति उच्यते । इदानीम् अस्य स्वयंसिद्धस्य विलोमम् अधोदत्तप्रकारेण पश्यामः।

यथा अनुरूपकोणानां युग्मं समं स्यात्, तथा यदि काचित् छेदिका रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति, तर्हि रेखाद्वयं परस्परं समानान्तरम् अस्ति।

एतत् वाक्यं सत्यं किम् ? अधोदत्तप्रकारेण परिशीलयामः। AD रेखां चित्रयित्वा B,C इति बिन्दुद्वयम् अङ्कयन्तु। B,C बिन्द्वोः $\angle ABQ$, $\angle BCS$ इति समानकोणौ चित्रयन्तु {6.20 (i) आकृतिं पश्यन्तु}

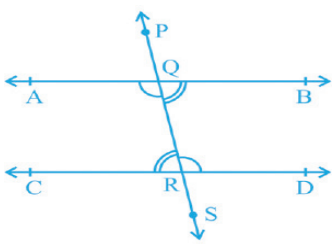


आकृतिः 6.20 (i) (ii)

AD रेखायाः अपरे पार्श्वे QB, SC रेखे विस्तारयन्तु यथा PQ, RS रेखे निर्मिते स्याताम् {6.20(ii) आकृतिं पश्यन्तु}। भवन्तः अवलोकयन्तु यत् रेखाद्वयम् अपि परस्परं न प्रतिच्छिनत्ति । भवन्तः PQ, RS रेखयोः भिन्नबिन्दुषु समालम्बं चित्रयित्वा तेषां दीर्घतां मापयन्तु ।दीर्घता सर्वत्र समाना इति अवलोकयन्ति । अतः द्वे रेखे समानान्तरे स्तः इति निष्क्रष्टुं शक्नुमः। अतः अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धस्य विलोमः अपि सत्यः । अतः अधोदत्तम् स्वयंसिद्धं पश्यामः।

6.4 स्वयंसिद्धम् - *यथा अनुरूपकोणानां युग्मं समं स्यात्, तथा यदि काचित् छेदिका रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति, तर्हि रेखाद्वयं परस्परं समानान्तरम् अस्ति ।*

अनुरूपकोणानां स्वयंसिद्धम् उपयुज्य, यदा छेदिका रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति, तदा जातानां पर्याय-अन्तःकोणानां सम्बन्धम् अवगन्तुं शक्नुमः वा ? । 6.21 तमायाम् आकृत्यां PS छेदिका AB रेखां, CD रेखां च क्रमशः Q, R बिन्द्वोः प्रतिच्छिनत्ति । ∠BQR = ∠QRC, ∠AQR = ∠QRD ?



आकृतिः 6.21

भवन्तः जानन्ति यत् ∠PQA = ∠QRC (अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धम्) - (1)

∠PQA = ∠BQR ? आम् ! (कथम् ?) - (2)

प्रथमद्वितीयसमीकरणतः भवन्तः एतं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति यत् –

∠BQR = ∠QRC

तथैव ∠AQR = ∠QRD

एतं परिणामम् अधोदत्तप्रमेयेन वक्तुं शक्नुमः।

6.2 प्रमेयम् - *यदि काचित् छेदिका समान्तररेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति तर्हि पर्याय-अन्तःकोणानां प्रत्येकम् अपि युग्मं समानं भवति ।*

इदानीं अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धस्य विलोमम् उपयुज्य "यदि पर्याय-अन्तःकोणयोः युग्मं समं स्यात्, तर्हि रेखाद्वयं समानान्तरं भवति" इति निरूपयितुं शक्नुमः किम् ? 6.22 आकृत्यां PS छेदिका AB, CD च रेखे

क्रमशः Q,R बिन्द्वोः प्रतिच्छिनत्ति यथा $\angle BQR = \angle QRC$.

$AB \parallel CD$ वा ?

$\angle BQR = \angle PQA$ (किमर्थम् ?) (1)

किन्तु $\angle BQR = \angle QRC$ (दत्तम्) (2)

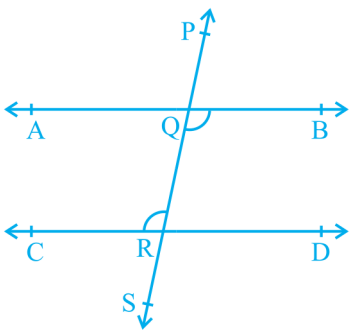
प्रथमद्वितीयसमीकरणाभ्याम्

$\angle PQA = \angle QRC$

किन्तु तौ कोणौ अनुरूपकोणौ स्तः

अतः $AB \parallel CD$ (अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धस्य नियमः)

एतं परिणामम् अधोदत्तप्रमेयरूपेण वक्तुं शक्नुमः।



आकृतिः 6.22

6.3 प्रमेयम् - *यदि काचित् छेदिका रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति यथा पर्याय-अन्तःकोणयुग्मं समं स्यात्, तर्हि रेखाद्वयं समानान्तरम् अस्ति।*

तथैव भवन्तः छेदिकायाः समानपार्श्वे विद्यमानम् अन्तःकोणसम्बद्धप्रमेयद्वयम् अपि प्रासुं शक्नुवन्ति।

6.4 प्रमेयम् - *यदा काचित् छेदिका समानान्तर-रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति, तदा छेदिकायाः समानपार्श्वे जायमानौ अन्तःकोणौ समानौ भवतः।*

6.5 प्रमेयम् - *यदि काचित् छेदिका रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति यथा छेदिकास्य समानपार्श्वे विद्यमानं प्रत्येकम् अन्तःकोणयुग्मं परिपूरकं स्यात्, तर्हि रेखाद्वयं समानान्तरम् अस्ति।*

अत्र स्मरन्तु यत् पूर्वतनवर्गेषु सर्वाणि अपि स्वयंसिद्धानि प्रमेयाणि च क्रियाकलापैः परिशीलितवन्तः। तान् क्रियाकलापान् अत्रापि पुनः आवर्तयामः।

6.6 समानरेखायाः समानान्तररेखाः

यदि रेखाद्वयं समानरेखायाः समानान्तरम् अस्ति तर्हि रेखाद्वयं परस्परं समानान्तरं भवति वा ? परिशीलयामः। 6.23 आकृत्यां रेखाः - $m \parallel l$, अपि च $n \parallel l$ ।

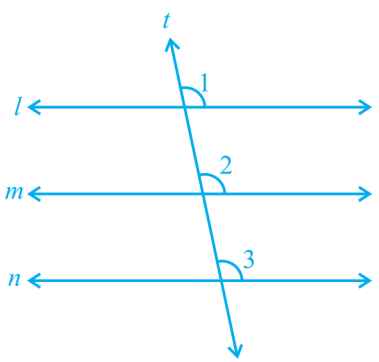
इदानीं l, m, n रेखानां p इति छेदिकां चित्रयन्तु। रेखाः $m \parallel l$, $n \parallel l$.

अतः $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$ च (अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धम्)

अतः $\angle 2 = \angle 3$ (किमर्थम् ?)

किन्तु $\angle 2$, $\angle 3$ अनुरूपकोणौ, समौ च।

अतः वक्तुं शक्नुमः रेखा- m $\parallel$ रेखा- n (अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धस्य विलोमः)। एतं परिणामम् अधोदत्तप्रमेयेण वक्तुं शक्नुमः।

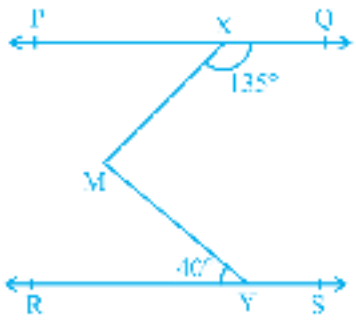


आकृतिः 6.23

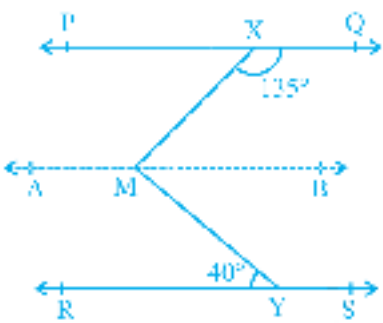
6.6 प्रमेयम् - *या रेखाः समानरेखायाः समानान्तराः सन्ति ताः परस्परं समानान्तराः भवन्ति।*

टिप्पणी – उपरिदत्तं गुणधर्मं रेखाद्वयस्य अपेक्षया अधिकरेखानां कृते अपि विस्तारयितुं शक्नुमः। इदानीं समानान्तररेखासम्बद्धानि कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 4 : 6.24 आकृत्यां यदि PQ || RS, $\angle MXQ = 135^0$, $\angle MYR = 40^0$ च, तर्हि $\angle XMY$ अन्विषन्तु।



आकृतिः 6.24



आकृतिः6.25

समाधानम् – अत्र *m* बिन्दुद्वारा *AB* रेखां PQ रेखायाः समानान्तरं चित्रणीयम् (6.25 आकृतिं पश्यन्तु)। इदानीं *AB* || PQ, PQ || RS च।

अतः $AB \parallel RS$ (किमर्थम् ?)

इदानीं $\angle QXM + \angle XMB = 180^0$

($AB \parallel PQ$, *X*M छेदिकायाः समानपार्श्वे विद्यमानौ अन्तःकोणौ)

किन्तु $\angle QXM = 135^0$

अतः $135^0 + \angle XMB = 180^0$

अतः $\angle XMB = 45^0$ (1)

इदानीं $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$, पर्यायकोणौ)

अतः $\angle BMY = 40^0$ (2)

प्रथमद्वितीयसमीकरणयोः योगेन

$\angle XMB + \angle BMY = 45^0 + 40^0$ इति प्राप्नुमः।

अर्थात् $\angle XMY = 85^0$

उदाहरणम् 5 : यदि काचित् छेदिका रेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति यथा अनुरूपकोणयुग्मस्य अर्धकानि समानान्तराणि भवन्ति, तर्हि रेखाद्वयम् अपि समानान्तरम् अस्ति इति निरूपयन्तु।

समाधानम् – 6.26 आकृत्यां *AD* छेदिका PQ, RS रेखे क्रमशः B, C बिन्द्वोः प्रतिच्छिनत्ति, BE किरणः $\angle ABQ$ इत्यस्य अर्धकं, तथा CG किरणः $\angle BCS$ इत्यस्य अर्धकम्। तथा BE || CG.

PQ || RS इति निरूपणीयम्।

BE किरणः < *ABQ* इत्यस्य अर्धकम् इति दत्तम् अस्ति।

अतः $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

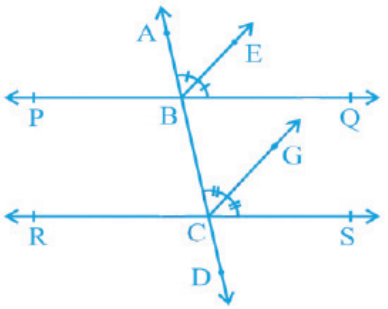
तथैव CG किरणः ∠BCS कोणस्य समद्विभजकः।

अतः $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

किन्तु BE || CG, AD छेदिका च।

अतः $\angle ABE = \angle BCG$

(अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धम्) (3)



आकृतिः 6.26

प्रथमं द्वितीयं च समीकरणं तृतीयसमीकरणे प्रतिष्ठाप्य

$$\frac{1}{2}\angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

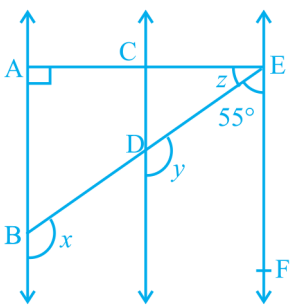
अर्थात् $\angle ABQ = \angle BCS$

किन्तु एतौ कोणौ AD छेदिकेन PQ, RS रेखाभ्यां सह निर्मितौ अनुरूपकोणौ समौ च।

अतः PQ || RS

(अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धस्य विलोमः)

उदाहरणम् 6 : 6.27 आकृत्याम् AB || CD, CD || EF च। अपि च $EA \perp AB$. यदि $BEF = 55^0$, तर्हि x, y, z इत्येतेषां मानानि अन्विषन्तु।



आकृतिः6.27

समाधानम् – $y + 55^0 = 180^0$

(ED छेदिकायाः समानपार्श्वे विद्यमानाः अन्तःकोणाः)

अतः $y = 180^0 - 55^0 = 125^0$

$x = y$ (AB || CD अनुरूपकोण-स्वयंसिद्धम्)

अतः $x = 125^0$

इदानीम् AB || CD, CD || EF इति कारणेन AB || EF अतः $\angle EAB + \angle FEA = 180^0$

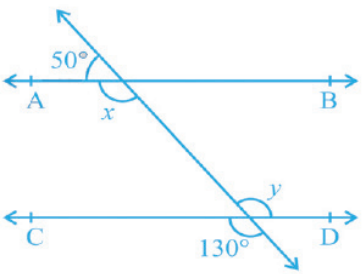
(EA छेदिकास्य समानपार्श्वे विद्यमानाः अन्तःकोणाः)

अतः $90^0 + z + 55^0 = 180^0$

अनेन $z = 35^0$ इति प्राप्नुमः।

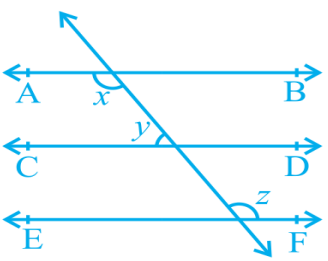
6.2 प्रश्नावलिः

1. 6.28 आकृत्यां x, y इत्यनयोः मानम् अन्विष्य $AB \parallel CD$ इति निरूपयन्तु।



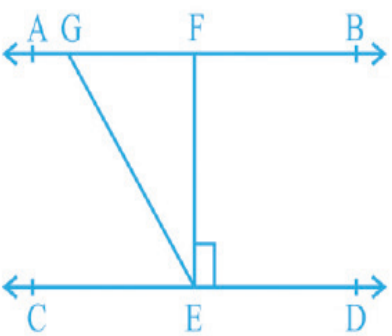
आकृतिः 6.28

2. 6.29 आकृत्यां यदि $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$, y : $z = 3 : 7$ च, तर्हि x मानम् अन्विषन्तु।



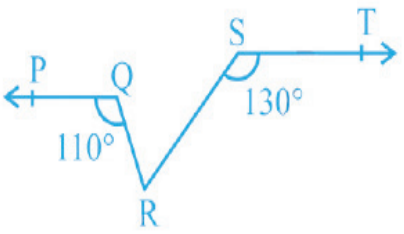
आकृतिः 6.29

3. 6.30 आकृत्यां यदि $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$, $\angle GED = 126^0$ तर्हि $\angle AGE$, $\angle GEF$, $\angle FGE$ च अन्विषन्तु।



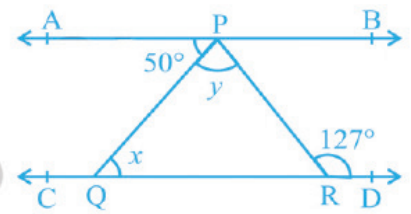
आकृतिः 6.30

4. 6.31 आकृत्यां यदि PQ || ST, $\angle PQR = 110^0$ RST = 130^0 $\angle QRS$ अन्विषन्तु । [**टिप्पणी**:- R इति बिन्दुद्वारा SP रेखायाः काञ्चन समानान्तररेखां चित्रयन्तु]



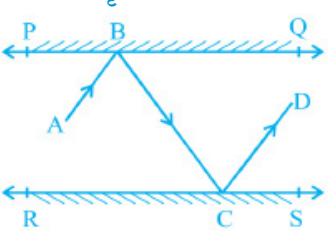
आकृतिः 6.31

5. 6.32 आकृत्यां AB || CD, $\angle APQ = 50^0$ तथा $\angle PRD = 127^0$ तर्हि x, y च अन्विषन्तु ।



आकृतिः 6.32

6. 6.33 आकृत्यां PQ, RS इति दर्पणद्वयं परस्परं समानान्तरम् अस्ति । AB आपतनकिरणः PQ दर्पणं B बिन्दौ स्पृशति । प्रतिफलितकिरणः, BC मार्गानुदिशं गत्वा RS दर्पणं C बिन्दौ स्पृष्ट्वा CD अनुदिशं पुनः प्रतिफलितः भवति । AB || CD इति निरूपयन्तु ।



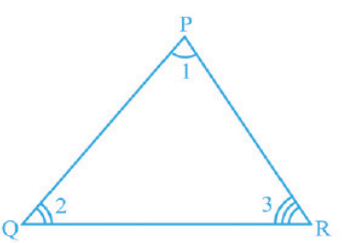
आकृतिः 6.33

6.7 त्रिभुजस्य कोणयोग-गुणधर्मः

पूर्वतनवर्गेषु क्रियाकलापद्वारा भवन्तः पठितवन्तः यत् कस्यचन त्रिभुजस्य कोणानां योगः 1800 इति। एतत् वाक्यं समान्तररेखासम्बद्धैः स्वयंसिद्धैः प्रमेयैः च निरूपयितुं शक्नुमः।

6.7 प्रमेयम् - *त्रिभुजायाः कोणानां योगः 180^0 अस्ति ।*

उपपत्तिः - इदानीं वाक्ये किं दत्तम् इति पश्यामः, अर्थात् – पूर्वसिद्धान्तं पश्यामः । तथा किं निरूपणीयम् इत्यपि पश्यामः। PQR त्रिभुजं दत्तम् अस्ति यस्य कोणाः $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ च (6.34 आकृतिं पश्यन्तु)।

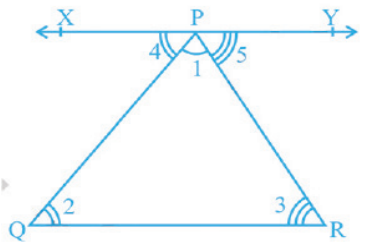


आकृतिः 6.34

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$ इति निरूपणीम् ।

इदानीं, यथा 6.35 आकृत्यां दर्शितं, XPY रेखां QR रेखायाः समान्तरं चित्रयामः या रेखा P-अभिमुखशीर्षद्वारा गच्छति । एतेन समान्तरेखासम्बद्धान् गुणधर्मान् उपयोक्तुं शक्नुमः।

इदानीं XPY काचित् रेखा अस्ति ।



आकृतिः 6.35

अतः $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180^0$ (1)

किन्तु XPY || QR तथा PQ, PR च छेदिके ।

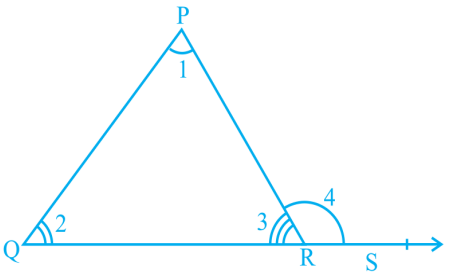
अतः $\angle 4 = \angle 2, \angle 5 = \angle 3$

(पर्यायकोणयुग्मम्)

$\angle 4, \angle 5$ च प्रथमसमीकरणे प्रतिष्ठाप्य,

$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180^0$

अर्थात् $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$



आकृतिः 6.36

अत्र स्मरन्तु यत् भवन्तः त्रिभुजायाः बाह्यकोणनिर्माणविषये पूर्वतनवर्गेषु एव अधीतवन्तः। (6.36 आकृतिं पश्यन्तु)। QR भुजा S बिन्दुपर्यन्तं विस्तारिता अस्ति । $\angle$PRS इत्येषः PQR त्रिभुजस्य **बाह्यकोणः** अस्ति ।

$\angle 3 + \angle 4 = 180^0$ किम् ? (किमर्थम् ?) (1)

अपि च $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$ (किमर्थम् ?) (2)

प्रथमद्वितीयसमीकरणाभ्याम्, $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

एतं परिणामं अधोदत्त-प्रमेयरूपेण वक्तुं शक्नुमः।

6.8 प्रमेयम् - *यदि त्रिभुजस्य काचित् भुजा विस्तारिता, तर्हि तदा निर्मितबाह्यकोणः अभिमुख-अन्तःकोणयोः योगेन समः अस्ति ।*

इदानीम् उपरिदत्तप्रमेयानुगुणं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 7 : 6.37 आकृत्यां यदि QT $\perp$ PR, $\angle$TQR = 40^0, $\angle$SPR = 30^0 च । x, y अन्विषन्तु ।

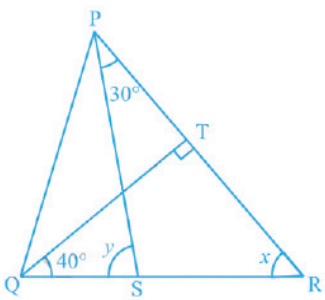
समाधानम् - ΔTQR त्रिभुजे $90^0 + 40^0 + x = 180^0$

(त्रिभुजस्य कोणयोगगुणधर्मः)

अतः $x = 50^0$

इदानीं $y = \angle SPR + x$ (6.8 तमं प्रमेयम्)

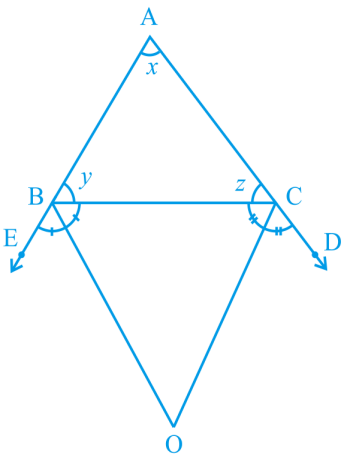
अतः $y = 30^0 + 50^0 = 80^0$



आकृतिः 6.37

उदाहरणम् 8 : 6.38 आकृत्यां ABC त्रिभुजायाः AB, AC भुजे क्रमशः E, D बिन्दुपर्यन्तं विस्तारिते स्तः। यदि $\angle CBE$, $\angle BCD$ इत्यनयोः कोणयोः अर्धके BO, CO च O बिन्दौ मिलतः, तर्हि

$\angle BOC = 90^0 - \frac{1}{2} \angle BAC$ इति निरूपणीयम्।



आकृतिः6.38

समाधानम् - BO किरणः $\angle CBE$ इत्यस्य अर्धकम् अस्ति।

अतः $\angle CBO = \frac{1}{2} \angle CBE$

$= \frac{1}{2}(180^0 - y)$

$= 90^0 - \frac{y}{2}$ (1)

तथैव CO किरणः $\angle BCD$ इत्यस्य अर्धकम् अस्ति।

अतः $\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCD$

$= \frac{1}{2}(180^0 - z) = 90^0 - \frac{z}{2}$ (2)

ΔBOC त्रिभुजे $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180^0$ (3)

प्रथमं द्वितीयं च समीकरणं तृतीयसमीकरणे कल्पयित्वा

$\angle BOC + 90^0 - \frac{z}{2} + 90^0 - \frac{y}{2} = 180^0$

$\angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

$\angle BOC = \frac{1}{2}(y + z)$ (4)

किन्तु $x + y + z = 180^0$ (त्रिभुजस्य कोणयुगगुणधर्मः)

अतः $y + z = 180^0 - x$

अतः चतुर्थसमीकरणम् =

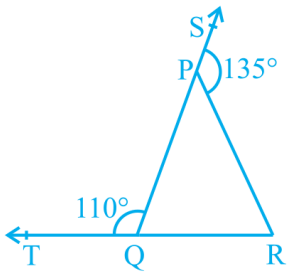
$\angle BOC = \frac{1}{2}(180^0 - x)$

$= 90^0 - \frac{x}{2}$

$= 90^0 - \frac{1}{2} \angle BAC$

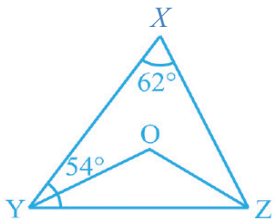
6.3 प्रश्नावलिः

1. 6.39 आकृत्यां ΔPQR त्रिभुजायाः QP, RQ इति भुजे क्रमशः S, T इति बिन्दूपर्यन्तं विस्तारिते स्तः। यदि $\angle SPR = 135^0$, $\angle PQT = 110^0$ च, $\angle PRQ$ कोणम् अन्विषन्तु।



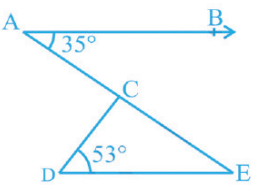
आकृतिः 6.39

2. 6.40 आकृत्यां $\angle X = 62^0$, $\angle XYZ = 54^0$ ΔXYZ त्रिभुजायाः यदि YO, ZO च क्रमशः $\angle XYZ$, $\angle XZY$ इत्यनयोः कोणयोः अर्धके स्तः $\angle OZY$, $\angle YOZ$ अन्विषन्तु।



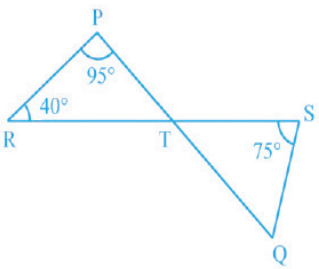
आकृतिः 6.40

3. 6.41 आकृत्यां $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35^0$, $\angle CDE = 53^0$ च। $\angle DCE$ अन्विषन्तु।



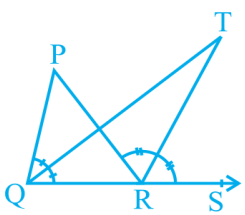
आकृतः 6.41

4. 6.42 आकृत्यां यदि PQ, RS रेखे T बिन्दौ प्रतिच्छिन्तः यथा $\angle PRT = 40^0$, $\angle RPT = 95^0$, $\angle TSQ = 75^0$ च, तर्हि $\angle SQT$ मानम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 6.42

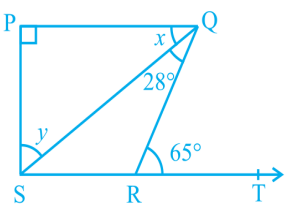
5. 6.43 आकृत्यां यदि $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28^0$ तथा $\angle QRT = 65^0$, तर्हि x, y इत्यनयोः मानम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 6.43

6.44 आकृत्यां ΔPQR त्रिभुजस्य QR भुजा S बिन्दुपर्यन्तं विस्तारिता अस्ति। यदि $\angle PQR$, $\angle PRS$ इत्यनयोः अर्धके T बिन्दौ मिलतः

तर्हि $\angle QTR = \frac{1}{2} \angle QPR$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.44

6.8 सारांशः

अस्मिन् अध्याये अधो-दत्तांशान् अधीतवन्तः –

1. यदि कश्चन किरणः रेखायां तिष्ठति तर्हि तथानिर्मितयोः पार्श्वकोणयोः योगः 180^0 अस्ति (तस्य विलोमः अपि स्मरणीयः)। एषः गुणधर्मः ऋजुयुग्म-स्वयंसिद्धम् इति उच्यते।
2. यदि रेखाद्वयं परस्परं प्रतिच्छिनत्ति तर्हि शीर्षाभिमुखकोणाः समाः भवन्ति।
3. यदि काचित् छेदिका समानान्तररेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति तर्हि
   (i) प्रत्येकं अनुरूपकोणयोः युग्मं समम्
   (ii) प्रत्येकम् पर्याय-अन्तःकोणयुग्मं समम्
   (iii) छेदिकायाः समानपार्श्वे विद्यमानं प्रत्येकम् अन्तःकोणयुग्मं परिपूरकम् अस्ति
4. उभे रेखे समानान्तरे स्तः - यदि काचन छेदिका समानान्तररेखाद्वयं प्रतिच्छिनत्ति, यथा
   (i) किमपि एकम् अनुरूपकोणयुग्मं समम्, अथवा
   (ii) किमपि एकं पर्याय-अन्तःकोणयोः युग्मं समं, अथवा
   (iii) छेदिकायाः समानपार्श्वे विद्यमानं अन्तःकोणयोः अन्यतरं युग्मं परिपूरकम्।
5. ये रेखे कस्याश्चन दत्तरेखायाः समानान्तरे स्तः, ते रेखे परस्परं समानान्तरे भवतः।
6. त्रिभुजस्य कोणत्रयस्य योगः 180^0 अस्ति।

   यदि त्रिभुजस्य काचित् भुजा विस्तारिता, तदा निर्मितः बाह्यकोणः तु अभिमुख-अन्तःकोणयोः योगस्य समः अस्ति।

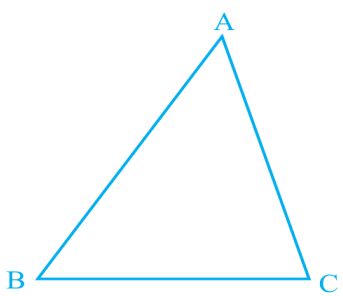
अध्यायः 7

त्रिभुजाः

7.1 प्रस्तावना

भवन्तः पूर्वतनवर्गेषु एव त्रिभुजःनां, तेषां गुणधर्माणां विषये च अधीतनन्तः । भवन्तः जानन्ति यत् तिसृभिः प्रतिच्छिन्न-रेखाभिः निर्मिता-संवृताकृतिः एव त्रिभुजम् इति । कस्याश्चित् त्रिभुजस्य भुजःत्रयं,कोणत्रयं तथा शीर्षत्रयं भवति । उदाहरणार्थम् ABC त्रिभुजौ या Δ ABC इति सूच्यते (7.1 आकृतिं पश्यन्तु) AB, BC, CA इति त्रयः भुजाः, $\angle A$, $\angle$B, $\angle$C इति त्रयः कोणाः, A, B, C इति त्रीणि शीर्षाणि च ।

षष्ठे अध्याये भवन्तः त्रिभुजःनां गुणधर्माणां विषये पठितवन्तः । अस्मिन् अध्याये त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमतानां विषये, सर्वाङ्गसमतानां नियमादीनां विषये तथा इतोऽपि कांञ्चन गुणधर्मान्, असमतानां विषये च पठिष्यन्ति । पूर्वतनवर्गेषु एव एषु गुणधर्मेषु कतिचन परिशीलितवन्तः स्युः, अस्मिन् अध्याये तान् निरूपयामः ।



आकृतिः 7.1

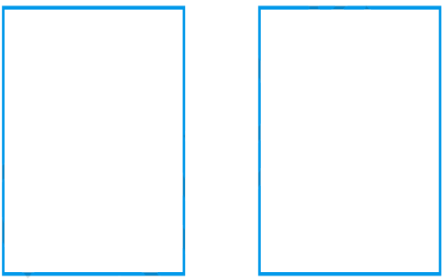
7.2 त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमता

भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः यत् भवतां भावचित्राणां प्रतिद्वयम् समान-आकारयुक्तं तथा सर्वसमम् भवति । तथैव, समान-परिमापयुक्त-कङ्कणद्वयम्, समानवित्तकोषेण दत्तम् स्वयंचालित-वाचनयन्त्रस्य (ATM) धनपत्रद्वयम्, सर्वसमम् भवति । भवन्तः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् किञ्चन-एकरूप्यक-नाणकं, समान-वर्षे-मुद्रिते अपरस्मिन् नाणके स्थाप्यते चेत्, एकं नाणकं अपरं पूर्णतया आवृणोति ।

ईदृशाकृतयः किम् उच्यन्ते इति किम् भवन्तः स्मरन्ति ? निस्सन्देह-रूपेण ईदृश्यः आकृतयः **सर्वाङ्गसम-आकृतयः** इति उच्यन्ते । (सर्वाङ्गसमता नाम सर्वप्रकारेषु अपि समानता अथवा यासाम् आकृतीनाम् आमापः तथा आकारः समाः सन्ति)

इदानीं समत्रिज्यायुतवर्तुलद्वयं चित्रयित्वा एकस्मिन् अपरं स्थापन्तु। अत्र किम् अवलोकयन्ति? ते परस्परं पूर्णतया आवरणं कुरुतः चेत् ते सर्वाङ्गसमवर्तुले इति वदामः।

समानभुजयुते एकस्मिन् वर्गे अपरं वर्गं स्थापयित्वा एतां प्रक्रियाम् अनुवर्तयन्तु (7.2 आकृतिं पश्यन्तु) अथवा समानभुजयुते एकस्मिन् अपरं समबाहुत्रिभुजं स्थापयित्वा प्रक्रियाम् अनुवर्तयन्तु । भवन्तः अवलोकयन्ति यत् वर्गौ परस्परं सर्वाङ्गसमौ, तथैव समबाहुत्रिभुजौ अपि।



आकृतिः 7.2

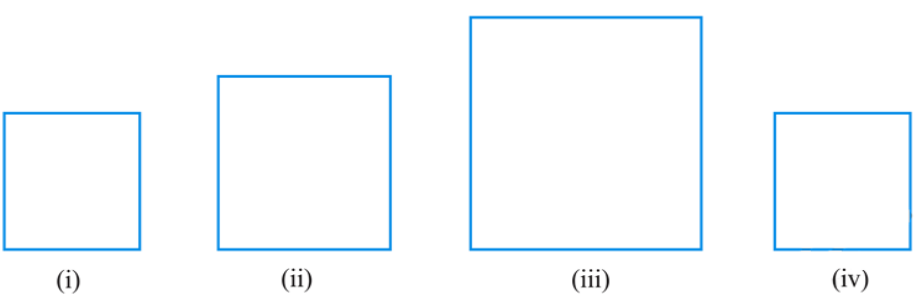
वयं किमर्थं सर्वाङ्गसमत्त्वस्य विषये पठामः इति भवताम् आश्चर्यं स्यात्। प्रशीतकस्य हिम-आधानिकां भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः। अवलोकयन्तु यत् हिम-निर्माणार्थम् प्रयुज्यमानाः संयानाः सर्वाङ्गसमाः। आधानिकायां संयानार्थं प्रयुक्तस्य भाजनस्यापि सर्वाङ्गसम-निम्नानि सन्ति (सर्वेऽपि आयताकाराः अथवा वर्तुलाकाराः अथवा त्रिभुजःकारः अपि स्युः। अतः यदा सर्वसम-पदार्थानां निर्माणं करणीयं तदा सर्वाङ्गसमत्त्वस्य प्रयोगः भवति।

कदाचित् भवतां लेखन्यां विद्यमानायाः पुनःपूरण्याः परिवर्तनं कष्टं स्यात्। एवं कदा भवति? यदा नूतन-पुनःपूरण्याः आमापः पुरातन्या समः न स्यात्। यदि द्वे अपि पुनःपूरण्यौ सर्वाङ्गसमे अथवा सर्वसमे तदा नूतना पुनःपूरणी सुष्ठु प्रयुक्ता भवति।

दैनन्दिनजीवने भवन्तः सर्वाङ्गसमानां बहु-वस्तूनां प्रयोगस्य उदाहरणानि द्रष्टुं शक्नुवन्ति।

सर्वाङ्गसमानाम् आकृतीनाम् इ तोऽपि कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

इदानीं 7.3 (i) तमायाम् आकृत्यां दत्तप्रकारेण अस्य वर्गस्य दत्ताः अनेक-वर्गाः सर्वाङ्गसमाः न वा? 7.3 (ii), 7.3 (iii) आकृत्योः विद्यमानौ बृहत्-वर्गौ 7.3 (i) तमायाम् आकृत्यां दत्तेन वर्गेण सह सर्वाङ्गसमौ न स्तः, किन्तु 7.3 (iv) तमायाम् आकृत्यां दत्तः वर्गः सर्वाङ्गसमः अस्ति।

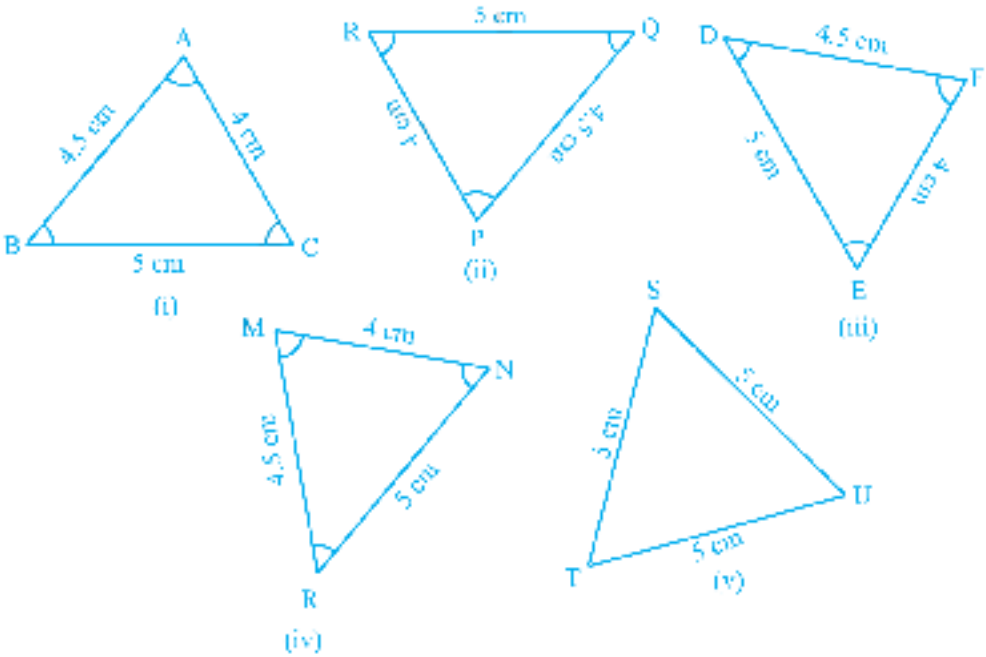


आकृतिः 7.3

इदानीं वयं त्रिभुजयोः मध्ये विद्यमान-सर्वाङ्गसमत्वस्य विषये चर्चयामः ।

भवन्तः जानन्ति यत् एकस्य भुजाः, कोणाः च अपरस्य भुजःभिः, कोणैः च सङ्गताः भवन्ति चेत् ते द्वे त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे इति उच्यते ।

इदानीम् अधोदत्तासु त्रिभुजौषु कानि त्रिभुजःनि 7.4 (i) तमायाम् आकृत्यां दत्तेन ABC त्रिभुजौन सह सर्वाङ्गसमानि सन्ति ?



आकृतिः 7.4

7.4 (ii) आकृतितः 7.4 (v) पर्यन्तं वर्तमानानाम् आकृतीनां कर्तनं कृत्वा तानि भ्रामयित्वा तैः Δ ABC त्रिभुजम् आवरयितुं प्रयत्नं कुर्वन्तु । अवलोकयन्तु यत् 7.4 (ii), 7.4 (iii) 7.4 (iv) तमायाम् आकृत्यां वर्तमानं त्रिभुजं Δ ABC त्रिभुजौन सह सर्वाङ्गसमाः सन्ति । किन्तु 7.4 (v) तमायाम् आकृत्यां वर्तमानं Δ TSU त्रिभुजम् Δ ABC त्रिभुजौन सह सर्वाङ्गसमं नास्ति ।

यदि Δ PQR, Δ ABC इत्यनेन सर्वाङ्गसमम् अस्ति तर्हि Δ PQR $\cong$ Δ ABC इति लिखामः ।

यदा Δ PQR $\cong$ Δ ABC, तदा Δ PQR इत्यस्य भुजाः Δ ABC इत्यस्य भुजःभिः सह सङ्गत-समानाः भवन्ति इति अवगच्छन्तु । तथैव कोणानाम् विषये अपि भवति ।

अर्थात् AB भुजां PQ आवृणोति, QR तु BC भुजःम् आवृणोति, तथा RP CA भुजःम् आवृणोति । $\angle$P इत्येषः कोणः $\angle A$ कोणम् आवृणोति, $\angle$B इत्येतं $\angle$Q आवृणोति, तथा C इत्येतं R

आवृणोति। अपि च, शीर्षयोः मध्ये अपि परस्परम् अनुरूपता अस्ति। अर्थात्, P शीर्षम् *A* इत्यनेन सङ्गतम् अस्ति, Q शीर्षम् B इत्यनेन सह, तथा R शीर्षं C इत्यनेन सह सङ्गतम् अस्ति।

$$P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$$

अत्र अवगच्छन्तु यत् अस्याम् अनुरूपतायाम्, Δ PQR $\cong \Delta$ *A*BCइति भवति। किन्तु Δ QRP $\cong \Delta$ *A*BC इति लेखनं साधु नास्ति।

तथैव 7.4 (iii) आकृत्याम्

$$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC, EF \leftrightarrow CA$$

$$F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B, E \leftrightarrow C$$

अतः Δ FDE $\cong \Delta$ *A*BC,किन्तु Δ DEF $\cong \Delta$ *A*BC साधुः नास्ति।

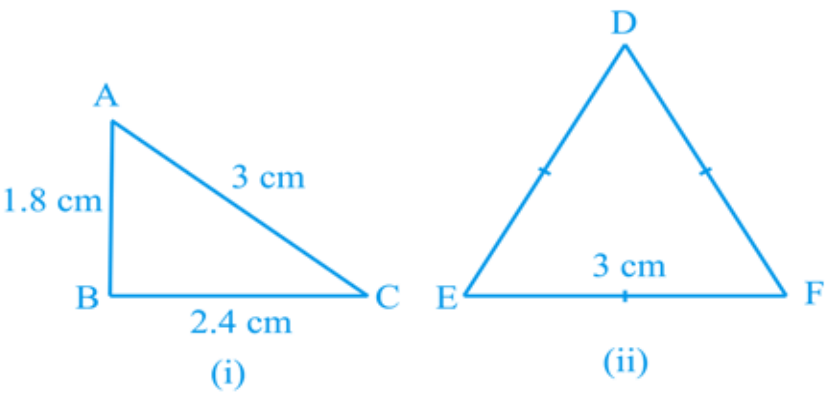
7.4 (iv) तमायाम् आकृत्यां वर्तमानस्य त्रिभुजस्य तथा Δ *A*BC इत्यस्य सङ्गतिं दर्शयन्तु। साङ्केतिकरूपेण त्रिभुजस्य सर्वाङ्गसमतां लेखितुं शीर्षाणां सङ्गतेः साधुलेखनम् अनिवार्यम् अस्ति।

अत्र अवलोकयन्तु यत् **सर्वाङ्गसम-त्रिभुजौषु सङ्गत-भागाः समानाः**। अतः सर्वाङ्गसम-त्रिभुजःनां सङ्गतभागानां वयं सङ्क्षेपेण CPCT इति कथयामः।

7.3 त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमतायाः मानकानि

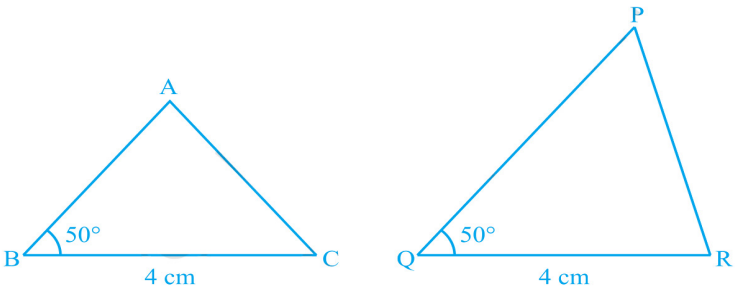
पूर्वतनवर्गेषु भवन्तः त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमतायाः चत्वारि मानकानि अधीतवन्तः। तानि इदानीं स्मरामः।

एकस्याः भुजःयाः मितिः 3 cm यथा स्यात्, तथा त्रिभुजद्वयं चित्रयन्तु। किम् एते त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे ? अवलोकयन्तु यत् ते सर्वाङ्गसमे न स्तः। (7.5 आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः7.5

इदानीं, एकस्याः भुजःयाः मितिः 4 cm, एकस्य कोणस्य मितिः च 50° यथा स्यात्, तथा त्रिभुजद्वयं चित्रयन्तु। (7.6 आकृतिं पश्यन्तु) किम् एते त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे ?



आकृतिः 7.6

अवलोकयन्तु यत् ते सर्वाङ्गसमे न स्तः।

इतोऽपि केषाञ्चन त्रिभुजयुग्मानां कृते एतां प्रक्रियाम् आवर्तयामः।

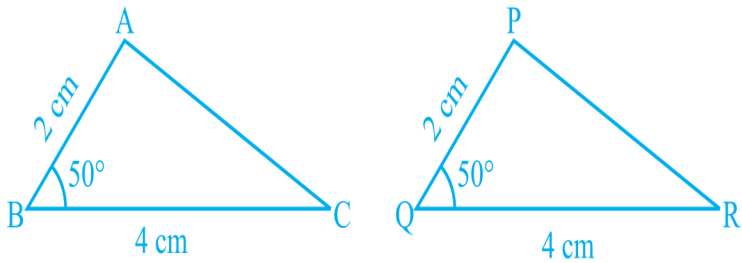
अतः एक-भुजः-युग्मस्य समता अथवा एक-भुजः-युग्मस्य, एक-कोण-युग्मस्य च समता त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमतायाः निरूपणार्थं पर्याप्तं नास्ति।

समकोणानाम् अपर-भुजः-युग्मः अपि समः भवति चेत् किं भवति ?

7.7 तमायाम् आकृत्यां BC = QR, $\angle B = \angle Q$ अपि च $AB = PQ$। इदानीं ΔABC तथा Δ PQR इत्यनयोः सर्वाङ्गसमतायाः विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

पूर्वतनवर्गेभ्यः स्मरन्तु यत् अस्यां स्थित्यां त्रिभुजद्वयम् अपि सर्वाङ्गसमम् अस्ति। 7.7 तमायाम् आकृत्यां दत्तयोः ΔABC तथा Δ PQR त्रिभुजयोः कृते एतत् परिशीलयन्तु।

इतोऽपि केषाञ्चन त्रिभुजःनां कृते एतां प्रक्रियाम् आवर्तयन्तु। भवन्तः अवलोकयन्ति यत् भुजःद्वयस्य, ताभ्याम् अन्तर्गतकोणस्य च समत्वं, त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमता-निरूपणाय पर्याप्तम् इति चिन्तयन्ति वा ? आम्, पर्याप्तम् एव।



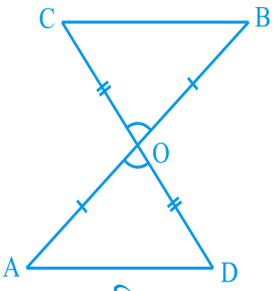
आकृतिः 7.7

एतत् एव त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमतायाः प्रथमं मानकम् अस्ति।

अभिगृहीतः 7.1 {**SAS(भु-को-भु) सर्वाङ्गसमता-नियमः**} *एकस्य त्रिभुजस्य भुजःद्वयं तथा ताभ्याम् अन्तर्गतः कोणः, अपरस्य त्रिभुजस्य भुजःद्वयेन तथा ताभ्याम् अन्तर्गत-कोणेन समः अस्ति चेत्, तत् त्रिभुजद्वयं सर्वाङ्गसम् इति उच्यते।*

एतं परिणामं पूर्वतनपरिणामेभ्यः निरूपयितुं न शक्यते, अतः स्वयंसिद्धम् इति अङ्गीक्रियते। (प्रथमम् अनुच्छेदं पश्यन्तु)

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।



आकृतिः 7.8

उदाहरणम् 1: 7.8 तमायाम् आकृत्यां OA = OB तथा, OD = OC.

(i) Δ AOD $\cong$ Δ BOC (ii) AD || BC इति निरूपयन्तु।

समाधानम् : (i) Δ AOD तथा Δ BOC अनयोः मध्ये द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत्

OA = OB (दत्तम्)

OD = OC (दत्तम्)

अपि च $\angle A$OD तथा $\angle$BOC शीर्षाभिमुखकोणानाम् एकं युग्मं अस्ति। अत्र

$\angle A$OD = $\angle$BOC

Δ AOD $\cong$ Δ BOC {भु-को-भु (SAS) सर्वाङ्गसमनियमेन}

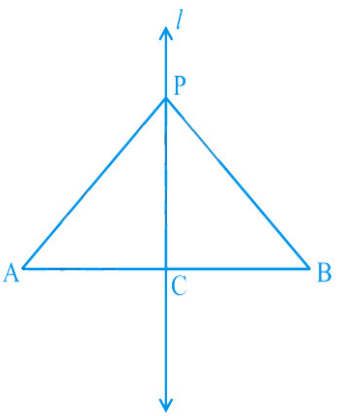
(ii) AOD, BOC सर्वाङ्गसमत्रिभुजयोः सङ्गत-भागाः अपि समाः।

अतः $\angle$OAD = $\angle$OBC. एतौ AB, BC इत्यनयोः रेखाखण्डयोः सम्बद्धौ पर्यायकोणौ भवतः।

अतः AD || BC

उदाहरणम् 2 : AB इति कश्चन रेखाखण्डः, तस्य l इति लम्बार्धकं च भवतु। यदि P बिन्दुः l रेखायाम् अस्ति तर्हि P बिन्दुः A , B बिन्दुभ्याम् समदूरे अस्ति इति निरूपयन्तु।

समाधानम्: - रेखा l $\perp$ AB | तथा AB रेखायाः C इति मध्यबिन्दोः द्वारा गच्छति । अस्माभिः PA = PB इति निरूपणीयम्। Δ PCA, Δ PCB इति त्रिभुजौ स्वीकुर्मः।



आकृतिः 7.9

अत्र AC = BC (AB इत्यनयोः C मध्यबिन्दुः अस्ति)

$\angle$PCA = $\angle$PCB = 90° (दत्तम्)

PC = PC (समानभुजः)

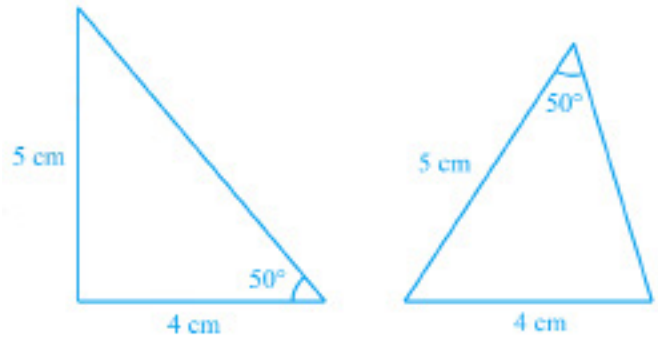
Δ PCA $\cong$ Δ PCB

(भु-को-भु सर्वाङ्गसमत्वनियमेन)

अतः PA = PB

यतः ते सर्वाङ्गसमत्रिभुजयोः अनुरूपभुजे स्तः।

इदानीं, भुजःद्वयं 4cm मितं, 5cm मितं च यथा स्यात्, कश्चन एकः कोणः 50^0 च यथा भवेत्, तथा त्रिभुजद्वयं रचयाम। (7.10 आकृतिं पश्यन्तु)। एते त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे वा ?



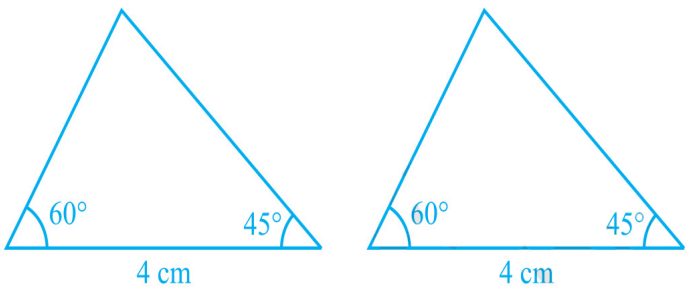
आकृतिः 7.10

पश्यन्तु यत् एते त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे न स्तः ।

एतां प्रक्रियाम् इतोऽपि केषाञ्चन त्रिभुजयुग्मानां कृते आवर्तयन्तु ।

भवन्तः अवगच्छन्ति यत् त्रिभुजःनि सर्वाङ्गसमानि भवितुम् समानकोणाः समानभुजःनां युग्मे अन्तर्भूताः स्युः इति- एषः महत्वपूर्णः अंशः।

अतः भु-को-भु (S*A*S) सर्वाङ्गसम-नियमः युज्यते, न तु को-भु-भु (*A*SS) अथवा भु-भु-को(SS*A*) नियमः। एवं त्रिभुजद्वयस्य निर्माणे प्रयत्नं कुर्वन्तु - ययोः कोणौ 60^0 तथा 45^0 । तथा कोणयोः मध्ये अन्तर्भूता भुजः 4 cm मिता । (7.11 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 7.11

एते त्रिभुजौ कर्तयित्वा एकस्य उपरि अन्यत् स्थापयन्तु । भवन्तः किं पश्यन्ति ? अवलोकयन्तु यत् एकं त्रिभुजम् अपरं पूर्णतया आवृणोति, अर्थात् द्वे अपि त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे स्तः । भवन्तः अवलोकयन्ति यत् त्रिभुजयोः कोणद्वयस्य, ताभ्याम् अन्तर्भूतायाः भुजःयाः च समत्वं त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमत्त्व-निरूपणे पर्याप्तं स्यात् ।

एषः परिणामः तु सर्वाङ्गसमत्वे **कोण-भुज-कोणाः** इति मानदण्डः अस्ति तथा को-भु-को (*A*S*A*) मानदण्डः इति उच्यते । एतं मानदण्डं भवन्तः पूर्वतन-वर्गेषु परिशीलितवन्तः किन्तु अत्र प्रमेयरूपेण कथयित्वा अस्य परिणामं निरूपयामः ।

यतः एषः परिणामः निरूपयितुं शक्यः, अयं प्रमेयनाम्ना आहूयते तथा अस्य निरूपणार्थं सर्वाङ्गसमतायाः भु-को-भु S*A*S -स्वयंसिद्धस्य उपयोगं कुर्मः ।

प्रमेयम् 7.1 को-भु-को **ASA सर्वाङ्गसमतानियमः** *द्वे त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे इति तदा उच्येते यदा एकस्य त्रिभुजस्य कोणद्वयं तथा ताभ्याम् अन्तर्भूता भुजः अनुक्रमं अपरस्य त्रिभुजस्य कोणद्वयेन तथा ताभ्याम् अन्तर्भूतया भुजया सह समम् अस्ति ।*

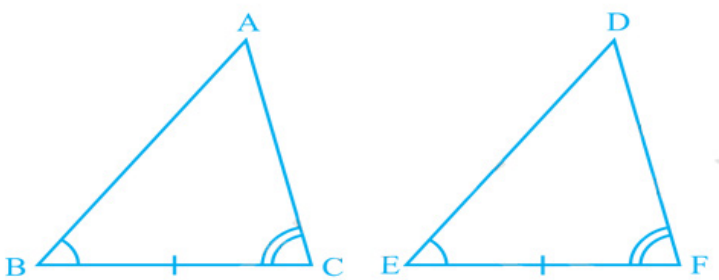
उपपत्तिः *A*BC, DEF इति त्रिभुजद्वयं दत्तम् अस्ति । ∠B = ∠E, ∠C = ∠F तथा BC = EF अस्माभिः Δ *A*BC ≅ Δ DEF इति निरूपणीयम्

त्रिभुजयोः सर्वाङ्गसमत्त्व निरूपणे स्थितित्रयस्य उत्पादनम् भवति इति अवलोकयन्तु ।

प्रथमा स्थितिः : *A*B = DE (7.12 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

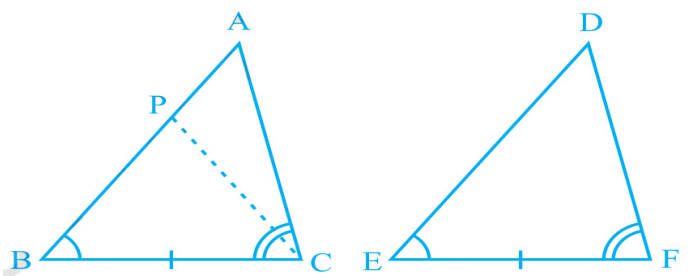
किम् अवलोकयन्ति ? भवन्तः अवलोकयन्ति यत् -

*A*B = DE	(कल्पितम्)
∠B = ∠E	(दत्तम्)
BC = EF	(दत्तम्)
Δ *A*BC ≅ Δ DEF	(भु-को-भु S*A*S सर्वाङ्गसम-नियमेन)



आकृतिः 7.12

द्वितीया-स्थितिः : यदि शक्यते, *A*B > DE भवतु । अतः यथा PB = DE यथा स्यात्, तथा *A*B रेखायां P इति बिन्दुं लिखन्तु । (7.13 आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 7.13

Δ PBC,Δ DEF त्रिभुजयोः पश्यन्तु यत्

$PB = DE$ (निर्माणेन)

$\angle B = \angle E$ (दत्तम्)

$BC = EF$ (दत्तम्)

अतः एवं निष्कर्षं प्राप्तं शक्नुमः.

Δ PBC $\cong$ Δ DEF (भु-को-भु S*A*S सर्वाङ्गसम-नियमेन)

यतः एते त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे, तयोः सङ्गतभागौ अपि समौ भवतः ।

अतः $\angle PCB = \angle DFE$

किन्तु, अत्र दत्तम् अस्ति यत्

$\angle ACB = \angle DFE$

अतः $\angle ACB = \angle PCB$

एतत् भवितुं शक्नोति वा ?

यदि P बिन्दुः *A* बिन्दौ ऐक्यतां याति, तर्हि एव एतत् भवितुं शक्नोति ।

अथवा $BA = ED$

अतः Δ *A*BC $\cong$ Δ DEF (भु-को-भु[S*A*S] सर्वाङ्गसम-नियमेन)

तृतीया स्थितिः : यदि $AB < DE$, वयं $ME = AB$ यथा स्यात्, तथा DE रेखायां M इति बिन्दुं चेतुं शक्नुमः । द्वितीयस्थित्यां दत्तप्रकारेण तर्कस्य आवृत्त्या $AB = DE$ इति निष्कर्षं प्राप्नुमः. अतः Δ *A*BC $\cong$ Δ DEF ।

त्रिभुजद्वयेऽपि द्वे कोण-युग्मे, एकम् अनुरूप-भुजः-युग्मं च समानि सन्ति, किन्तु तत् भुजः युग्मम् अनुरूप-समानकोण-युग्मयोः मध्ये नास्ति, तर्हि एते त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे वा ? भवन्तः अवलोकयन्ति यत् ते सर्वाङ्गसमे एव । अस्य कारणं वक्तुं शक्नुवन्ति वा ?

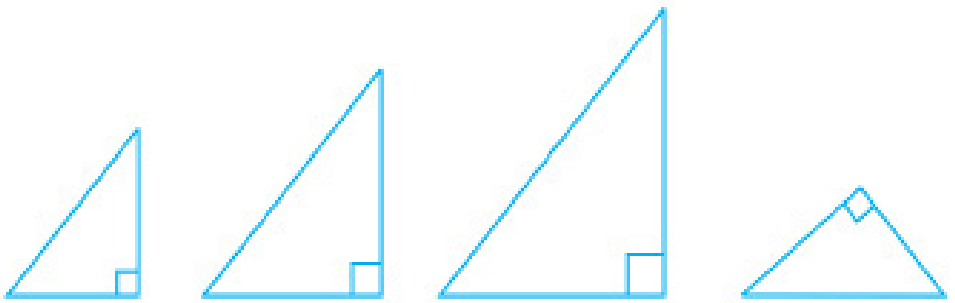
वयं जानीमः यत् त्रिभुजस्य त्रयाणाम् अपि कोणानां योगः 180^0 । अतः यदि द्वे कोण-युग्मे समाने, तर्हि तृतीय-कोण-युग्मम् अपि समानं भवति । (180^0 समान-कोणानां योगः)

अतः *द्वे त्रिभुजौ तदा सर्वाङ्गसमे इति वक्तुं शक्यते यदा कयोश्चित् कोण-द्वयोः युग्मे तथा सङ्गत-भुजःयाः एकं युग्मं समं भवति* । एषः को-को-भु **AAS सर्वाङ्गसमतानियमः** ।

अधोदत्तं क्रियाकलापं कुर्मः -

40^0, 50^0, 90^0 -कोणयुक्तत्रिभुजःनि चित्रयन्तु । ईदृशानि कति त्रिभुजःनि चित्रयितुं शक्नुवन्ति ?

वस्तुतः भवन्तः यावन्ति अपेक्षितानि, तावन्ति भिन्न-भिन्न-दैर्घ्ययुतानि त्रिभुजःनि चित्रयितुं शक्नुवन्ति ।



आकृतिः 7.14

अत्र अवगच्छन्तु यत् त्रिभुजःनि परस्परम् सर्वाङ्गसमानि भवेयुः एव इति नास्ति।

अतः त्रयाणां कोणानां समता त्रिभुजस्य सर्वाङ्गसमत्त्वस्य कृते पर्याप्ता न भवति। अतः त्रिभुजयोः सर्वाङ्गसमत्त्वस्य कृते त्रिषु साम्यभागेषु एका अवश्यं भुजः भवेत्।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 3 : AB रेखाखण्डः CD इति अन्यस्य रेखाखण्डय् समान्तरः अस्ति। AD रेखायाः मध्यबिन्दुः O अस्ति (7.15 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। निरूपयन्तु यत् (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O इत्येषः, BC इत्यस्यापि मध्यबिन्दुः अस्ति।

समाधानम् - (i) ΔAOB, ΔDOC इति त्रिभुजौ स्वीकुर्वन्तु

$\angle ABO = \angle DCO$ (पर्याय-कोणौ यतः $AB \parallel CD$ तथा BC छेदिका)

$\angle AOB = \angle DOC$ (शीर्ष-अभिमुख-कोणौ)

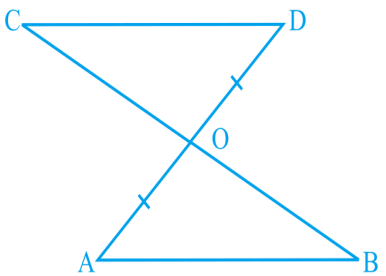
$OA = OD$ (दत्तम्)

अतः $\Delta AOB \cong \Delta DOC$

(को-को-भु[AAS] सर्वाङ्गसमनियमेन)

(ii) $OB = OC$ (सर्वाङ्गसम-त्रिभुजःनां सङ्गत-भाग-समतानियमः [CPCT])

अतः BC इत्यस्य O मध्यबिन्दुः अस्ति।

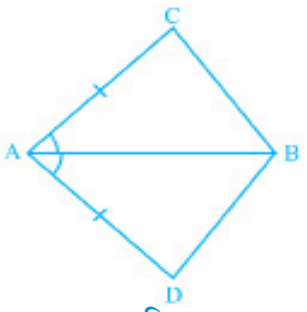


आकृतिः 7.15

प्रश्नावलिः 7.1

1. ACBD चतुर्भुजे, $AC = AD$ तथा AB रेखा A कोणम् अर्धयति। $\Delta\, ABC \cong \Delta\, ABD$ इति निरूपयन्तु।

   BC, BD रेखयोः विषये किं निष्क्रष्टुम् इच्छन्ति?



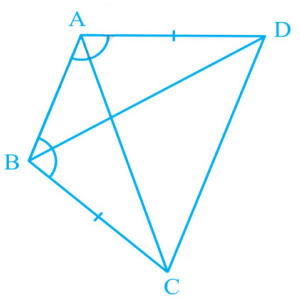
आकृतिः 7.16

2. ABCD चतुर्भुजे, AD = BC तथा $\angle DAB = \angle CBA$। निरूपयन्तु यत्

   (i) $\Delta\, ABD \cong \Delta\, BAC$

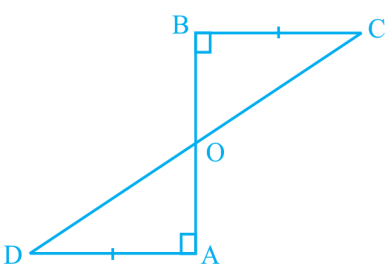
   (ii) $BD = AC$

   (iii) $\angle ABD = \angle BAC$



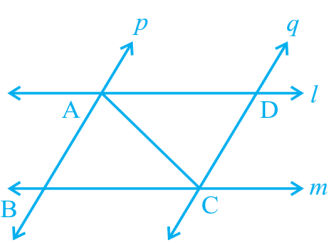
आकृतिः 7.17

3. AB इति रेखाखण्ड्स्य AD, BC इति सम-समालम्बौ (7.18 कृतिं पश्यन्तु)। CD रेखाखण्डः AB रेखाकण्डं अर्धयति इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 7.18

4. l, m इति द्वे समान्तर-रेखे ये p, q इति अन्य-समान्तर-रेखा-युग्मेन प्रतिच्छिन्ने (7.19 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। $\Delta\, ABC \cong \Delta\, CDA$ इति निरूपयन्तु

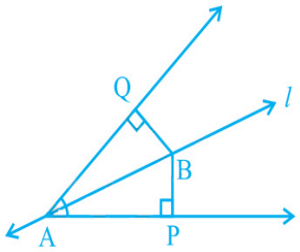


आकृतिः 7.19

5. l रेखा A कोणस्य अर्धकम् । तथा B इति l रेखायां कश्चन बिन्दुः अस्ति । BP, BQ च रेखे B इत्यस्मात् $\angle A$ इत्यस्य कोणस्य भुजयोः समालम्बे चित्रिते स्तः (7.20 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । अत्र निरूपयन्तु यत् -

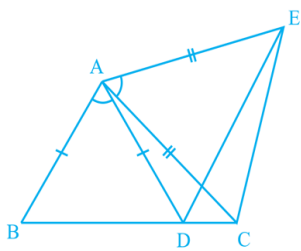
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) BP = BQ अथवा B बिन्दुः $\angle A$ कोणस्य भुजयोः समदूरे अस्ति इति ।



आकृतिः 7.20

6. 7.21 तमायाम् आकृत्यां $AC = AE$, $AB = AD$ तथा $\angle BAD = \angle EAC$. । BC = DE इति निरूपयन्तु ।

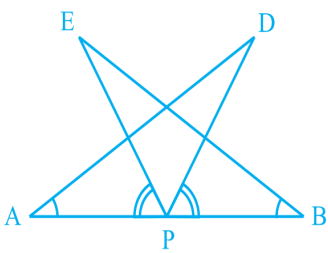


आकृतिः 7.21

7. AB कश्चित् रेखाखण्डः, तथा P अस्य मध्यबिन्दुः अस्ति । D, E बिन्दू AB रेखायाः समानपार्श्वे स्तः यथा $\angle BAD = \angle ABE$ तथा $\angle EPA = \angle DPB$. (7.22 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । अत्र निरूपयन्तु यत्

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

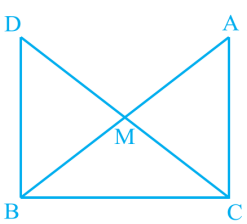
(ii) $AD = BE$



आकृतिः 7.22

8. ABC समकोणत्रिभुजौ C बिन्दौ समकोणः अस्ति । AB कर्णस्य M मध्यबिन्दुः अस्ति । C बिन्दुं M बिन्दुना सह योजयित्वा D बिन्दु-पर्यन्तम् विस्तारितम् अस्ति यथा DM = CM ।

D बिन्दुं B बिन्दुना सह योजयन्तु । (7.23तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । अत्र निरूपयन्तु यत्



आकृतिः 7.23

(i) $\Delta\, AMC \cong \Delta\, BMD$

(ii) $\angle DBC$ समकोण-त्रिभुजम् अस्ति।

(iii) $\Delta\, DBC \cong \Delta\, ACB$

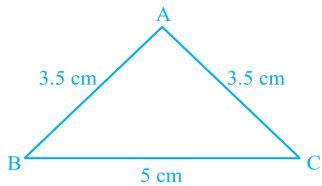
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

7.4 त्रिभुजःनां केचन गुणधर्माः

उपरितने अनुच्छेदे भवन्तः त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमतायाः मानदण्डद्वयं पठितवन्तः। इदानीं वयं तान् गुणधर्मान् अत्र प्रयुज्य समद्विबाहुत्रिभुजस्य गुणधर्मान् पठामः

अधोदत्त-क्रियाकलापं कुर्वन्तु -

एकां त्रिभुजां निर्मान्तु यस्याः भुजःद्वयं समं -3.5cm मितं भवतु तथा तृतीया भुजः 5cm मितं भवतु (7.24 आकृतिं पश्यन्तु) ईदृशं निर्माणं भवन्तः पूर्वतन-वर्गेषु अपि कृतवन्तः। ईदृशानि त्रिभुजःनि कानि इति स्मरन्ति वा ?



आकृतिः 7.24

यस्य त्रिभुजस्य भुजःद्वयं समानं तत् **समद्विबाहु-त्रिभुजम्** इति उच्यते। अतः 7.24 तमायाम् आकृत्यां $\Delta\, ABC$ समद्विबाहु-त्रिभुजम् यत्र $AB = AC$।

इदानीं $\angle B$ तथा $\angle C$ मापयन्तु। किम् अवलोकयन्ति ?

एतं क्रियाकलापं भिन्नभुजःयुत-समद्विबाहु-त्रिभुजःनां कृते आवर्तयन्तु।

भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् समभुजःभिमुखं विद्यमानाः कोणाः समाः भवन्ति इति।

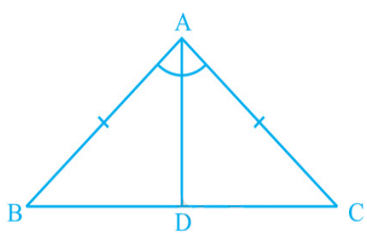
एषः अत्युत्तमः परिणामः अस्ति तथा सर्वेषाम् अपि समद्विबाहु-त्रिभुजःनाम् अयम् परिणामः सत्यः भवति। अस्य निरूपणम् अधोदत-प्रकारेण कर्तुं शक्यते।

7.2 प्रमेयम् - *समभुजःनाम् अभिमुखं विद्यमानाः कोणाः समाः भवन्ति*।

एतं परिणां बहु प्रकारेण निरूपयितुं शक्यते। तेषु एका उपपत्तिः अत्र दत्ता अस्ति।

उपपत्तिः - $\Delta\, ABC$ इति समद्विबाहु-त्रिभुजम् दत्तम् अस्ति यत्र $AB = AC$। $\angle B = \angle C$ इति निरूपणीयम्।

$\angle A$ तथा BC इत्यनयोः अर्धकं चित्रयामः तथा D बिन्दुः अस्य अर्धकस्य प्रतिच्छेद-बिन्दुः इति भवतु ।(7.25 आकृति)



आकृतिः 7.25

$\Delta\, BAD$ तथा $\Delta\, CAD$ त्रिभुजयोः-

$AB = AC$ (दत्तम्)

$\angle BAD = \angle CAD$ (निर्माणेन)

$AD = AD$ (समानम्)

अतः $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (भु-को-भु[SAS] सर्वाङ्गसमनियमेन)

अतः $\angle ABD = \angle ACD$ (सर्वाङ्गसमत्रिभुजःनां सङ्गतकोणौ)

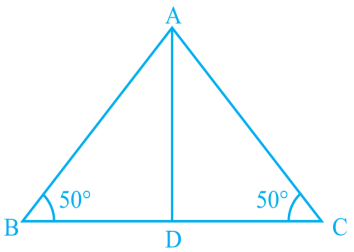
अतः $\angle B = \angle C$

अस्य विलोमः अपि सत्यं वा ?

यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य कोणद्वयं समं भवति,तर्हि तयोः अभिमुखं विद्यमानं भुजःद्वयम् अपि समानं भवति इति निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुवन्ति वा ?

अधोदत्तं क्रियाकलापं कुर्वन्तु।

ΔABC इति त्रिभुजां निर्मान्तु यत्र BC इत्यस्य काचित् दीर्घता भवतु तथा $\angle B = \angle C = 50^0$। $\angle A$ इत्यस्य अर्धकं चित्रयन्तु यत् BC रेखां D बिन्दौ प्रतिच्छिनत्तु ।(7.26 आकृतिः)



आकृतिः 7.26

पत्रकात् त्रिभुजां कर्तयित्वा AD इत्यस्य अनुदिशि पुटीकुर्वन्तु यथा C शीर्षः B शीर्षे स्यात्।

AC, AB इति भुजयोः विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

AC भुजः, AB भुजां पूर्णतया आवृणोति।

अतः $AC = AB$

एतं क्रियाकलापं इतोऽपि केषाञ्चन त्रिभुजःनां कृते आवर्तयन्तु । प्रतिवारं भवन्तः पश्यन्ति यत् समानकोणानाम् अभिमुखं विद्यमानाः भुजाः समाः भवन्ति। अत्र अधः पश्यन्तु।

प्रमेयम् 7.3 - *समानकोणानाम् अभिमुखं विद्यमानाः भुजाः समाः भवन्ति।*

एतत् प्रमेयम् 7.2 प्रमेयस्य विलोमः अस्ति।

एतं परिणामं को-भु-को ASA सर्वाङ्गसमनियमेन निरूपयितुं शक्यते।

एतेषां परिणामानां प्रयोगार्थं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 4 : ABC त्रिभुजौ, $\angle A$ इत्यस्य अर्धकम् AD, BC रेखायाः समालम्बम् अस्ति (7.27 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु। $AB = AC$ तथा ΔABC समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति इति निरूपयन्तु।

समाधानम् - ΔABD तथा ΔACD इत्यत्र

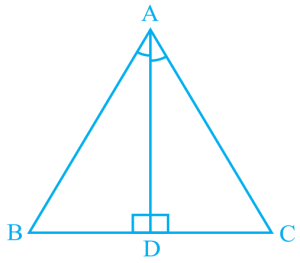
$\angle BAD = \angle CAD$ (दत्तम्)

$AD = AD$ (सामान्यम्)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ (दत्तम्)

अतः $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ASA सर्वाङ्गसमनियमेन)



आकृतिः 7.27

अतः $AB = AC$ (CPCT)

अथवाΔABC समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति।

उदाहरणम् 5 : ABC इत्यस्य AB तथा AC द्वे समभुजे। क्रमशः E तथा F इति बिन्दुद्वयम् अनयोः मध्यबिन्दू स्तः। (7.28 आकृतिं पश्यन्तु) $BF = CE$ इति निरूपयन्तु।

समाधानम् - ΔABF तथा ΔACE त्रिभुजयोः

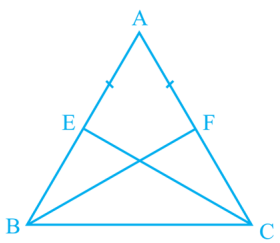
$AB = AC$ (दत्तम्)

$\angle A = \angle A$ (सामान्यम्)

$AF = AE$ (समभुजयोः अर्धौ)

$\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS सर्वाङ्गसमनियमेन)

अतः $BF = CE$ (CPCT)



आकृतिः 7.28

उदाहरणम् 6 : ABC इति समद्विबाहुत्रिभुजौ $AB = AC$। BC इति रेखायां D, E च बिन्दू यथा $BE = CD$। (7.29 आकृतिं पश्यन्तु). $AD = AE$ इति निरूपयन्तु।

समाधानम् - ΔABD तथा ΔACE त्रिभुजयोः

$AB = AC$ (दत्तम्) (1)

$\angle B = \angle C$ (2)

(समभुजयोः अभिमुखकोणाः)

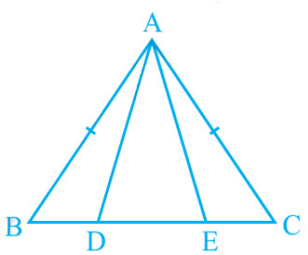
अपि च $BE = CD$

अतः $BE - DE = CD - DE$

अर्थात् $BD = CE$ (3)

अतः $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (भु-को-भु SAS सर्वाङ्गसमनियमेन तथा (1) (2) (3) प्रयोगेण)

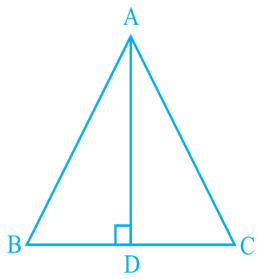
अतः $AD = AE$ (CPCT)



आकृतिः 7.29

प्रश्नावलिः 7.2

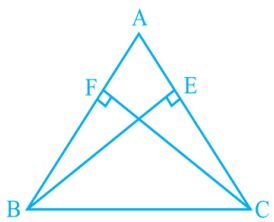
1. ABC समद्विबाहुत्रिभुजौ AB = AC,तथा ∠B, ∠C इति कोणयोः अर्धके O इति बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छेदं प्राप्नुतः। A बिन्दुतः O बिन्दु-पर्यन्तं योजयन्तु।
   (i) OB = OC
   (ii) A कोणं AO रेखा अर्धयति इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 7.30

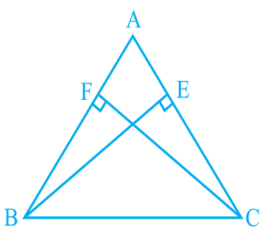
2. Δ ABC त्रिभुजौ BC इत्यस्य समालम्बम् अर्धकम् AD अस्ति। (7.30 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) Δ ABC समद्विबाहुत्रिभुजम् इति निरूपयन्तु यत्र AB = AC

3. ABC समद्विबाहुत्रिभुजौ, BE, CF इति औन्नत्यद्वयं AC, AB इति समभुजयोः क्रमशः चित्रितम् अस्ति। (7.31 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। एते औन्नत्ये समे इति निरूपयन्तु।



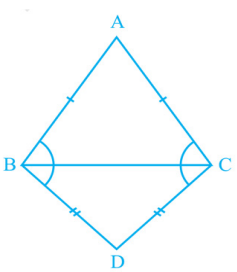
आकृतिः 7.31

4. ABC त्रिभुजौ,BE CF इति औन्नत्यद्वयं AC, AB इति समभुज-पर्यन्तं क्रमशः चित्रितमस्ति। (7.32 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अत्र निरूपयन्तु यत्
   (i) Δ ABE ≅ Δ ACF
   (ii) AB = AC अर्थात् ABC समद्विबाहुत्रिभुजम् अस्ति।



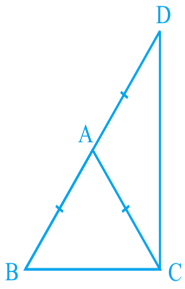
आकृतिः 7.32

5. ABC तथा DBC इति समद्विबाहुत्रिभुजद्वयं BC इति समान-आधारे तिष्ठति। (7.33 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) ∠ABD = ∠ACD इति निरूपयन्तु



आकृतिः 7.33

6. ABC इति समद्विबाहुत्रिभुजौ $AB = AC$ । BA भुजः D बिन्दु-पर्यन्तम् विस्तारिता अस्ति यथा $AD = AB$ । (7.34 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । $\angle BCD$ समकोणः इति निरूपयन्तु।



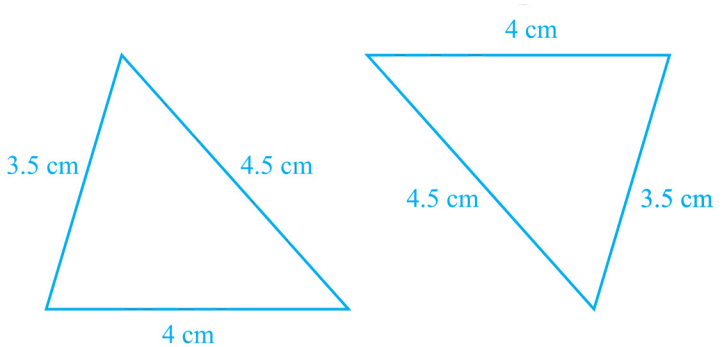
आकृतिः 7.34

7. ABC इति समकोण-त्रिभुजौ $AB = AC$ तथा $\angle A = 90^0$ । $\angle B$, $\angle C$ कोणौ अन्विषन्तु।
8. समबाहु-त्रिभुजस्य प्रत्येकं कोणः अपि 60^0 इति निरूपयन्तु।

7.5 त्रिभुजस्य सर्वाङ्गसमत्त्वस्य इतोऽपि केचन मानदण्डाः

अस्य अध्यायस्य पूर्वभागेषु भवन्तः दृष्टवन्तः यत् एकस्य त्रिभुजस्य सर्वे अपि कोणाः अपरस्याः त्रिभुजस्य सर्वैः कोणैः सह समाः भवन्ति इत्येषः मानदण्डः सर्वाङ्गसमत्त्वस्य साधने न पर्याप्तः इति । भवन्तः चिन्तयेयुः यत् एकस्य त्रिभुजस्य सर्वाः अपि भुजाः अपरस्य त्रिभुजस्य सर्वाभिः भुजःभिः सह समाः भवन्ति चेत्, एषः मानदण्डः सर्वाङ्गसमत्त्वस्य साधने पर्याप्तः किल इति । पूर्वतनवर्गेषु एव निरूपितवन्तं यत् एतत् सत्यम् इति ।

एतस्य निश्चयं कर्तुं 4.5cm, 3.5cm तथा 4cm मित-भुजःयुतत्रिभुजद्वयं निर्मान्तु । (7.35 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । पत्रतः कर्तयन्तु तथा एकस्य उपरि अन्यत् स्थापयन्तु । किम् अवलोकयन्ति ? यदि समभुजाः उपरि स्थाप्यन्ते, ते परस्परं पूर्णम् आच्छादयतः । अतः त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे ।



आकृतिः 7.35

एतां प्रक्रियाम् इतोऽपि केषाञ्चन त्रिभुजःनां कृते आवर्तयन्तु। अनेन सर्वाङ्गसमत्वस्य अन्यं नियमं प्राप्नुमः।

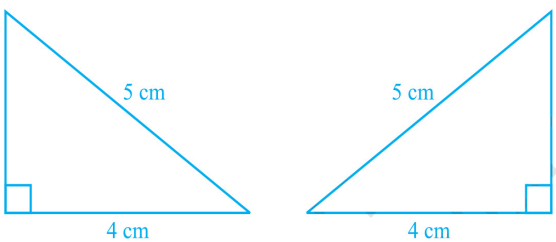
प्रमेयम् 7.4 (भु-भु-भु SSS सर्वाङ्गसम-नियमः) *यदि एकस्य त्रिभुजस्य सर्वे अपि भुजाः अन्यस्य त्रिभुजस्य सर्वाभिः भुजःभिः सह समाः भवन्ति,तर्हि द्वे त्रिभुजै सर्वाङ्गसमे इति उच्येते।*

उचितेन निर्माणेन एतत् प्रमेयम् निरूपयितुं शक्यम्।

पूर्वमेव भु-को-भु[S*A*S]-सर्वाङ्गसम-नियमे दृष्टवन्तः यत् समकोणस्य युग्मं , अनुरूप-सम-भुजयोः युग्मस्य मध्ये अन्तर्भूतं स्यात् इति दृष्टवन्तः। यदि एवं न स्यात् तर्हि द्वे त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे न स्याताम् इति।

एतं क्रियाकलापं कुर्वन्तु।

समकोण-त्रिभुज-द्वयस्य निर्माणं कुर्वन्तु यस्य कर्णः 5cm मितः,तथा एका भुजः 4 cm च स्यात्। (7.36 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 7.36

त्रिभुजौ पत्रकात् कर्तयित्वा, एकं त्रिभुजम् अपरस्याः उपरि स्थापयन्तु यथा समभुजाः उपरि स्युः। यदि आवश्यकं त्रिभुजौ परिवर्तयन्तु। किम् अवलोकयन्ति ?

द्वे त्रिभुजौ परस्परं पूर्णतया आच्छादयतः, अतः ते सर्वाङ्गसमे। एतां प्रक्रियाम् अन्यैः समकोण-त्रिभुजैः सह आवर्तयन्तु। किम् अवलोकयन्ति ?

भवन्तः अवलेकयन्ति यत् द्वे समकोण-त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे - यदि एक-भुजः-युग्मः तथा कर्णः च समाः भवन्ति। एतत् भवन्तः पूर्वतन-वर्गेषु परिशीलितवन्तः।

अत्र अवगच्छन्तु यत् समकोणः अनुरूपभुजयोः अन्तर्भूतः नास्ति।

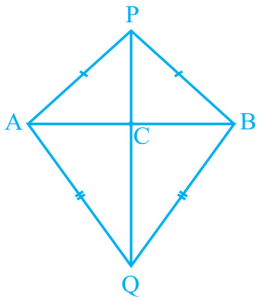
अतः वयम् अधोदत्तं सर्वाङ्गसम-नियमं प्राप्नुमः।

प्रमेयम् 7.5 (लम्बकोण-कर्ण-भुजः ल-क-भु/RHS सर्वाङ्गसमः नियमः) *यदि द्वयोः लम्बकोणत्रिभुजयोः एकस्याः कर्णः तथा एका भुजः अपरकर्णः भुजैः सह समः अस्ति, तर्हि द्वे अपि त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे इति उच्येते।*

अत्र ल-क-भु RHS नाम लम्बकोण-कर्ण-भुजः इति।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 7: AB कश्चित् रेखाखण्डः अस्ति । AB रेखाखण्डस्य अभिमुखम् P, Q इति बिन्दुद्वयं अस्ति यथा प्रत्येकं अपि बिन्दुः A, B इति बिन्दुद्वयात् समदूरे अस्ति । (7.37 आकृतिं पश्यन्तु) । PQ रेखा AB रेखायाः समलम्ब-अर्धकम् अस्ति । आकृतिः 7.37



आकृतिः 7.37

समाधानम् - $PA = PB$ तथा $QA = QB$ इति दत्तम् अस्ति ।

$PQ \perp AB$ तथा PQ रेखा AB रेखां अर्धयति इति निरूपणीयम् । PQ रेखा AB रेखां C इत्यत्र प्रतिच्छिनत्तु ।

अस्याम् आकृत्यां द्वे सर्वाङ्गसम-त्रिभुजौ चिन्तयितुं शक्नुवन्ति वा ?

ΔPAQ तथा ΔPBQ त्रिभुजौ स्वीकुर्मः।

अनयोः त्रिभुजयोः

	$AP = BP$	(दत्तम्)
	$AQ = BQ$	(दत्तम्)
	$PQ = PQ$	(सामान्यम्)
अतः	$\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	(भु-भु-भु SSS नियमः)
अतः	$\angle APQ = \angle BPQ$	(CPCT)

इदानीं वयं ΔPAC, ΔPBC त्रिभुजौ स्वीकुर्मः

अत्र दत्तम् अस्ति

	$AP = BP$	(दत्तम्)
	$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ उपरि निरूपितम्)	
	$PC = PC$	(सामान्यम्)
अतः	$\Delta PAC \cong \Delta PBC$	(भु-को-भु SAS नियमः)
अतः	$AC = BC$	(CPCT) (1)
अपि	$\angle ACP = \angle BCP$	(CPCT)
अपि च	$\angle ACP + \angle BCP = 180^0$	(रैखिकयुग्मः)
अतः	$2\angle ACP = 180^0$	
	$\angle ACP = 90^0$	(2)

(1), (2) – आभ्यां समीकरणाभ्यां PQ रेखा AB रेखायाः समलम्ब-अर्धकम् अस्ति इति सरलतया निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः।

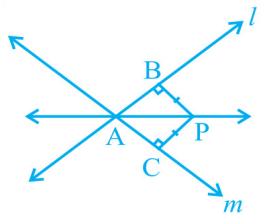
[अत्र अवगच्छन्तु यत् Δ PAQ, Δ PBQ इत्यनयोः सर्वाङ्गसमत्त्वस्य दर्शनं विना अतः ΔPAC $\cong$ Δ PBC इत्यस्य निरूपणं कर्तुं न शक्नुमः यद्यपि AP = BP (दत्तम्), PC = PC (सामान्यम्), तथा $\angle$PAC = $\angle$PBC (Δ APB त्रिभुजौ समभुजःनाम् अभिमुख-कोणाः) यतः एतेभ्यः परिणामेभ्यः भु-भु-को SSA नियमं प्राप्नुमः यः सर्वदा त्रिभुजःनां सर्वाङ्गसमत्त्वस्य कृते सत्यं ऩास्ति ।अपि च, सः कोणः भुजःनां सम-युग्मानां मध्ये अन्तर्भूतः नास्ति ।

इतोऽपि कानिचन उदाहरणानि पश्यामः ।

उदाहरणम् 8 : P इति कश्चित् बिन्दुः यः l, m इति रेखाद्वयतः समदूरे अस्ति तथा ते रेखे A इति बिन्दौ प्रतिच्छिन्तः । (7.38 आकृतिं पश्यन्तु) । रेखा AP तयोः मध्ये विद्यमानं कोणं अर्धयति इति निरूपयन्तु ।

समाधानम् - l, m रेखे A बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिनत्तु । PB $\perp$ l तथा PC $\perp$ m । PB = PC इति दत्तम् अस्ति ।

तथा $\angle$PAB = $\angle$PAC इति निरूपणीयम् ।



आकृतिः 7.38

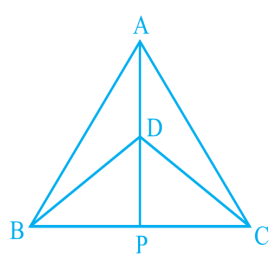
Δ PAB तथा Δ PAC त्रिभुजौ स्वीकुर्मः । अनयोः त्रिभुजयोः

	PB = PC	(दत्तम्)
	$\angle$PBA = $\angle$PCA = 90^0	(दत्तम्)
	PA = PA	(सामान्यम्)
अतः	Δ PAB $\cong$ Δ PAC	(ल-क-भु RHS नियमः)
अतः	$\angle$PAB = $\angle$PAC	(CPCT)

अत्र अवलोकयन्तु यत् एषः परिणामः 7.1 प्रश्नावल्याः पञ्चमस्य प्रश्नस्य परिणामस्य विलोमः अस्ति ।

प्रश्नावलिः 7.3

1. Δ ABC, Δ DBC इति समद्विबाहु-त्रिभुजौ ये BC इति समाने आधारे तिष्ठतः तथा A, D इति शीर्षे BC इत्यस्मात् समदूरे स्तः (7.39 आकृतिं पश्यन्तु) । यदि AD रेखां BC पर्यन्तं विस्तारयामः यथा सा P बिन्दौ प्रतिच्छिन्द्यात् ,



आकृतिः 7.39

(i) Δ ABD $\cong$ Δ ACD

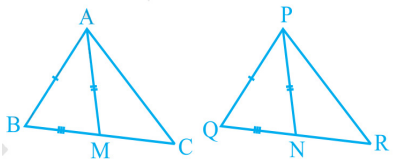
(ii) Δ ABP $\cong$ Δ ACP

(iii) AP रेखा A कोणं D कोणं च अर्धयति इति ।

(iv) AP रेखा ,BC इत्यस्य अर्धकम् अस्ति इति निरूपयन्तु।

2. ABC इति समद्विबाहु-त्रिभुजौ AD इत्येतत् औन्नत्यं, तथा $AB = AC$। अत्र निरूपयन्तु यत्। (i) AD इत्येतत् BC इत्यस्य अर्धकम् अस्ति। (ii) AD इत्येतत् $\angle A$ इत्यस्य अर्धकम् अस्ति।

3. ABC त्रिभुजस्य AB, BC इति भुजःद्वयं, तथा AM इति माध्यकः - क्रमशः PQR त्रिभुजस्य PQ, QR इति भुजःद्वयेन, तथा PN इति माध्यकेन सह समम् अस्ति। (7.40 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। निरूपयन्तु यत्



आकृतिः 7.40

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

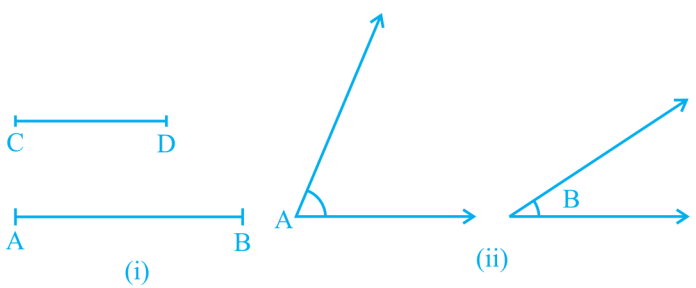
(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

4. ABC त्रिभुजस्य BE, CF इति समानम् औन्नत्यद्वयम्। ल-क-भु RHS सर्वाङ्गसमनियमेन ΔABC इत्येतत् समद्विबाहु-त्रिभुजम् इति निरूपयन्तु।

5. ABC समद्विबाहु-त्रिभुजस्य $AB = AC$। $\angle B = \angle C$ इति निरूपयितुं $AP \perp BC$ चित्रयन्तु।

7.6 त्रिभुजःसु विद्यमानाः असमानताः

एतावत्पर्यन्तं भवन्तः त्रिभुजःनां भुजः-कोणानां समतानां विषये दृष्टवन्तः। कदाचित् वयम् असम-पदार्थान् अपि पश्यामः। अस्माभिः तयोः मध्ये तोलनं करणीयम्। उदाहरणार्थम् 7.41 (i) तमायाम् आकृत्यां AB रेखाखण्डः CD रेखाखण्डस्य अपेक्षया दीर्घतरः अस्ति तथा 7.41 (ii) तमायाम् आकृत्यां A कोणः B कोणस्य अपेक्षया अधिकतरः अस्ति।

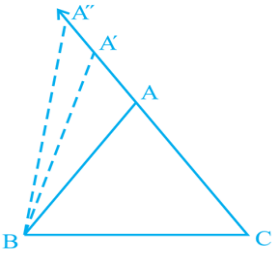


आकृतिः 7.41

इदानीं त्रिभुजःनाम् असम-भुज-कोणानां मध्ये विद्यमानस्य सम्बन्धस्य विषये परिशीलयामः। एतदर्थम् अधोदत्तं क्रियाकलापं कुर्मः।

क्रियाकलापः - कस्मिंश्चित् चित्रफलके सूचीद्वयं B, C इति बिन्दुद्वये बध्नन्तु, तथा सूत्रेण योजयित्वा त्रिभुजस्य BC इति भुजःम् अङ्कयन्तु।

अपरसूत्रस्य एकम् अन्तं C इति बिन्दौ बध्नन्तु तथा अपरस्मिन् मुक्ते कोणे अङ्कनीं बध्नन्तु। A बिन्दुम् अङ्कन्या अङ्कयित्वा ΔABC त्रिभुजं चित्रयन्तु। (7.42 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। इदानीं अङ्कन्याः स्थानं परिवर्त्य CA रेखायां A बिन्दुम् अतिरिच्य A' बिन्दुम् अङ्कयन्तु (अस्य नूतन-स्थानम्)।



आकृतिः 7.42

अतः $A'C > AC$ (दीर्घतानां तोलनम्)

A' बिन्दुं B बिन्दुना सह योजयित्वा $\Delta A'BC$ त्रिभुजं पूरयन्तु। $\angle ABC$ तथा $\angle A'BC$ विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति?

तोलयन्तु। किम् अवलोकयन्ति ?

स्पष्टं यत्, $\angle A'BC > \angle ABC$

CA रेखायाम् अधिकान् बिन्दून् अङ्कयन्तः, BC भुजः युत-त्रिभुजः नि चित्रयित्वा बिन्दून् अङ्कयन्तु।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् AC भुजःयाः दीर्घतां वर्धयन्ति चेत् (A इत्यस्य भिन्न-स्थानानि स्वीकृत्य) तदभिमुखः कोणः अर्थात् $\angle B$ अपि वर्धते।

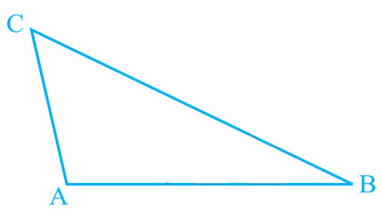
इदानीम् अन्यं क्रियाकलापं कुर्मः।

क्रियाकलापः - एकं विषमबाहु-त्रिभुजं निर्मान्तु।(विषमबाहु-त्रिभुजम् नाम - तस्य सर्वाः भुजाः भिन्नदीर्घतायुताः भवन्ति)। भुजःनां दीर्घताः मापयन्तु।

इदानीं कोणान् मापयन्तु। किंम् अवलोकयन्ति ?

7.43 तमायाम् आकृत्यां ΔABC त्रिभुजौ BC दीर्घतमा भुजः तथा AC लघुतमा भुजः।

अपि च, $\angle A$ दीर्घतमः तथा $\angle B$ लघुतमः अस्ति।



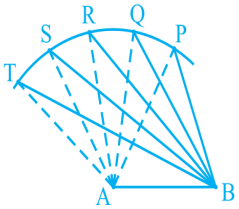
आकृतिः 7.43

एतां प्रक्रियाम् अन्य-त्रिभुजःनां कृते आवर्तयन्तु।

वयं त्रिभुजःनाम् असमतानां विषये मुख्यं परिणामं प्राप्नुमः। तत्तु प्रमेय-रूपेण अधोदत्तम् अस्ति।

प्रमेयम् 7.6 - *यदि त्रिभुजस्य भुजःद्वयम् असमम् तर्हि दीर्घतरायाः भुजःयाः अभिमुखः कोणः दीर्घतरः भवति।*

7.43 तमायाम् आकृत्यां BC रेखायां, यथा CA = CP स्यात् तथा P बिन्दोः स्वीकरणेन भवन्तः एतत् प्रमेयं निरूपयितुं शक्नुवन्ति । अन्यं क्रियाकलापं पश्यामः ।

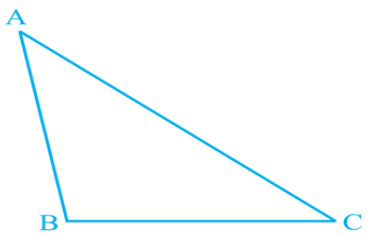


आकृतिः 7.44

क्रियाकलापः - AB रेखाखण्डं चित्रयन्तु । A इति मध्यबिन्दुं स्वीकृत्य कयाचित् त्रिज्यया कञ्चित् चापं निर्मान्तु, तथा तदुपरि P, Q, R, S तथा T बिन्दून् अङ्कयन्तु । आकृतिः 7.44

एतान् बिन्दून् A बिन्दुना सह तथा B बिन्दुना सह योजयन्तु । (7.44 आकृतिं पश्यन्तु) । अवलोकयन्तु यत् यदा P बिन्दुतः T बिन्दु-पर्यन्तं चलामः तदा $\angle A$ कोणः दीर्घः जायमानः भवति । तस्य अभिमुखायाः भुजःयाः किं भवति ? अवलेकयन्तु यत् भुजः याः दीर्घता अपि वर्धमाना भवति । अर्थात् $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ तथा TB > SB > RB > QB > PB ।

इदानीं भिन्नकोणत्रययुतम् असमत्रिभुजं चित्रयन्तु । भुजःनां दीर्घतां मापयन्तु ।(7.45 आकृतिं पश्यन्तु) ।



आकृतिः 7.45

अत्र अवलोकयन्तु यत् दीर्घतमस्य कोणस्य अभिमुख-भुजः दीर्घा अस्ति । 7.45 तमायाम् आकृत्यां B दीर्घतमः कोणः तथा AC दीर्घतमा भुजः ।

एतां प्रक्रियाम् अन्येषां केषाञ्चन त्रिभुजःनां कृते आवर्तयन्तु । 7.6 तमस्य प्रमेयस्य विलोमः अपि सत्यम् इति अस्माभिः ज्ञायते । अनेन प्रकारेण अधोदत्तं प्रमेयं प्राप्नुमः ।

प्रमेयम् 7.7 - *कस्मिंश्चित् त्रिभुजौ दीर्घतरस्य कोणस्य अभिमुखा भुजः दीर्घतरा अस्ति ।*

एतं प्रमेयं विरोध-पद्धत्या निरूपयितुं शक्नुमः ।

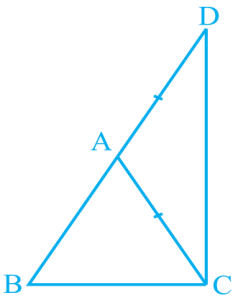
ABC त्रिभुजं स्वीकुर्वन्तु, तस्यां, AB + BC, BC + AC, AC + AB च अन्विषन्तु । किम् अवलोकयन्ति ?

भवन्तः पश्यन्ति यत् AB + BC > AC, BC + AC > AB तथा AC + AB > BC.

एतं क्रियाकलापम् अन्यैः त्रिभुजैः सह आवर्तयन्तु । अनेन भवन्तः अधोदत्तं प्रमेयं प्रति आगच्छन्ति ।

प्रमेयम् 7.8 - *त्रिभुजस्य कस्यचित् भुजःद्वयस्य योगः तृतीयभुजःयाः अपेक्षया दीर्घतरः अस्ति ।*

7.46 आकृत्याम् अवलोकयन्तु यत् Δ ABC त्रिभुजस्य BA भुजः D पर्यन्तं विस्तारिता, यथा $AD = AC$ । $\angle BCD > \angle BDC$ तथा B$A + AC >$ BC इति



आकृतिः 7.46

भवन्तः निरूपयितुं शक्नुवन्ति वा?

अस्य प्रमेयस्य उपपत्तिम् अवगतवन्तः वा ?

एतान् परिणामान् अवलम्ब्य इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः

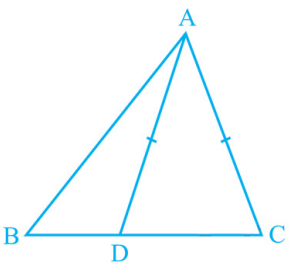
उदाहरणम् 9 : Δ ABC त्रिभुजस्य BC भुजःयां D इति बिन्दुः अस्ति यथा $AD = AC$ (7.47 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) $AB > AD$ इति निरूपयन्तु।

समाधानम् - Δ DAC त्रिभुजौ

$AD = AC$ (दत्तम्)

अतः $\angle ADC = \angle ACD$

(समभुजयोः अभिमुखः कोणः)



आकृतिः 7.47

इदानीं $\angle ADC$ इत्येषः $\angle ABD$ त्रिभुजस्य बाह्यकोणः।

अतः $\angle ADC > \angle ABD$

अथवा $\angle ACD > \angle ABD$

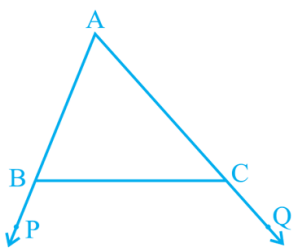
अथवा $\angle ACB > \angle ABC$

अतः $AB > AC$ (Δ ABC त्रिभुजस्य दीर्घतरस्य कोणस्य अभिमुखा भुजः)

अथवा $AB > AD$ ($AD = AC$)

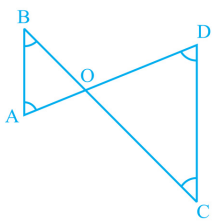
प्रश्नावलिः 7.4

1. समकोण-त्रिभुजौ कर्णः एव दीर्घतमा भुजः इति निरूपयन्तु।
2. 7.48 तमायाम् आकृत्यां Δ ABC त्रिभुजौ AB, AC भुजे क्रमशः P, Q बिन्दु-पर्यन्तं विस्तारिते स्तः। अपि च $\angle PBC < \angle QCB$. $AC > AB$ इति निरूपयन्तु।



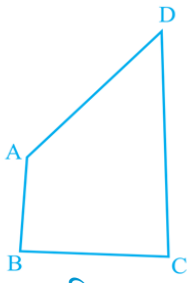
आकृतिः 7.48

3. 7.49 तमायाम् आकृत्यां $\angle B < \angle A$ तथा $\angle C < \angle D$। $AD < BC$ इति निरूपयन्तु।



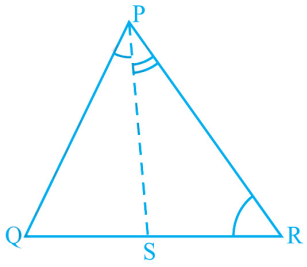
आकृतिः 7.49

4. ABCD चतुर्भुजे AB, CD च क्रमशः लघुतमा, दीर्घतमा च भुजः अस्ति। (7.50 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। $\angle A > \angle C$, तथा $\angle B > \angle D$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 7.50

5. 7.51 तमायाम् आकृत्यां PR>PQ तथा PS रेखा QPR कोणम् अर्धयति।$\angle PSR > \angle PSQ$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 7.51

6. कस्माच्चित् बाह्यबिन्दोः दत्तायाः ऋजुरेखायाः पर्यन्तं चित्रितेषु रेखाखण्डेषु समलम्ब-रेखाखण्डः एव लघुतमः इति निरूपयन्तु।

प्रश्नावलिः 7.5(ऐच्छिकी – न तु परीक्षादृष्ट्या)

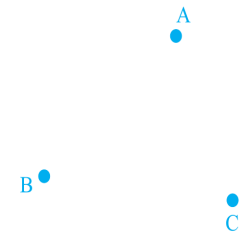
1. ABC इति किमपि त्रिभुजम् अस्ति। ABC त्रिभुजस्य अन्तः स्थाने कञ्चित् बिन्दुं प्रस्थापयतु यथा सः बिन्दुः ABC त्रिभुजस्य सर्वेभ्यः शीर्षेभ्यः समदूरे अस्ति।
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य अन्तः स्थाने कञ्चित् बिन्दुं प्रस्थापयतु यथा सः बिन्दुः त्रिभुजस्य सर्वाभ्यः भुजःभ्यः समदूरे अस्ति।

3. कस्मिंञ्चित् बृहत्-उपवने, जनाः त्रिषु स्थानेषु सङ्गृहीताः सन्ति (7.52 आकृतिः दत्ता अस्ति।

A ; यत्र बालेभ्यः विचलाः तथा दोलाः सन्ति।

B : समीपे यत्र मानव-निर्मिततडागः अस्ति।

C : यत् बृहत्-यान-स्थापनस्य तथा बहिर्गमनमस्य समीपे अस्ति।

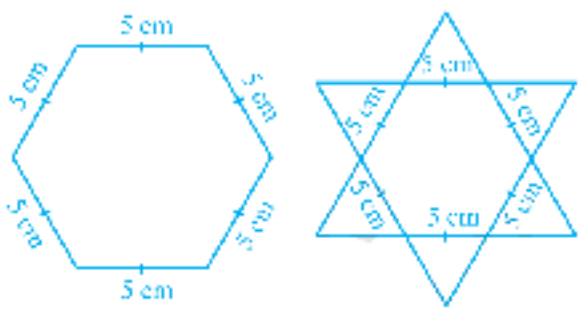


आकृतिः 7.52

पयोहिम-आपणं कुत्र स्थापनीयं यथा अधिकाः जनाः तं प्रति-आगच्छेयुः ?

(टिप्पणी-आपणः *A*, B तथा C तः समदूरे स्यात्)

4. षड्भुजाकार-नक्षत्राकार-रङ्गवल्योः पूरणं कुर्वन्तु (7.53 (i), (ii) आकृती दृष्ट्वा)। ते 1 cm मितयुत-अधिकाधिक-त्रिभुजःभिः पूरयन्तु । प्रत्येकस्याम् आकृत्यां त्रिभुजःनां गणनां कुर्वन्तु। कस्याम् आकृत्याम् अधिकाः त्रिभुजाः सन्ति ?



आकृतिः 7.53

7.7 सारांशः

1. द्वे आकृती सर्वाङ्गसमे भवतः यदा तयोः आकारः तथा आमापः समानः स्यात्।
2. समान-त्रिज्या-युक्त-वर्तुले सर्वाङ्गसमे।
3. समान-भुजः-युक्त-वर्गौ सर्वाङ्गसमौ।
4. यदि *A*BC तथा PQR इति त्रिभुजद्वयम् अधोदत्त-आनुरूप्येण सर्वाङ्गसमं – $A \leftrightarrow$ P, $\leftrightarrow$ Q, तथा C $\leftrightarrow$ R,तर्हि तत् Δ *A*BC $\cong$ Δ PQR इत्येवं सूचयामः।
5. त्रिभुजद्वयं सर्वाङ्गसमम् इति तदा उच्यते यदा एकस्य त्रिभुजस्य भुजःद्वयं तथा एकः अन्तर्गतः

कोणः, अपरस्य त्रिभुजस्य भुजःद्वयेन तथा एकेन अन्तर्गत-कोणेन समः अस्ति ।(भु-को-भु S*A*S सर्वाङ्गसम-नियमः)

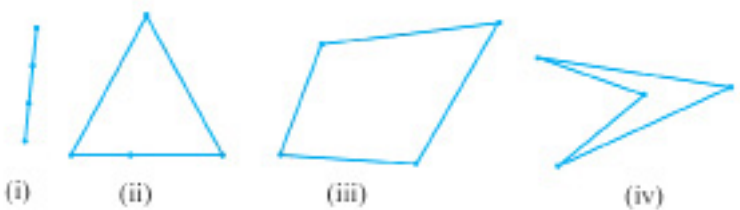
6. द्वे त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे इति तदा उच्यते यदा एकस्य त्रिभुजस्य कोणद्वयं तथा एका अन्तर्भूता भुजः - अपरस्य कोणद्वयेन तथा एकया अन्तर्भूतया भुजया सह समानि सन्ति ((को-भु-को *ASA* सर्वाङ्गसमनियमः)।
7. अतः द्वे त्रिभुजौ तदा सर्वाङ्गसमे इति वक्तुं शक्यते यदा कयोश्चित् कोण-द्वयोः युग्मे तथा अनुरूप-भुजःयाः एकं युग्मं च समं भवति। एतं को-को-भु *AA*S सर्वाङगसमः नियमः इति कथयामः।
8. त्रिभुजस्य समभुजःनाम् अभिमुखं विद्यमानाः कोणाः समाः भवन्ति।
9. त्रिभुजस्य समकोणानाम् अभिमुखं विद्यमानाः भुजाः समाः भवन्ति।
10. समबाहु-त्रिभुजस्य प्रत्येकं कोणः अपि 60^0।
11. यदि एकस्य त्रिभुजस्य सर्वाः अपि भुजाः - अन्यस्य त्रिभुजस्य सर्वाभिः भुजःभिः सह समाः भवन्ति, तर्हि द्वे त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे इति उच्येते।(भु-भु-भु SSS सर्वाङ्गसम-नियमः)
12. यदि द्वयोः समकोणत्रिभुजयोः - एकस्य कर्णः तथा एकः भुजः, अपरस्य कर्णेन तथा भुजया सह साम्यं भजते, तर्हि द्वे अपि त्रिभुजौ सर्वाङ्गसमे इति उच्येते। (ल-क-भु RHS सर्वाङ्गसमः नियमः)
13. त्रिभुजौ दीर्घतर-भुजःयाः अभिमुखं विद्यमानः कोणः दीर्घतरः।
14. त्रिभुजौ दीर्घतर-कोणस्य अभिमुखं विद्यमान-भुजः दीर्घतरा।
15. त्रिभुजस्य कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः योगः तृतीय-भुजःयाः अपेक्षया अधिकः भवति।

अध्यायः 8

चतुर्भुजानि

8.1 प्रस्तावना

षष्ठ - सप्तम - पाठयोः भवन्तः त्रिभुजानां बहून् गुणधर्मान् अधीतवन्तः। अपि च जानीयुः - त्रयाणाम् असरैखिक-बिन्दूनां युग्मानां योजनेन प्राप्ताकृतिः त्रिभुज m इति । इदानीं चतुरः बिन्दून् अङ्कयित्वा तान् युग्मक्रमेण योजयित्वा काम् तमाम् आकृतिं प्राप्नुमः इति पश्यामः।

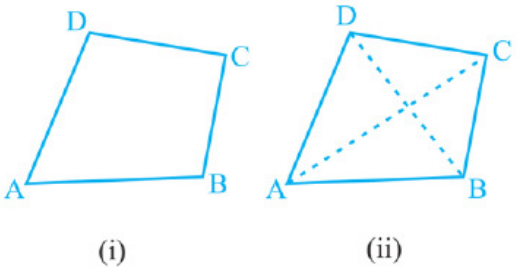


आकृतिः 8.1

अवगच्छन्तु यत् यदि सर्वे बिन्दवः सरैखिकाः (समानरेखायां सन्ति) तर्हि कञ्चन रेखाखण्डं प्राप्नुमः {8.1 (i) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}। यदि चतुर्षु बिन्दुषु त्रयः बिन्दवः सरैखिकाः तर्हि किञ्चन त्रिभुजं प्राप्नुमः {8.1 (ii) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}। यदि चत्रुषु बिन्दुषु त्रयः बिन्दवः सरैखिकाः न तर्हि किञ्चन चतुर्भुजयुत-संवृताकृतिं प्राप्नुमः {8.1 (iii), (iv) तमे आकृती पश्यन्तु}।

ईदृशी आकृतिः क्रमेण चतुर्णां बिन्दूनां योजनेन प्राप्ता अस्ति सा चतुर्भुजम् इति उच्यते । अस्मिन् पुस्तके तादृशानां चतुर्भुजानां विषये एव पठामः ये 8.1 (iii) तमायाम् आकृत्यां दत्ताः। किन्तु 8.1 (iv) तमायाम् आकृत्यां दत्ताः सद्यः न अधीयन्ते ।

कस्मिंश्चित् चतुर्भुजे चत्वारः भुजाः चत्वारः कोणाः चत्वारि शीर्षाणि च भवन्ति {8.2 (i) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}



आकृतिः 8.2

*A*BCD चतुर्भुजे *A*B, BC, CD, D*A* इति चत्वारः भुजाः। *A*, B, C, D इति चत्वारि शीर्षाणि। ∠*A*, ∠B, ∠C, ∠D इति चतुर्भुजस्य शीर्षेषु निर्मिताः चत्वारः कोणाः।

इदानीं अभिमुखशीर्षे *A* तः C पर्यन्तं, तथा B तः D पर्यन्तं योजयन्तु [8.2(ii)तमाम् आकृतिं पश्यन्तु]।

*A*C, BD इति चतुर्भुजस्य द्वौ कर्णौ।

अस्मिन् अध्याये बहुविधप्रकाराणां चतुर्भुजानां विषये, तेषां गुणधर्मविषये च विशेषतः समान्तरचतुर्भुजानां विषये अध्ययनं कुर्मः।

भवन्तः चिन्तयेयुः किमर्थं चतुर्भुज(समान्तरचतुर्भुज)विषये अध्येतव्यम् इति। परितः पश्यन्ति चेत् अवगच्छन्ति यत् बहूनि वस्तूनि चतुर्भुजाकारे सन्ति इति। उदाहरणार्थम् – भूतलं, भित्तिः, छदिः, वर्गप्रकोष्ठ-वातायनानि, कृष्णफलकं, मार्जन्याः प्रत्येकं मुखं, पुस्तकस्य पुटानि, उत्पीठिकायाः उपरितलम् इत्यादीनि। एषु केचन अधोदत्ताः सन्ति (8.3 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



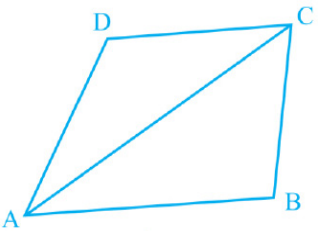
आकृतिः 8.3

यद्यपि दृष्टानि बहु वस्तूनि विशिष्ट-चतुर्भुजाकारे सन्ति, यत् आयतम् इति कथयामः – आयतम् अपि किञ्चन समान्तरचतुर्भुजमेव। समान्तरचतुर्भुजानां सर्वेऽपि गुणधर्माः आयते अपि सङ्गच्छन्ते एव। अतः अस्मिन् अध्याये वयं समान्तरचतुर्भजानां विषये पठामः।

8.2 चतुर्भजस्य कोण-योग-गुण-धर्म:

इदानीं चतुर्भजस्य कोण-योग-गुण-धर्मान् पुनः स्मरामः।

चतुर्भुजस्य कोणानां योगः 360° मितः अस्ति । एतद्विषयं वयं कञ्चन कर्णं चित्रयित्वा, चतुर्भुजं त्रिभुजद्वयेन विभज्य परिशीलयितुं शक्नुमः।



आकृतिः 8.4

$ABCD$ इति किञ्चन चतुर्भुजम् भवतु, तत्र AC कर्णः भवतु (8.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

ΔADC त्रिभुजे कोणानां योगः कः?

जानीमः यत्

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180^0 \qquad (1)$$

ΔABC त्रिभुजायाम्

$$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^0 \qquad (2)$$

समीकरणम् (1) (2) सङ्कलय्य

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^0 + 180^0 = 360^0$$

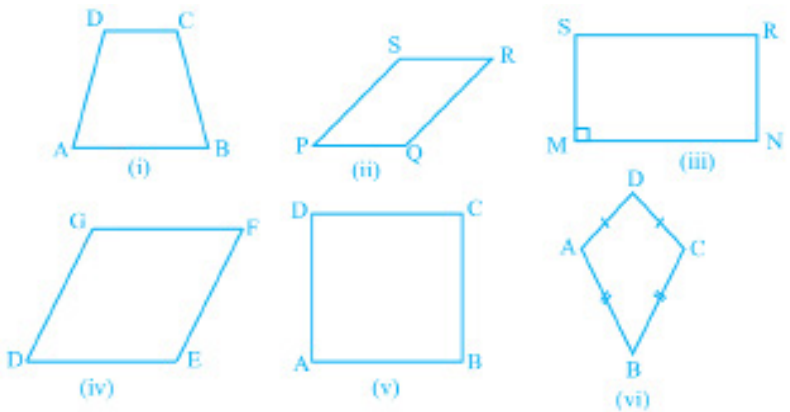
अपि च $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ तथा $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

अतः $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360^0$

अर्थात् चतुर्भुजस्य कोणानां योगः $= 360^0$

8.3 चतुर्भुजस्य प्रकाराः

अधोदत्तानि विविधप्रकारकानि चतुर्भुजानि पश्यन्तु।



आकृतिः 8.5

अवलोकयन्तु यत् –

- 8.5(i) तमायाम् आकृत्यां दर्शिते ABCD चतर्भुजे अभिमुखभुजे AB, CD च समान्तरे स्तः। अस्य नाम विषमचतुर्भुजम् इति उच्यते।

- 8.5 (ii) (iii) (iv) (v) आकृतिषु दर्शितप्रकारेण ABCD चतुर्भुजे अभिमुखभुजयोः युग्मद्वयम् अपि समान्तरम् अस्ति। स्मरन्तु यत् ईदृशं चतुर्भुजं समान्तरचतुर्भुजम् इति उच्यते। अतः 8.5 (ii) तमायाम् आकृत्यां दर्शितं PQRS चतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति। समानतया 8.5 (iii) (iv) (v) आकृतिषु दर्शितानि सर्वाणि अपि समान्तरचतुर्भुजानि सन्तिः।

- 8.5 (iii) तमायाम् आकृत्यां दर्शिते MNRS समान्तरचतुर्भुजे पश्यन्तु यत् - कोणेषु $\angle$M इति कोणः समकोणः अस्ति। ईदृशस्य विशिष्टस्य समान्तरचतुर्भुजस्य नाम किम् ? एतत् आयतम् इति स्मरन्तु।

- 8.5 (iv) तमायाम् आकृत्यां दर्शिते DEFG समान्तरचतुर्भुजे सर्वेऽपि भुजाः समानाः। एताम् आकृतिः समचतुर्भुजम् इति कथयामः।

- 8.5 (v) तमायाम् आकृत्यां दर्शिते ABCD समान्तरचतुर्भुजे $\angle A = 90^0$ तथा सर्वे भुजाः समानाः। अस्य नाम वर्गः इति उच्यते।

- 8.5 (vi) तमायाम् आकृत्यां दर्शिते ABCD चतुर्भुजे AD = CD, AB = CB अर्थात् – द्वयोः आसन्नभुजयोः युग्मे समाने। एतत् समान्तरचतुर्भुजम् नास्ति, एषः आकारः पतङ्गः इति उच्यते। अत्र अवगच्छन्तु यत् वर्गः, आयतं , समचतुर्भुजम् - सर्वेऽपि समान्तरचतुर्भुजानि एव।

- कश्चन वर्गः – आयतं, समचतुर्भुजं च।

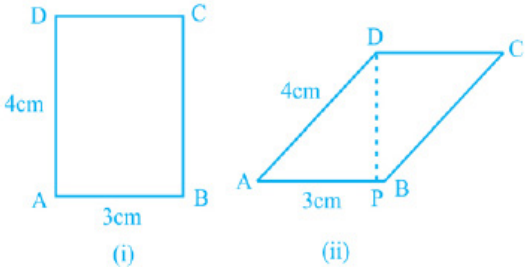
- किञ्चन समान्तरचतुर्भुजम् - विषमचतुर्भुजम् अपि अस्ति।

- कश्चन पतङ्गः समान्तरचतुर्भुजम् नास्ति।

- किञ्चन विषमचतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भुजम् नास्ति (यतः विषमचतुर्भुजे अभिमुखभुजयोः एकम् एव युग्मं समान्तरम् अस्ति। किन्तु समान्तरचतुर्भुजे उभे अपि युग्मे समान्तरे भवतः।)

- किञ्चन आयतं अथवा समचतुर्भुजम् - वर्गः नास्ति।

8.6 तमायाम् आकृत्यां पश्यन्तु। अस्माकं समीपे आयतं, समान्तरचतुर्भुजं च स्तः ययोः 14cm मितः समानः परिधिः।



आकृतिः 8.6

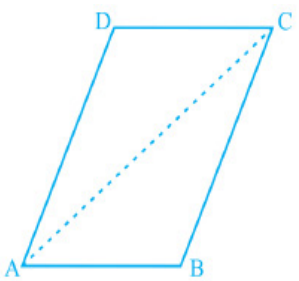
अत्र समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं DP × *A*B. एतत् क्षेत्रफलम् आयत-क्षेत्रफलात्(अर्थात् *A*B × *A*D) न्यूनम् अस्ति। यतः DP < *A*D। सामान्यतया मधुरापणिकाः 'बर्फी' इति मधुरविशेषं समान्तरचतुर्भुजाकारे कर्तयन्ति। यतः समानस्थाल्याम् अधिक-खण्डान् स्थापयितुं शक्यते (अग्रिमवारं यदा बर्फीं खादन्ति तदा अस्य आकारं पश्यन्तु)। इदानीं पूर्वतनकक्ष्यासु अधीतान् समान्तरचतुर्भुजस्य कांश्चन गुणधर्मान् पुनरवलोकयामः।

8.4 – चतुर्भुजस्य गुणधर्माः

इदानीं कञ्चन अभ्यासम् अथवा क्रियाकलापं कुर्मः।

कस्माच्चित् पत्रपटलात् कञ्चन समान्तरचतुर्भुजं तत्कर्णानुदिशं कर्तयन्तु (8.7 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। भवन्तः त्रिभुजद्वयं प्राप्नुवन्ति। एतयोः त्रिभुजयोः विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

एकस्य त्रिभुजस्य उपरि अन्यत् त्रिभुजं स्थापयन्तु। यदि आवश्यकं एकं त्रिभुजं परिभ्रामयन्तु। अत्र किम् अवगच्छन्ति ?



आकृतिः 8.7

अवगच्छन्तु यत् त्रिभुजद्वयम् अपि परस्परं सर्वाङ्गसमम् अस्ति इति।

अन्यैः कैश्चित् समान्तरचतुर्भुजैः एतम् अभ्यासम् आवर्तयन्तु। प्रत्येकवारं भवन्तः अवगच्छन्ति यत् प्रत्येकम् अपि कर्णः समान्तरचतुर्भुजं सर्वाङ्गसम-त्रिभुजद्वयरूपेण विभजति इति।

एतं परिणामम् इदानीं निरूपयामः।

8.1 प्रमेयम् *कस्यचित् चतुर्भुजस्य कर्णः तं सर्वाङ्गसमत्रिभुजाद्वयेन विभजति।*

उपपत्तिः *A*BCD इति किञ्चन चतुर्भुजम्, तत्र *AC* इति कर्णः भवतु (8.8 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अवगच्छन्तु यत् *AC* कर्णः *A*BCD समान्तरचतुर्भुजं त्रिभुजद्वयेन विभजति इति। त्रिभुजयोः नाम *A*BC, CD*A* च। अस्माभिः एते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमत्रिभुजे इति निरूपणीयम्।

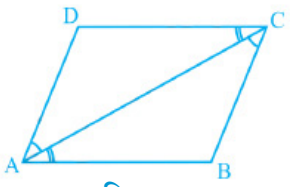
ΔABC, ΔCBD त्रिभुजयोः अवगच्छन्तु यत् $BC \parallel AD$, अपि च AC काचित् छेदिका इति।

अतः $\angle BCA = \angle DAC$ (पर्यायकोणयोः युग्मं)

अपि च $AB \parallel BC$, AC छेदिका च

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (पर्यायकोणयोः युग्मं)

$AC = CA$ (सामान्यम्)



आकृतिः 8.8

$\Delta ABC = \Delta CDA$ (को-भु-को ASA -नियमः)

अथवा AC छेदिका $ABCD$ चतुर्भुजं ABC, CDA इति सर्वाङ्गसमत्रिभुजाभ्यां विभजति। इदानीं $ABCD$ चतुर्भुजस्य अभिमुखभुजान् मापयन्तु। भवन्तः किम् अवगच्छन्ति ?

भवन्तः अवगच्छन्ति यत् $AB = DC$, $AD = BC$ च इति।

एषः चतुर्भुजस्य अन्यः गुणधर्मः यः अधोदत्तः अस्ति।

प्रमेयम् 8.2 कस्मिंश्चित् चतुर्भुजे अभिमुखभुजाः समानाः भवन्ति।

पूर्वमेव भवन्तः निरूपितवन्तः यत् कश्चन कर्णः चतुर्भुजं सर्वाङ्गसमत्रिभुजद्वयेन विभजति इति। अतः सङ्गतभागानां विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? ते समानाः सन्ति।

अतः $AB = DC$, $AD = BC$ च

इदानीम् अस्य परिणामस्य विलोमः कः? भवन्तः पूर्वमेव जानीयुः प्रमेये यत्किमपि दत्तं तत् विलोमे अपि निरूपणीयम् इति। प्रमेये यत्किमपि निरूपणीयं तत्तु विलोमे दत्तं भवति। अतः 8.2 प्रमेयम् अधोदत्तप्रकारेण वक्तुं शक्यते।

यदि कश्चन चतर्भुजः समान्तरचतुरभुजः अस्ति तर्हि तस्य अभिमुखभुजयोः प्रत्येकं युग्मं समानं भवति। अस्य विलोमः तु –

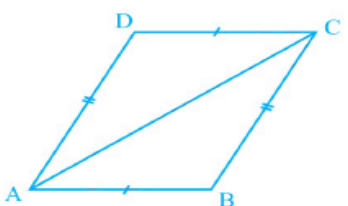
प्रमेयम् 8.3 *यदि कस्यचन चतुर्भुजस्य अभिमुखभुजयोः प्रत्येकं युग्मं समानं तर्हि तत् समान्तरचतुर्भुजं भवति। एतत् किमर्थम् इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा ?*

$ABCD$ चतुर्भुजस्य AB, CD भुजौ समानौ भवताम्। अपि च $AD = BC$ (8.9 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) AC कर्णं चित्रयन्तु।

स्पष्टतया $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (किमर्थम् ?)

अतः $\angle BAC = \angle DCA$

$\angle BCA = \angle DAC$ (किमर्थम् ?)



आकृतिः 8.9

इदानीं भवन्तः $ABCD$ समान्तरचतुर्भुजम् इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा (किमर्थम् ?)

इदानीम् एव दृष्टवन्तः यत् कस्मिंश्चित् समान्तरचतुर्भुजे अभिमुखभुजयोः प्रत्येकं युग्मं समानम् । तथा व्युत्क्रमेण कस्मिंश्चित् चतुर्भुजे अभिमुखभुजयोः प्रत्येकं युग्मं समानं चेत् तत् समान्तरचतुर्भुजम्। अभिमुखकोणयोः युग्मानां कृते अपि समानं परिणामं निष्क्रष्टं शक्नुमः।

कञ्चन समान्तरचतुर्भुजं चित्रयित्वा तस्य कोणान् मापयन्तु । भवन्तः किम् आलोकयन्ति ?

प्रत्येकं अभिमुखकोणः अपि समानः अस्ति । अन्यैः कैश्चित् चतुर्भुजैः एतां प्रक्रियाम् आवर्तयन्तु । अधोदत्तप्रकारेण अन्यं कञ्चन परिणामं प्राप्तुं शक्नुमः।

8.4 प्रमेयम् - *कस्मिंश्चित् समान्तरचतुर्भुजे अभिमुखकोणौ समानौ भवतः।*

इदानीम् अस्य परिणामस्य विलोमः अपि सत्यः वा? आम् । चतुर्भुजस्य कोण-योग-गुणधर्मम्, तथा छेदिकया प्रतिच्छेदित-समान्तररेखानां परिणामान् उपयुज्य विलोमः अपि सत्यम् इति द्रष्टुं शक्नुमः। अतः इदानीम् अधोदत्तप्रमेयं पश्यामः।

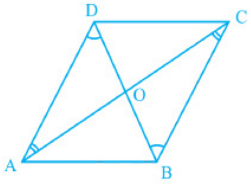
8.5 प्रमेयम् - यदि कस्मिंश्चित् चतुर्भुजे अभिमुखकोणयोः प्रत्येकं युग्मं समानं, तर्हि तत् समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति ।

समान्तरचतुर्भुजस्य अन्यः कश्चन गुणधर्मः अस्ति, तद्विषये पठामः। $ABCD$ समान्तरचतुर्भुजं चित्रयन्तु - यथा O इति बिन्दौ तस्य कर्णद्वयम् अपि प्रतिच्छेदं कुर्यात् (8.10 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) ।

OA, OB, OC, OD इति एतेषां दीर्घतां मापयन्तु ।

भवन्तः किम् अवलोकयन्ति ? द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् –

$$OA = OC, OB = OD$$



आकृतिः 8.10

अथवा O कर्णयोः मध्यबिन्दुः। अन्यैः कैश्चित् समान्तरचतुर्भुजैः एतम् अभ्यासम् आवर्तयन्तु ।

प्रतिवारं भवन्तः पश्यन्ति यत् द्वयोः कर्णयोः मध्यबिन्दुः O एव इति ।

अतः अधोदत्तं प्रमेयं पश्यामः।

8.6 प्रमेयम् - *कस्यचित् समान्तरचतुर्भुजस्य कर्णौ परस्परं अर्धयन्ति ।*

इदानीं चिन्तयन्तु यत् चतुर्भुजे कर्णौ परस्परं अर्धयतः चेत् किं भवति इति ।

तत्किं समान्तरचतुर्भुजम् भवति ? आम् एतत् सत्यम् एव ।

एषः परिणामः 8.6 तमस्य प्रमेयस्य विलोमः अस्ति । सः अधो दत्तः अस्ति ।

8.7 प्रमेयम् *यदि कस्यचन चतुर्भुजस्य कर्णद्वयं परस्परं अर्धयति, तर्हि तत् समान्तरचतुर्भुजम्*

अस्य परिणामस्य कारणम् अधोदत्तप्रकारेण वक्तुं शक्नुवन्ति ।

8.11 तमायाम् आकृत्यां पश्यन्तु यत् OA = OC, OB = OD.

अतः $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (किमर्थम्?)

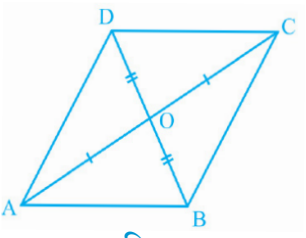
अतः $\angle ABO = \angle CDO$ (किमर्थम्?)

इतः AB || CD इति प्राप्नुमः।

समानतया BC || AD

अतः ABCD समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति ।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः –



आकृतिः 8.11

उदाहरणम् 1 : कस्यचन आयतस्य प्रत्येकं कोणः समः इति निरूपयन्तु ।

समाधानम् - आदौ आयतं चेत् किम् इति स्मरामः ।

आयतं किञ्चन समान्तरचतुर्भुजम् यत्र एकः कोणः समकोणः।

ABCD इति आयतं भवतु यत्र $\angle A = 90^0$

$\angle B = \angle C = \angle D = 90^0$ इति निरूपणीयम्

AD || BC, AB छेदिका अस्ति (8.12 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 8.12

अतः $\angle A + \angle B = 180^0$ (छेदिकायाः समानपार्श्वे अन्तःकोणौ स्तः)

किन्तु $\angle A = 90^0$

अतः $\angle B = 180^0 - \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$

इदानीम् $\angle C = \angle A$, $\angle D = \angle B$ (समान्तरचतुर्भुजस्य अभिमुखकोणाः)

$\angle C = 90^0$, $\angle D = 90^0$ च

उदाहरणम् 2 : कस्यचन समचतुर्भुजस्य कर्णौ परस्परं समालम्बौ इति निरूपयन्तु ।

समाधानम् - ABCD समचतुर्भुजं भवतु (8.13 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

AB = BC = CD = DA इति भवन्तः जानन्ति (किमर्थम्?)

इदानीम् ΔAOD, ΔCOD त्रिभुजायाम्

OA = OC (समान्तरचतुर्भुजस्य कर्णौ परस्परं अर्धयतः)

OD = OD (सामान्यम्)

AD = CD

अतः $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (भु-भु-भु SSS नियमः)

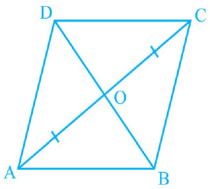
$\angle AOD = \angle COD$ इति प्राप्नुमः (CPCT इति सर्वाङ्गसम नियमः)।

किन्तु $\angle AOD + \angle COD = 180^0$ (रैखिकयुग्मौ)

अतः $2\angle AOD = 180^0$

अथवा $\angle AOD = 90^0$

अतः समचतुर्भुजस्य कर्णौ परस्परं समालम्बौ स्तः।



आकृतिः 8.13

उदाहरणम् 3 : ABC इति समद्विबाहुत्रिभुजायाम् $AB = AC$। AD रेखा PAC इति बाह्यकोणम् अर्धयति। $CD \parallel AB$ (8.14 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ (ii) $ABCD$ समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति इति निरूपयन्तु

समाधानम् - (i) ABC समद्विबाहुत्रिभुजायां $AB = AC$ (दत्तम्)

अतः $\angle ABC = \angle ACB$ (समभुजयोः अभिमुखकोणौ)

अपि च $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (त्रिभुजस्य बाह्यकोणः)

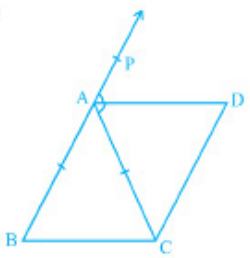
अथवा $\angle PAC = 2\angle ACB$ (1)

इदानीं PAC कोणम् AD अर्धयति

अतः $\angle PAC = 2\angle DAC$ (2)

अतः $2\angle DAC = 2\angle ACB$ (1, 2 समीकरणाभ्याम्)

अथवा $\angle DAC = \angle ACB$



आकृतिः 8.14

(ii) इदानीम् एते समानकोणाः पर्यायकोणयोः किञ्चन युग्मं निर्मान्ति यदा BC, AD रेखाखण्डौ AC छेदिकया प्रतिच्छिन्नौ भवतः।

अतः $BC \parallel AD$

अपि च $BA \parallel CD$ (दत्तम्)

इदानीम् $ABCD$ चतुर्भुजस्य अभिमुखभुजयोः द्वे युग्मे अपि समान्तरे स्तः। अतः $ABCD$ समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति।

उदाहरणम् 4 : p इति छेदिकया l, m इति द्वे समान्तररेखे प्रतिच्छेदिते स्तः (8.15 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अत्र निरूपयन्तु यत् अन्तःकोणयोः अर्धकैः निर्मितं चतुर्भुजम् आयतं इति।

समाधानम् - $PS \parallel QR$ इति दत्तम् अस्ति। तथा छेदिका p, ते रेखे क्रमशः A, C इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं करोति। $\angle PAC$, $\angle ACQ$ इत्यनयोः कोणयोः अर्धकद्वयं B बिन्दौ प्रतिच्छिन्नं भवति। $\angle ACR$, $\angle SAC$ इत्यनयोः

कोणयोः अर्धकद्वयं D इति बिन्दौ प्रतिच्छिन्नं भवति।

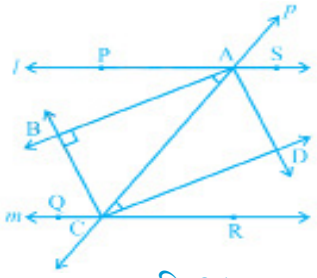
अस्माभिः ABCD चतुर्भुजम् आयतं इति निरूपणीयम्।

इदानीं $\angle$PAC = $\angle A$CR

(पर्यायकोणौ, यतः $l \parallel m$, p = छेदिका च)

अतः $\frac{1}{2} \angle$PAC = $\frac{1}{2} \angle A$CR

$\angle$BAC = $\angle A$CD



आकृतिः 8.15

एतदेकं पर्यायकोणयुग्मम्। AB, DC इति रेखयोः AC इति छेदिका। तथा ते समानाः अपि।

अतः AB $\parallel$ BC।

समानतया BC $\parallel$ AD ($\angle A$CB, $\angle C A$D इति कोणयोः चिन्तनेन)

अतः ABCD चतुर्भुजं समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति।

अपि च $\angle$PAC + $\angle$CAS = 180^0 (रैखिकयुग्मं)

अतः $\frac{1}{2} \angle$PAC + $\frac{1}{2} \angle$CAS = $\frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$ अथवा

$\angle$BAC + $\angle$CAD = 900 अथवा

अथवा $\angle$BAD = 90^0

अतः ABCD समान्तरचतुर्भुजे एकः कोणः 90^0 अस्ति

अतः ABCD आयतम् अस्ति।

उदाहरणम् 5 : कस्यचन समान्तरचतुर्भुजस्य कोणानां अर्धकाः आयतं भवति इति निरूपयन्तु।

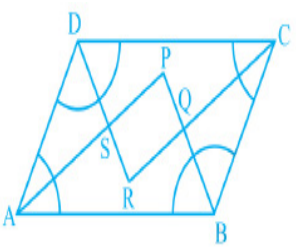
समाधानम् - ABCD समान्तरचतुर्भुजस्य $\angle A$, $\angle$B कोणयोः अर्धके P बिन्दौ, $\angle$B, $\angle$C- कोणयोः अर्धके Q बिन्दौ, $\angle$C, $\angle$D- कोणयोः अर्धके R बिन्दौ, $\angle$D, $\angle A$- कोणयोः अर्धके S बिन्दौ च परस्परं प्रतिच्छिन्नतः (8.16 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

Δ ASD त्रिभुजे किम् अवलोकयन्ति ?

यतः DS रेखाखण्डः D कोणं अर्धयति, AS रेखाखण्डः A कोणं अर्धयति, अतः

$\angle$ DAS + $\angle$ ADS = $\frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle$D

= $\frac{1}{2} (\angle A + \angle$D)



आकृतिः 8.16

$= \frac{1}{2} \times 180^0$

(छेदिकायाः समानपार्श्वे विद्यमानौ $\angle A$, $\angle$D इति अन्तःकोणौ)

$= 90^0$

अपि च $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^0$ (त्रिभुजस्य कोणयोगगुणधर्मः)

अथवा $90^0 + \angle DSA = 180^0$

अथवा $\angle DSA = 90^0$

अतः $\angle PSR = 90^0$ ($\angle DSA$ कोणस्य ऊर्ध्वअभिमुखः इति कारणेन)

समानतया $\angle APB = 90^0$ अथवा $\angle SPQ = 90^0$ इति निरूपयितुं शक्यते ($\angle DSA$ इति कोणस्य यथा निरूपितम्) समानतया $\angle PQR = 90^0$, $\angle SRQ = 90^0$ च.

अतः PQRS कश्चन चतुर्भुजम् अस्ति यत्र सर्वे कोणाः समकोणाः सन्ति।

एतत् आयतं इति निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः वा ? परिशीलयामः। $\angle PSR = \angle PQR = 90^0$, $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^0$ इति निरूपितवन्तः। अतः अभिमुखकोणयोः युग्मद्वयम् अपि समानम्।

अतः PQRS समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति यत्र एकः कोणः (वस्तुतः सर्वे कोणाः) 90^0 अस्ति।

अतः PQRS आयतं अस्ति।

8.5 चतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भुजम् भवितुम् अन्यः कश्चन नियमः

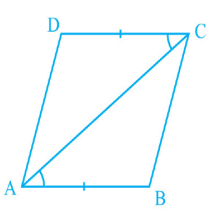
अस्मिन् अध्याये समान्तरचतुर्भुजस्य बहून् गुणधर्मान् पठितवन्तः। अपि च कस्मिंश्चित् चतुर्भुजे एतेषु एकः वा गुणधर्मः पूरितः चेत् तत् समान्तरचतुर्भुजं भवति इति परिशीलितवन्तः।

इदानीम् अन्यं कञ्चित् नियमं पठामः यः न्यूनातिन्यूनं चतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भजं भवितुम् अभीष्टः प्रतिबन्धः अस्ति।

एषः नियमः प्रमेयरूपेण अधः दत्तः अस्ति।

8.8 प्रमेयम् - *किञ्चन चतुर्भुजं समान्तरचतुर्भुजं भवति यदा तस्य अभिमुख-भुजयोः युग्मं समानः समान्तरः च।*

8.17 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु यत्र $AB = CD$, $AB \parallel CD$ च। इदानीम् AC कर्णं चित्रयामः। भवन्तः निरूपयितुं शक्नुवन्ति यत् $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (भु-को-भु SAS नियमानुसारम्)

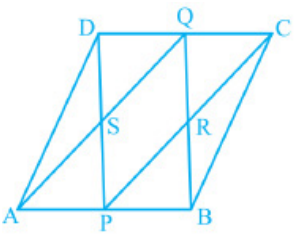


आकृतिः 8.17

अतः $BC \parallel AD$ (किमर्थम् ?)

इदानीं समान्तरचतुर्भुजस्य एतं गुणधर्मं प्रयोक्तुं किञ्चन उदाहरणं स्वीकुर्मः।

उदाहरणम् 6 : ABCD इति समान्तरचतुर्भुजे AB, CD इति अभिमुखभुजयोः क्रमशः P,Q च मध्यबिन्दू स्तः (8.18 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। यदि AQ रेखा DP रेखां S बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति, BQ रेखा CP रेखां R बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति, तर्हि –



आकृतिः 8.18

(i) APCQ समान्तरचतुर्भुजम्

(ii) DPBQ समान्तरचतुर्भुजम्

(iii) PSQR समान्तरचतुर्भुजम् इति निरूपयन्तु।

समाधानम् - (i) APCQ चतुर्भुजे

AP || QC (AB || CD) (1)

$AP = \frac{1}{2} AB$, $CQ = \frac{1}{2} CD$ (दत्तम्)

अपि च AB = CD (किमर्थम् ?)

अतः AP = QC (2)

अतः APCQ समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति (1,2 समीकरणतः, तथा 8.8 प्रमेयतः)

(ii) समानतया DPBQ चतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति यतः DQ || PB, DQ = PB च

(iii) PSQR चतुर्भुजे

SP || QR (SP रेखा DP रेखायाः भागः, QR रेखा QB रेखायाः भागः)

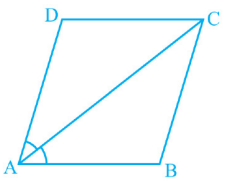
समानतया SQ || PR

अतः PSQR समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति।

8.1 प्रश्नावलिः

1. कस्यचन चतुर्भुजस्य कोणाः 3:5:9:13 इति अनुपाते सन्ति। चतुर्भुजस्य सर्वान् कोणान् अन्विषन्तु।
2. यदि कस्यचन समान्तरचतुर्भुजस्य कर्णौ समानौ तर्हि तत् आयतम् इति निरूपयन्तु।
3. यदि कस्यचन चतुर्भुजस्य कर्णौ समकोणे परस्परम् अर्धयतः, तर्हि तत् समचतुर्भुजम् इति निरूपयन्तु।
4. कस्यचित् वर्गस्य कर्णौ समानौ, अपि च तौ परस्परं समकोणे अर्धयतः इति निरूपयन्तु।
5. यदि कस्यचन चतुर्भुजस्य कर्णौ समानौ, अपि च तौ समकोणयोः अर्धयतः तर्हि सः वर्गः इति निरूपयन्तु।

6. ABCD समान्तरचतुर्भुजस्य AC कर्णः A कोणं अर्धयति (8.19 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)
   (i) सः कर्णः ∠C कोणम् अपि अर्धयति इति निरूपयन्तु।
   (ii) ABCD किञ्चन समचतुर्भुजम् इति निरूपयन्तु।

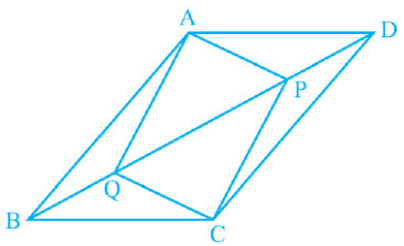


(आकृतिः 8.19)

7. ABCD किञ्चन समचतुर्भुजम् अस्ति। AC कर्णः ∠A कोणं ∠C कोणं च अर्धयति इति निरूपयन्तु। तथा BD कर्णः ∠B कोणं ∠D कोणं च अर्धयति इति निरूपयन्तु।

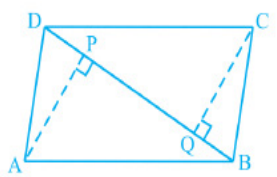
8. ABCD आयते AC कर्णः ∠A, ∠C कोणौ अर्धयति। (i) ABCD कश्चन वर्गः (ii) BD कर्णः ∠B, ∠D कोणौ अर्धयति इति निरूपयन्तु।

9. ABCD समान्तरचतुर्भुजे BD कर्णे P, Q बिन्दू स्वीकुर्मः, यथा DP = BQ (8.20 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)
   (i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$
   (ii) $AP = CQ$
   (iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$
   (iv) $AQ = CP$
   (v) APCQ समान्तरचतुर्भुजम्। इति निरूपयन्तु।



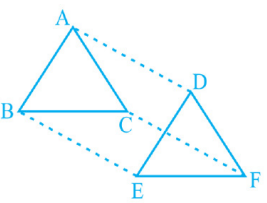
(आकृतिः 8.20)

10. ABCD इति समान्तरचतुर्भुजे AP, CQ रेखे A,C शीर्षयोः BD कर्णं प्रति चित्रिते समालम्बरेखे स्तः (8.21 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु
    (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$
    (ii) $AP = CQ$ इति निरूपयन्तु।



(आकृतिः 8.21)

11. ΔABC, ΔDEF त्रिभुजयोः $AB = DE$, $AB \| DE$, $BC = EF$, $BC \| EF$ च। A, B, C शीर्षाणि D, E, F शीर्षैः सह क्रमशः योजिताः (8.22 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।
    (i) ABED चतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भुजम्
    (ii) BEFC चतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भुजम्
    (iii) $AD \| CF$, $AD = CF$ च



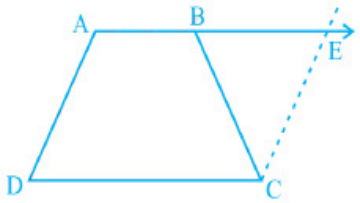
(आकृतिः 8.22)

(iv) $ACFD$ चतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भुजम्

(v) $AC = DF$

(vi) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ इति निरूपयन्तु।

12. $ABCD$ विषमचतुर्भुजे $AB \parallel CD$, $AD = BC$; च (8.23 तमम् आकृतिं पश्यन्तु)



(आकृतिः 8.23)

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

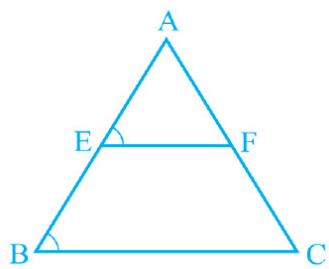
(iv) AC कर्णः = BD कर्णः। इति निरूपयन्तु।

8.6 मध्यबिन्दु-प्रमेयम्

भवन्तः चतुर्भुजानां त्रिभुजानां च बहून् गुणधर्मान् अधीतवन्तः। इदानीं त्रिभुजस्य भुजानां मध्यबिन्दुसम्बद्धम् अन्यं कञ्चन परिणामं पठामः। अधोदत्तम् अभ्यासं कुर्वन्तु।

किञ्चन त्रिभुजं चित्रयित्वा E, F मध्यबिन्दू त्रिभुजस्य भुजद्वये अङ्कयन्तु। E, F बिन्दू योजयन्तु (8.24 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

EF, BC रेखे मापयन्तु। $\angle AEF$, $\angle ABC$ कोणौ मापयन्तु।



(आकृतिः 8.24)

भवन्तः किम् अवलोकयन्ति ? द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् –

$$EF = \frac{1}{2}BC, \angle AEF = \angle ABC$$

अतः $EF \parallel BC$

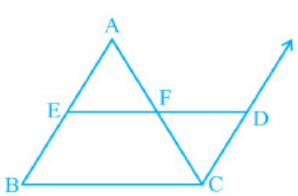
अन्यैः त्रिभुजैः एतम् अभ्यासम् आवर्तयन्तु

अतः अधोदत्तं प्रमेयं प्राप्नुमः।

8.9 प्रमेयम् - *कस्यचन त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मध्यबिन्दू योजयन् रेखाखण्डः तृतीयभुजस्य समान्तरः अस्ति।*

अधोदत्तसङ्केतेन भवन्तः एतत् प्रमेयं निरूपयितुं शक्नुवन्ति।

8.25 चित्रम् अवलोकयन्तु यत्र AB, AC भुजयोः E, Fक्रमशः मध्यबिन्दू स्तः। अपि च $CD \parallel BA$.



(आकृतिः 8.25)

$\Delta AEF \cong \Delta CDF$ (को-भु-को ASA नियमः)

अतः $EF = DF$, $BE = AE = DC$ च किमर्थम्?)

$EF \parallel BC$ इति प्राप्नुमः।

अस्यां स्थित्याम् अवगच्छन्तु यत् $EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$

8.9 प्रमेयस्य विलोमं वक्तुं शक्नुवन्ति वा ? एषः विलोमः सत्यः वा ?

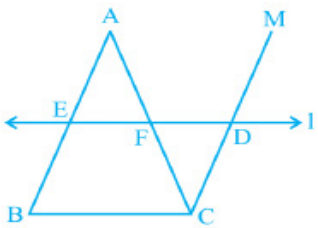
भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् उपरितन-प्रमेयस्य विलोमः अपि सत्यः इति।

सः अधः दत्तः अस्ति।

8.10 प्रमेयम् - *कस्यचन त्रिभुजस्य एकस्य भुजस्य मध्यबिन्दुद्वारा चित्रिता रेखा- या अन्यभुजेन समान्तरा अस्ति - सा तृतीयं भुजम् अर्धयति।*

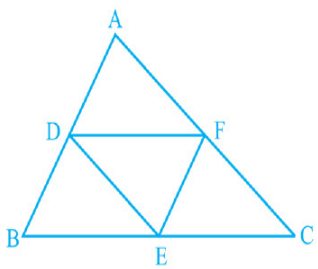
8.26 आकृत्याम् अवलोकयन्तु यत् AB रेखायाः E इति मध्यबिन्दुः। l इति रेखा E बिन्दुद्वारा गच्छति, तथा BC रेखायाः समान्तरम् अस्ति। अपि च $CM \parallel BA$.

$AF = CF$ इति ΔAEF, ΔCDF त्रिभुजयोः सर्वाङ्गसमत्वम् उपयुज्य निरूपयन्तु।



(आकृतिः 8.26)

उदाहरणम् 7 : ΔABC त्रिभुजे AB, BC, CA भुजानां क्रमशः D, E, F मध्यबिन्दवः सन्ति (8.27 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु). ΔABC त्रिभुजं चतुर्भिः सर्वाङ्गसमत्रिभुजैः D, E, F मध्यबिन्दूनां योजनेन विभक्तम् अस्ति इति निरूपयन्तु।



(आकृतिः 8.27)

समाधानम् - ΔABC त्रिभुजे AB, BC इति भुजयोः D, E क्रमशः मध्यबिन्दू स्तः।8.9 तमेन प्रमेयेन

$DE \parallel AC$,

$DF \parallel BC$, $EF \parallel AB$ च।

अतः $ADEF$, BDFE, DFCE सर्वाण्यपि समान्तरचतुर्भुजानि सन्ति।

इदानीं DE रेखा BDFC समान्तरचतुर्भुजस्य कर्णः अस्ति।

अतः $\Delta BDE \cong \Delta FED$

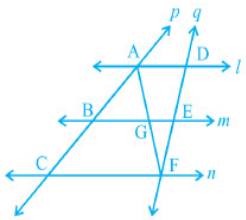
समानतया $\Delta DAF \cong \Delta FED$

अपि च $\Delta EFC \cong \Delta FED$

अतः सर्वाणि त्रिभुजानि सर्वाङ्गसमानि सन्ति।

उदाहरणम् 8 : l, m, n इति तिस्रः समान्तररेखाः p, q इति छेदिकाभ्यां प्रतिच्छिन्नाः सन्ति यथा l, m, n रेखाः p रेखायाम् AB, BC इति समछेदकानि कुर्वन्ति(8.28 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

l, m, n रेखाः q रेखायाम् अपि DE, EF इति समछेदकानि कर्तयन्ति इति निरूपयन्तु।



(आकृतिः 8.28)

समाधानम् - $AB = BC$ इति दत्तम् अस्ति, $DE = EF$ इति निरूपणीयम्। A बिन्दुतः F बिन्दुपर्यन्तं रेखां योजयामः, यथा सा रेखा m रेखां G बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्यात्।

$ACFD$ विषमचतुर्भुजं त्रिभुजद्वयेन विभक्तम् अस्ति। तयोः नाम ΔACF, ΔAFD च।

ΔACF त्रिभुजे AC भुजस्य मध्यबिन्दुः B इति दत्तम् अस्ति। $(AB = BC)$

BG || CF (यतः m || n)।

अतः AF रेखायाः मध्यबिन्दुः G (8.10तमेन प्रमेयेन)

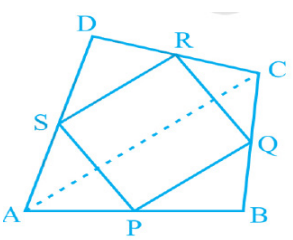
ΔAFD त्रिभुजायाम् अपि समानं वादं प्रयोक्तुं शक्नुमः, यथा AF भुजस्य G मध्यबिन्दुः इति कारणेन GE || AD। 8.10 तमेन प्रमेयेन DF रेखायाः मध्यबिन्दुः E अस्ति।

अतः DE = EF

अन्यैः शब्दैः वदामः चेत् l, m, n रेखाः q रेखायाम् अपि समछेदकानि कर्तयन्ति।

प्रश्नावलिः 8.2

1. $ABCD$ चतुर्भुजे AB, BC, CD, DA भुजानां क्रमशः P, Q, R, S मध्यबिन्दवः सन्ति (8.29 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) AC कश्चन कर्णः अस्ति।



(आकृतिः 8.29)

   (i) $SR \parallel AC$, $SR = \frac{1}{2} AC$

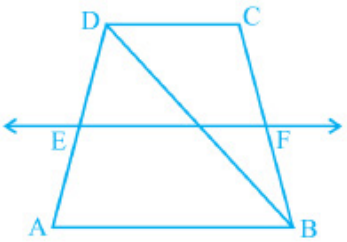
   (ii) $PQ = SR$

   (iii) PQRS समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति। इति निरूपयन्तु।

2. $ABCD$ समचतुर्भुजे AB, BC, CD, DA भुजानां P, Q, R, S मध्यबिन्दवः सन्ति। PQRS चतुर्भुजम् आयतं इति निरूपयन्तु।

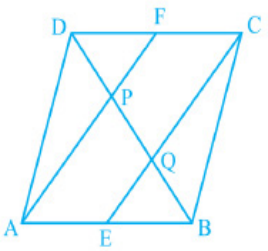
3. *A*BCD आयते *A*B, BC, CD, D*A* भुजानां P, Q, R, S मध्यबिन्दवः सन्ति। PQRS चतुर्भुजम् समचतुर्भुजम् इति निरूपयन्तु।

4. *A*BCD विषमचतुर्भुजे *A*B || DC, BD इति कर्णः, *A*D भुजस्य E इति मध्यबिन्दुः च। E बिन्दुद्वारा *A*B भुजस्य समान्तरं काञ्चन रेखां चित्रयन्तु यथा सा BC भुजं F बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्यात् (8.30 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) BC भुजस्य F मध्यबिन्दुः इति निरूपयन्तु।



(आकृतिः 8.30)

5. *A*BCD समान्तरचतुर्भुजे *A*B, CD भुजयोः क्रमशः E, F मध्यबिन्दू स्तः (8.31 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। *A*F, EC इति रेखाखण्डौ BD कर्णं समभागत्रयेण विभजतः इति निरूपयन्तु।



(आकृतिः 8.31)

6. कस्यचन चतुर्भुजस्य अभिमुखभुजयोः मध्यबिन्दू योजयन्तौ रेखाखण्डौ, परस्परं अर्धयतः इति निरूपयन्तु।

7. *A*BC त्रिभुजस्य C शीर्षे समकोणः अस्ति। *A*B कर्णस्य M मध्यबिन्दुद्वारा काञ्चन रेखां चित्रयन्तु यथा सा BC रेखायाः समान्तरा स्यात्, *A*C रेखां D बिन्दौ प्रतिच्छिन्द्यात्।

(i) *A*C रेखायाः D मध्यबिन्दुः अस्ति।

(ii) MD $\perp$ *A*C

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$

इति निरूपयन्तु

8.7 सारांशः

अस्मिन् अध्याये अधोदत्ताः अंशाः अधीताः –

1. कस्यचित् चतुर्भुजस्य कोणानां योगः 360^0 अस्ति।
2. कस्यचन समान्तरचतुर्भुजस्य कर्णः तं सर्वाङ्गसमत्रिभुजाद्वयेन विभजति
3. कस्मिंश्चित् समान्तरचतुर्भुजे –
   (i) अभिमुखभुजौ समानौ (ii) अभिमुखकोणौ समानौ
   (iii) कर्णौ परस्परं अर्धयतः
4. किञ्चन चतुर्भुजम् समान्तरचतुर्भुजं भवति यदि –
   (i) अभिमुखभुजौ समानौ अथवा (ii) अभिमुखकोणौ समानौ अथवा
   (iii) कर्णौ परस्परं अर्धयतः अथवा
   (iv) अभिमुखभुजयोः युग्मं समानं समान्तरं च।
5. कस्यचन आयतस्य कर्णौ परस्परं अर्धयतः, समानौ च। अस्य विलोमः अपि सत्यः अस्ति।
6. कस्यचन समचतुर्भुजस्य कर्णौ परस्परं समकोणे अर्धयतः। अस्य विलोमः अपि सत्यः अस्ति।
7. कस्यचन वर्गस्य कर्णौ परस्परं समकोणे अर्धयतः, समानौ च। अस्य विलोमः अपि सत्यः अस्ति।
8. कस्यचन त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मध्यबिन्दू योजयन् रेखाखण्डः तृतीयभुजस्य समान्तरः अस्ति, तथा तस्य अर्धभागः च अस्ति।
9. कस्यचन त्रिभुजस्य एकस्य भुजस्य मध्यबिन्दुद्वारा चित्रिता रेखा - या अन्यभुजेन समान्तरा अस्ति - सा तृतीयं भुजं अर्धयति।
10. कस्यचन चतुर्भुजस्य भुजानां मध्यबिन्दूनां क्रमेण योजनेन प्राप्तम् अन्यत् चतुर्भुजं समान्तरचतुर्भुजं भवति।

अध्यायः 9

समान्तरचतुर्भुजानां त्रिभुजनां च क्षेत्रफलम्

9.1 प्रस्तावना

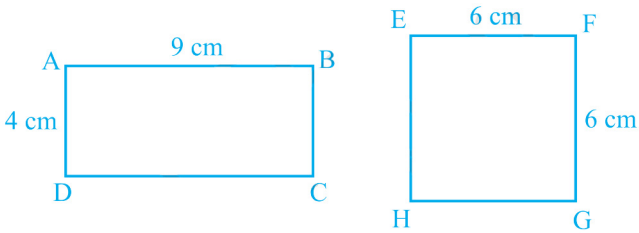
पञ्चमाध्याये भवन्तः अधीतवन्तः यत्-पूर्वं क्षेत्राणां सीमा-पुनर्निर्माणप्रक्रियायाम्, उचितभागैः विभजनप्रक्रियायां च भूखण्डस्य मापनात् ज्यामितेः अध्ययनं आरब्धम्। उदाहरणार्थम् – बुदिया नाम कृषिकायाः समीपे किञ्चन त्रिभुजकारक्षेत्रम् अस्ति यत् सा स्वस्याः पुत्र्योः पुत्रस्य च मध्ये समानतया विभजनं कर्तुम् इच्छति। क्षेत्रस्य क्षेत्रफलस्य वास्तविक-परिकलनं विना सा त्रिभुजकारक्षेत्रस्य एकपार्श्वं समभागेषु त्रिधा विभक्तवती, तथा विभजनेन प्राप्तं बिन्दुद्वयं अभिमुखशीर्षं प्रति योजितवती। एवम्प्रकारेण त्रिधा विभक्तं तत्क्षेत्रं सा त्रिभ्यः दत्तवती। भवन्तः किं चिन्तयन्ति? तया विभक्ताः त्रयः भागाः वस्तुतः समानाः वा? ईदृश-प्रश्नानाम् उत्तराणि प्राप्तुम्, अन्येषां सम्बद्धसमस्यानां च समाधानं प्राप्तुं तलीय-आकृतीनां क्षेत्रफलानां पुनरवलोकनं करणीयं यस्य विषये भवन्तः पूर्वतनकक्ष्यासु पठितवन्तः।

भवन्तः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् किञ्चन तलं सरल-संवृत-आकृत्या आवृतः प्रदेशः तस्याः आकृतेः समतलप्रदेशः (समतलाकृतिप्रदेशः) इति उच्यते। अस्य तलप्रदेशस्य परिमाणं क्षेत्रफलम् इति उच्यते। एषः परिमाणं सर्वदा सङ्ख्यया (केनचित् मात्रकेण) एव अभिव्यज्यते। यथा 5 cm^2 मितम्, $8m^2$, 3 hectares फलं मितम् इत्यादीनि। अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कस्याश्चन आकृतेः क्षेत्रफलं (केनचित् मात्रकेण सह) सङ्ख्यया उच्यते या आकृत्या आवृतेन तलेन सह सम्बद्धा भवति।



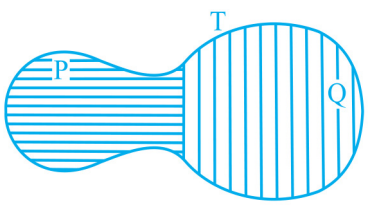
(आकृतिः 9.1)

वयं पूर्वतनकक्ष्याभ्यः सप्तमाध्यायात् सर्वाङ्गसमाकृतीनां कल्पनायाः विषये परिचिताः स्मः। द्वे *आकृती सर्वाङ्गसमे तदा भवतः यदा तयोः समानपरिमाणं, आकारः च स्याताम्* । अन्यैः शब्दैः वदामः चेत् यदि आकृतिः *A*, B सर्वाङ्गसमे स्तः (9.1 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) तर्हि पारदर्शकपत्रेण – यथा एका आकृतिः अपरां पूर्णतया आवृणुयात् तथा अध्यारोपणं कर्तुं शक्नुमः । अतः यदि *A*, B इति आकृतिद्वयं सर्वाङ्गसमं स्यात् तर्हि तयोः समक्षेत्रफलं भवेत् । किन्तु अस्य वाक्यस्य विलोमः सत्यः नास्ति । अन्यैः शब्दैः – समक्षेत्रफलयुक्तम् आकृतिद्वयं सर्वाङ्गसमं भवेत् इति नास्ति नियमः। उदाहरणार्थम् – 9.2 तमायाम् आकृत्याम् *A*BCD, EFGH आयतयोः समक्षेत्रफलम् अस्ति (9×4 cm^2 मितम्, 6×6 cm^2 मितम् च) किन्तु स्पष्टतया दृश्यते यत् ते आयते सर्वाङ्गसमे न इति (किमर्थम् ?)।



आकृतिः 9.2

इदानीं 9.3 तमाम् आकृतिं पश्यामः।



आकृतिः 9.3

भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् T इति आकृति-द्वारा निर्मितः समतलप्रदेशः P, Q इति आकृत्योः तलप्रदेशद्वयेन निर्मितः अस्ति । सरलतया ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् –

T आकृतेः क्षेत्रफलम् = P आकृतेः क्षेत्रफलम् + Q आकृतेः क्षेत्रफलम् इति ।

A आकृतेः क्षेत्रफलम् फलं(*A*) इति, B आकृतेः क्षेत्रफलम् फलं(B) इति, T आकृतेः क्षेत्रफलम् फलं (T) इति च सूचयितुं शक्नुवन्ति । इदानीं भवन्तुः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् कस्याश्चन आकृतेः क्षेत्रफलं केनचित्

मात्रकेण सङ्ख्यया उच्यते या आकृत्या आवृतेन तलेन सह सम्बद्धा अस्ति। अनेन सम्बद्धम् अधोदत्तं गुणधर्मद्वयं पश्यामः –

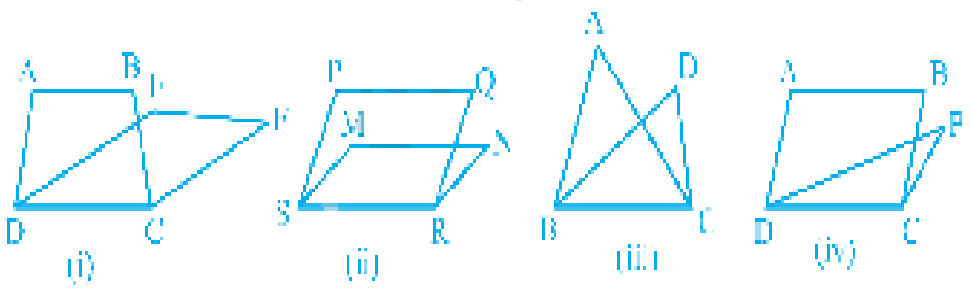
(1) यदि A,B इति सर्वाङ्गसमम् आकृतिद्वयम् अस्ति तर्हि फलं (A) = फलं (B)

(2) T आकृत्या निर्मितः समतलप्रदेशः - P, Q इति आकृतिद्वयेन निर्मितेन परस्परानाच्छादित-समतलप्रदेशद्वयेन निर्मितः अस्ति। यथा फलं (T) = फलं (P) + फलं (Q)

भवन्तः पूर्वतनकक्ष्याभ्यः आयतं, वर्गः, समान्तरचतुर्भुजं, त्रिभुजम् - इत्यादीनां विविधाकृतीनां क्षेत्रफलानि अन्वेष्टुं कानिचन सूत्राणि जानन्ति। अस्मिन् अध्याये समान-समान्तरयोः मध्ये, समानाधारयुक्त-विविध-ज्यामितीयाकृतीनां क्षेत्रफलानां मध्ये विद्यमानस्य सम्बन्धस्य अध्ययनद्वारा पूर्वं पठितसूत्राणां ज्ञानं द्रढयितुं प्रयत्नः क्रियते। एतत् अध्ययनं त्रिभुजनां समानता इत्यस्य परिणामानाम् अवगमनार्थम् अपि सहकरोति।

9.2 – समानाधारे समानसमान्तरयोः मध्ये विद्यमानाः आकृतयः

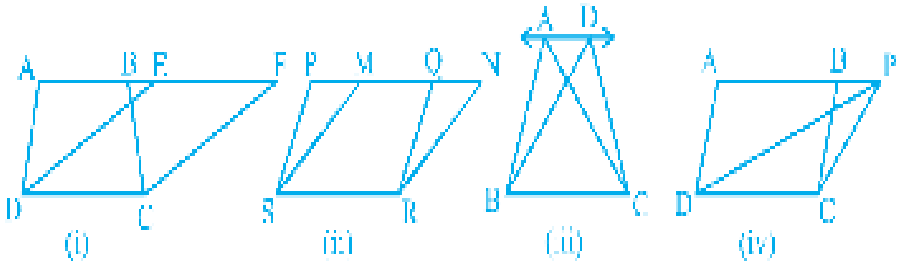
अधोदत्त-आकृतीः पश्यन्तु



आकृतिः9.4

9.4 (i) तमायाम् आकृत्यां ABCD विषमचतुर्भुजस्य, EFCD समान्तरचतुर्भुजस्य च DC इति समानः भुजः अस्ति। ABCD विषमचतुर्भुजं, EFCD समान्तरचतुर्भुजं च DC इति समानाधारे तिष्ठतः इति वदामः। समानतया 9.4 (ii) तमायाम् आकृत्यां PQRS, MNRS समान्तरचतुर्भुजे SR इति समानाधारे तिष्ठतः। 9.4 (iii) तमायाम् आकृत्यां ABC, DBC त्रिभुजे BC इति समानाधारे तिष्ठतः। 9.4 (iv) तमायाम् आकृत्यां ABCD समान्तरचतुर्भुजं, PDC त्रिभुजं च DC इति समानाधारे तिष्ठतः।

इदानीम् अधोदत्ताः आकृतीः पश्यन्तु।

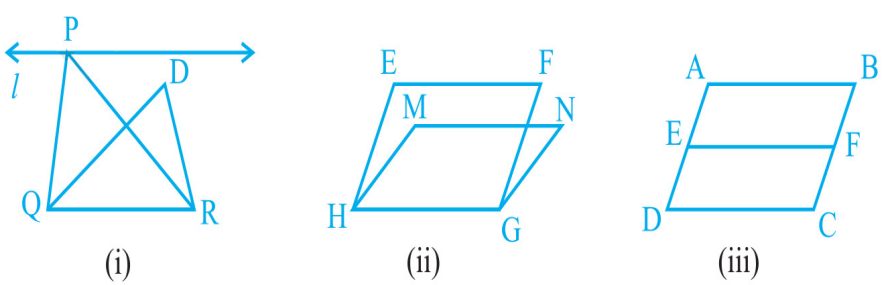


आकृतिः 9.5

9.5 (i) तमायाम् आकृत्यां स्पष्टतया *A*BCD विषमचतुर्भुजं, EFCD समान्तरचतुर्भुजं च DC इति समानाधारे तिष्टतः। अपि च *A*BCD विषमचतुर्भुजस्य *A*, B इति शीर्षे, EFCD समान्तरचतुर्भुजस्य E, F शीर्षे च - यानि DC इति आधारस्य अभिमुखानि सन्ति, सर्वेऽपि *A*F रेखायां सन्ति, या DC रेखायाः समान्तरा अस्ति। *A*BCD विषमचतुर्भुजं EFCD समान्तरचतुर्भुजं च DC इति समानाधारे, *A*F, DC इति समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्टतः इति वदामः। तथैव PQRS, MNRS समान्तरचतुर्भुजे SR इति समानाधारे, PN, SR इति समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्टतः {9.5(ii)तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}। यतः PQRS समान्तरचतुर्भुजस्य P, Q इति शीर्षे, तथा MNRS समान्तरचतुर्भुजस्य M, N इति शीर्षे च PN रेखायां तिष्ठन्ति, या SR रेखायाः समान्तरा अस्ति। तथैव *A*BC, DBC त्रिभुजे BC इति समानाधारे, *A*D, BC इति समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्टतः {9.5(iii) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु। *A*BCD समान्तरचतुर्भुजं, PCD त्रिभुजं च DC इति समानाधारे *A*P, DC इति समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्टतः {9.5(iv) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}

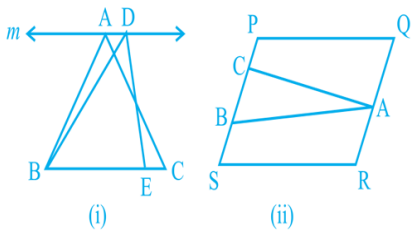
अतः द्वे आकृती समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये तदा तिष्टतः इति उच्यते यदा तयोः कश्चन सामान्यः भुजः भवति, तथा शीर्षाणि तस्य समानाधारस्य अभिमुखानि, आधारस्य समान्तरे स्थीयमानायां रेखायां च तिष्ठन्ति।

उपरितनं वाक्यं मनसि निधाय Δ PQR, Δ DQR त्रिभुजे *l*, QR इति समान्तररेखयोः मध्ये तिष्टतः इति वक्तुं न शक्नुवन्ति {9.6(i) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}



आकृतिः 9.6

समानतया यथा 9.6 (ii) तमायाम् आकृत्यां दर्शितं तथा EFGH, MNGH इति समान्तरचतुर्भुजे EF, HG इति समानसमान्तरयोः तिष्ठतः इति वक्तुं न शक्नुवन्ति। तथैव 9.6 (iii) तमायाम् आकृत्यां दर्शितप्रकारेण ABCD, EFCD इति समान्तरचतुर्भुजे AB, DC इति समानसमनातरयोः मध्ये तिष्ठतः इति वक्तुं न शक्नुवन्ति (यद्यपि तयोः DC इति समानः आधारः अस्ति,

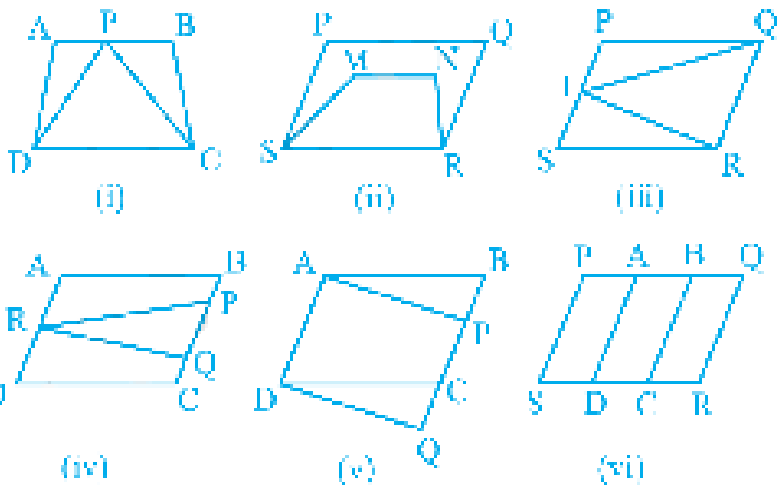


आकृतिः 9.7

तौ AD, BC इति समान्तरयोः मध्ये तिष्ठतः)। *अतः अत्र अवगन्तव्यं यत् द्वयोः समान्तरयोः रेखाखण्डयोः मध्ये एकः समानाधारः स्यात्। 9.7 (i) तमायाम् आकृत्यां विद्यमाने* Δ ABC, Δ DBE *त्रिभुजे समानाधारे न स्तः*। तथैव 9.7 (ii) तमायाम् आकृत्याम् Δ ABC त्रिभुजं, PQRS चतुर्भुजं च समानाधारे न स्तः।

प्रश्नावलिः 9.1

(1) अधोदत्तासु आकृतिषु काः आकृतयः समानाधारे तथा समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठन्ति ? अस्यां स्थित्यां समानाधारम्, समानसमान्तरौ अपि लिखन्तु।

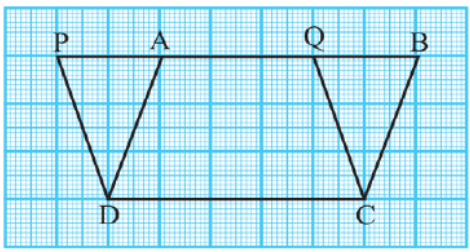


आकृतिः 9.8

9.3 समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये विद्यमानानि चतुर्भुजानि

समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये विद्यमानयोः समान्तरचतुर्भुजयोः क्षेत्रफलयोः मध्ये विद्यमानं सम्बन्धं ज्ञातुं प्रयुत्नं कुर्मः। एतदर्थं कांश्चन अभ्यासान् कुर्मः।

प्रथमाभ्यासः - किञ्चन आलेखपत्रं स्वीकृत्य 9.9 तमायाम् आकृत्यां दर्शितप्रकारेण ABCD, PQCD इति समान्तरचतुर्भुजद्वयं चित्रयन्तु।

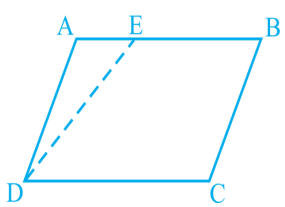


आकृतिः 9.9

उपरितनं चतुर्भुजद्वयम् अपि DC इति समानाधारे, PB, DC इति समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठति। भवन्तः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् – आलेखपत्रस्य एकमानवर्गाणां गणनेन अनयोः चतुर्भुजयोः क्षेत्रफलम् अन्वेष्टुं शक्नुमः इति।

अस्यां पद्धत्याम् आकृत्या आवृतानां पूर्णवर्गाणां गणनेन, आकृत्या अर्धाधिकम् आवृतानां वर्गाणां गणनेन, आकृत्या अर्धान्न्यूनम् आवृतवर्गाणां गणनेन – तेषां योगेन क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्नुमः। येषां वर्गाणाम् अर्धादपि न्यूनभागः आकृत्या आवृतः, ते उपेक्षितुम् अर्हाः। भवन्तः ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् चतुर्भुजद्वयस्यापि प्रायः 15cm मितं क्षेत्रफलम् अस्ति। आलेखीयपत्रे इतोऽपि अधिकचतुर्भुजानां युग्मानि चित्रयित्वा एतम् अभ्यासं पुनरावर्तयन्तु। भवन्तः किम् अवगच्छन्ति ? चतुर्भुजयोः क्षेत्रफलं समम् उत भिन्नम् ? वस्तुतः क्षेत्रफलं समम् एव अस्ति। अतः अनेन एवं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुवन्ति यत् समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये विद्यमान-चतुर्भुजद्वयस्य समक्षेत्रफलम् अस्ति। किन्तु एतत् स्मरन्तु यत् एतत् तु सत्यापनम् एव।

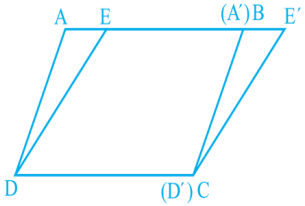
द्वितीयाभ्यासः - ABCD चतुर्भुजं गाढपत्रे फलके वा चित्रयन्तु । D रेखाखण्डं चित्रयन्तु यथा 9.10 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम्।



आकृतिः 9.10

9.11 तमायाम् आकृत्यां दर्शितप्रकारेण अग्रे पारदर्शपत्रसाहाय्येन A' D' E' इति त्रिभुजं पृथक् पत्रे कर्तयन्तु यथा सा ADE त्रिभुजेन सर्वाङ्गसमम् अस्ति। A' D' E' त्रिभुजं तथा स्थापयन्तु यथा A' D' रेखा BC रेखायाम् ऐक्या भवेत्। अत्र पश्यन्तु यत् ABCD, EE'CD इति चतुर्भुजे DC इति समानाधारे, AE', DC इति समानसमान्तरयोः

मध्ये तिष्ठतः। अनयोः क्षेत्रफलयोः विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?



आकृतिः 9.11

$\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$

अतः फलं(ADE) = फलं($A'D'E'$)

अपि च फलं ($ABCD$) = फलं (ADE) + फलं(EBCD)

= फलं (A' D' E) + फलं (EBCD)

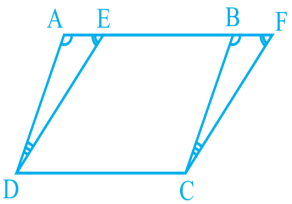
= फलं (EE' CD)

अतः चतुर्भुजद्वयस्य अपि समक्षेत्रफलम् अस्ति।

इदानीं ईदृश - चतुर्भुजद्वयस्य मध्ये विद्यमानं सम्बन्धं निरूपयितुं प्रयत्नं कुर्मः।

प्रमेयम् – 9.1 *समानाधारे, समानसमान्तरयोः विद्यमानस्य चतुर्भुजद्वयस्य समानं क्षेत्रफलं भवति।*

उपपत्तिः - $ABCD$, EFCE इति चतुर्भुजद्वयं DC इति समानाधारे, AF, CD समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्टतः ।- यथा 9.12 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम् -



आकृतिः 9.12

फलं ($ABCD$) = फलं (EFCD) इति निरूपणीयम्।

ADE, BCF त्रिभुजयोः

DAE = CBF (AD || BC इति अस्मात्, AF छेदिकायाः सङ्गतकोणौ) (1)

AED = BFC (ED || FC इत्यस्मात्, AF छेदिकायाः सङ्गतकोणौ)। (2)

अतः $\angle ADE = \angle BCF$ (त्रिभुजस्य कोणयोगगुणधर्मः) (3)

अपि च $AD = BC$ ($ABCD$चतुर्भुजस्य अभिमुखभुजौ) (4)

अतः $\Delta ADE \cong \Delta BCF$ (को-भु-को ASA नियमः, 1, 3, 4 समीकरणेभ्यश्च)

अतः फलं(ADE) = फलं(DCF) (सर्वाङ्गसमाकृतीनां समक्षेत्रफलानि) (5)

इदानीं फलं($ABCD$) = फलं(ADE) + फलं(EDCB)

= फलं(BCF) + फलं(EDCB) (पञ्चमसमीकरणतः)

= फलं (EFCD)

अतः $ABCD$, EFCD चतुर्भुजयोः क्षेत्रफलं समम् अस्ति।

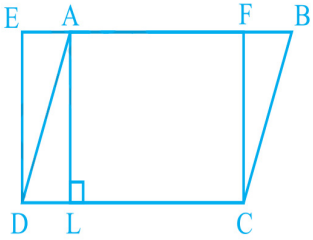
इदानीम् उपरितनं सूत्रं दृष्टान्तसहितं वक्तुं कानिचन उदाहरणानि स्वीकुर्मः।

उदाहरणम् 1 : 9.13 तमायाम् आकृत्यां $ABCD$ किञ्चन चतुर्भुजं, EFCD च किञ्चन आयतम् ।

अपि च $AL \perp DC$. निरूपयन्तु यत् –

(i) फलं($ABCD$) = फलं(EFCD)

(ii) फलं($ABCD$) = DC × AL



आकृतिः 9.13

समाधानम् - (i) यतः आयतम् अपि समान्तरचतुर्भुजं ,

फलं($ABCD$) = फलं(EFCD) (9.1 तमं प्रमेयम्)

(ii) उपरितनपरिणामतः

फलं($ABCD$) = DC x FC (आयतस्य क्षेत्रफलम् = दीर्घता x विशालता) (1)

यतः $AL \perp DC$, अतः $AFCL$ अपि आयतम् अस्ति ।

अतः $AL = FC$ (2)

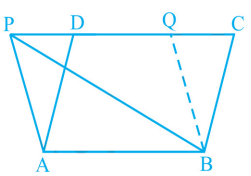
अतः फलं($ABCD$) = DC x AL (1, 2 समीकरणाभ्याम्)

द्वितीयपरिणामतः किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् *समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं तु तस्य कस्यचित् भुजस्य, सङ्गत-औन्नत्यस्य च गुणनफलं भवति* । किं भवन्तः स्मरन्ति यत् सप्तमकक्ष्यायाम् एव समान्तरचतुर्भुजक्षेत्रफलस्य एतत् सूत्रं पठितवन्तः इति ? अस्य सूत्रस्य आधारेण 9.1 तमं प्रमेयम् एवं पुनर्लेखितुं शक्यते यत् समान्तरचतुर्भुजानि ये समाधारे अथवा समानाधारे तिष्ठन्ति तथा समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठन्ति, तेषां क्षेत्रफलं समं भवति ।

अस्य सूत्रस्य विलोमं लेखितुं शक्नुवन्ति वा ? विलोमः एवम्प्रकारेण अस्ति – चतुर्भुजानि ये समाधारेषु अथवा समानाधारेषु तिष्ठन्ति अथवा येषां समक्षेत्रफलम् अस्ति, ते समानसमान्तरयोः मध्ये भवन्ति । एषः विलोमः सत्यं वा ? समान्तरचतुर्भुजक्षेत्रफलस्य सूत्रम् उपयुज्य एतं विलोमं निरूपयन्तु ।

उदाहरणम् 2 : यदि किञ्चन त्रिभुजं, चतुर्भुजं च समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठतः तर्हि त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलस्य अर्धम् अस्ति इति निरूपयन्तु ।

समाधानम् 2 : Δ ABP त्रिभुजं, $ABCD$ समान्तरचतुर्भुजं च AB इति आधारे तिष्ठताम्, AB, PC इति समान्तरयोः मध्ये तिष्ठतां च (9.14 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 9.14

भवन्तः फलं(PAB) = $\frac{1}{2}$ फलं($ABCD$) इति निरूपयितुम् इच्छन्ति ।

BQ || AP चित्रयन्तु यथा $ABQP$ चतुर्भुजं प्राप्येत । इदानीं $ABQP$, $ABCD$, समान्तरचतुर्भुजे AB इति समानाधारे स्तः, AB, PC इति समानसमान्तरयोः मध्ये च स्तः ।

अतः फलं($ABQP$) = फलं($ABCD$) (9.1 तमेन प्रमेयेन) (1)

किन्तु $\Delta PAB \cong \Delta BQP$ ($ABQP$ चतुर्भुजं PB कर्णः सर्वाङ्गसमत्रिभुजद्वयेन विभजति)

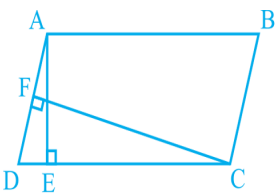
अतः फलं(PAB) = फलं(BQP) (2)

अतः फलं(PAB) = $\frac{1}{2}$ फलं($ABQP$) (द्वितीयसमीकरणतः) (3)

एवं प्राप्नुमः फलं(PAB) = $\frac{1}{2}$ फलं($ABCD$) (1,3 समीकरणाभ्याम्)

प्रश्नावलिः 9.2

1. 9.15 तमायाम् आकृत्यां $ABCD$ चतुर्भुजे $AE \perp DC$, $CF \perp AD$. यदि AB = 16 cm, AE = 8 cm, CF = 10 cm मितं च, तर्हि AD भुजम् अन्विषन्तु ।

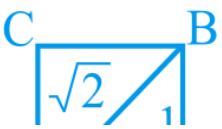


आकृतिः 9.15

2. यदि $ABCD$ चतुर्भुजस्य E,F,G,H इति बिन्दवः क्रमशः तत्तद्भुजानां मध्यबिन्दवः तर्हि फलं(EFGH) = $\frac{1}{2}$ फलं($ABCD$) इति निरूपयन्तु ।

3. P,Q इति बिन्दुद्वयं $ABCD$ चतुर्भुजस्य क्रमशः DC, AD भुजयोः तिष्ठतः। फलं(APB) = फलं(BQC) इति निरूपयन्तु ।

4. 9.16 तमायाम् आकृत्यां $ABCD$ चतुर्भुजस्य अन्तः P इति बिन्दुः अस्ति । निरूपयन्तु यत्



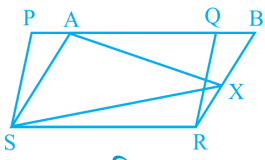
आकृतिः 9.16

(i) फलं(APB) + फलं(PCD) = $\frac{1}{2}$ फलं($ABCD$)

(ii) फलं(APD) + फलं(PBC) = फलं(APB) + फलं(PCD)

(सङ्केतः – P बिन्दुद्वारा AB रेखायाः समान्तररेखां चित्रयन्तु)

5. 9.17 तमायाम् आकृत्यां PQRS, ABRS इति चतुर्भुजद्वयं, यत्र BR भुजे X इति कश्चन बिन्दुः। निरूपयन्तु यत् –



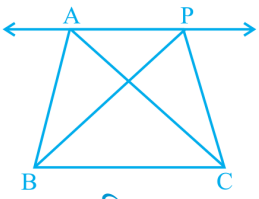
आकृतिः 9.17

(i) फलं(PQRS) = फलं(ABRS)

(ii) फलं(AXS) = $\frac{1}{2}$ फलं(PQRS)

6. कस्यचित् कृषकस्य समीपे PQRS समान्तरचतुर्भुजाकारं किञ्चन क्षेत्रम् आसीत्। सः RS रेखायां A इति बिन्दुं स्वीकृत्य P, Q इति बिन्दुद्वयेन सह योजितवान्। क्षेत्रं कतिभिः भागैः विभक्तम् अस्ति? एतेषां भागानाम् के आकाराः भवन्ति ? कृषकः गोधूमानां सूपानां च वपनं क्षेत्रे पृथक् पृथक् समविभागेन कर्तुम् इच्छति। तेन कथं करणीयम् ?

9.4 – समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये विद्यमानाः त्रिभुजाः



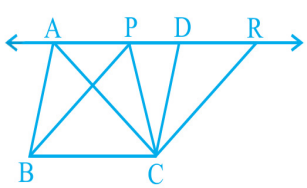
आकृतिः 9.18

9.18 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु। अस्याम् आकृत्यां ABC, PBC इति त्रिभुजद्वयं BC इति समानाधारे, BC, AP इति समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठतः च। अनयोः त्रिभुजक्षेत्रफलयोः विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति? अस्य प्रश्नस्य उत्तरप्राप्त्यर्थं भवन्तः आलेखपत्रे समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये स्थीयमानानां बहूनां त्रिभुजयुग्मानां चित्रीकरणस्य अभ्यासं कर्तुं शक्नुवन्ति। तथा तेषां क्षेत्रफलानाम् अन्वेषणं तु तत्र विद्यमान-वर्गाणां गणनेन कर्तुं शक्नुवन्ति। प्रतिवारं भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् त्रिभुजद्वयस्य प्रायः समक्षेत्रफलं भवति इति।

भवन्तः एतम् अभ्यासं गणितफलके अपि कर्तुं शक्नुवन्ति। भवन्तः पुनः पश्यन्ति यत् त्रिभुजद्वयस्य क्षेत्रफलं प्रायः समम् इति।

उपरितनप्रश्नस्य तार्किकम् उत्तरं प्राप्तुं भवन्तः अधोदत्तप्रकारेण कर्तुं शक्नुवन्ति।

9.18 तमायाम् आकृत्यां CD ∥ BA, CR ∥ BP इति चित्रयन्तु - यथा D,R इति बिन्दू AP रेखायां तिष्ठेताम् (9.19 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 9.19

इतः PBCR, ABCD इति चतुर्भुजद्वयं प्राप्यते यत् BC इति समानाधारे, BC, फलं इति समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठति।

अतः फलं(ABCD) = फलं(PBCR) (किमर्थम् ?)

इदानीं $\Delta\, A$BC $\cong \Delta$ CDA अपि च Δ PBC $\cong \Delta$ CRP (किमर्थम् ?)

अतः फलं $(A\text{BC}) = \frac{1}{2}$ फलं(ABCD) तथा फलं(PBC) $= \frac{1}{2}$ फलं(PBCR) (किमर्थम् ?)

अतः फलं(ABC) = फलं(PBC)

अनेन प्रकारेण भवन्तः अधोदत्तं प्रमेयं प्राप्नुवन्ति।

9.2 प्रमेयम् *यदि द्वे त्रिभुजे समाधारे अथवा समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये च तिष्ठतः, तर्हि तयोः क्षेत्रफलं समानं भवति।*

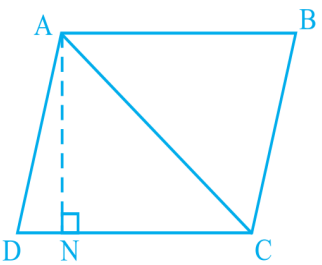
इदानीं ABCD इति चतुर्भुजं भवतु, यस्य कर्णयोः अन्यतमः AC इति (9.20 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। AN $\perp$ DC इति भवतु। अत्र अवगच्छतु यत्

$\Delta\, A$DC $\cong \Delta$ CBA (किमर्थम् ?)

अतः फलं(ADC) = फलं(CBA) (किमर्थम् ?)

अतः फलं $(A\text{DC}) = \frac{1}{2}$ फलं(ABCD)

$= \frac{1}{2}$ (DC × AN) (किमर्थम् ?)



आकृतिः 9.20

अतः $\Delta\, A$DC त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ × DC आधारः × सङ्गतौन्नत्यं AN

अन्यैः शब्दैः वदामः चेत् – त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं तु तस्य कस्यचन आधारस्य वा भुजस्य वा, सङ्गतौन्नत्यस्य च गुणनफलम् अस्ति। किं भवन्तः स्मरन्ति यत् त्रिभुजक्षेत्रफलस्य एतत् सूत्रं सप्तमकक्ष्यायाम् एव पठितवन्तः इति? अस्मात् सूत्रात् भवन्तः अवगन्तुं शक्नुवन्ति यत् द्वयोः समानत्रिभुजयोः समानाधारौ, समक्षेत्रफले सन्ति चेत् तयोः समसङ्गतौन्नत्यं भवति।

समसङ्गतौन्नत्यं प्राप्तुं द्वे अपि त्रिभुजे समानसमान्तरयोः भवेताम्। अधोदत्तस्य 9.2 प्रमेयस्य विलोमं प्राप्नुवन्ति।

9.3 प्रमेयम् - *द्वे त्रिभुजे ये समानाधारे (समाधारे वा) तिष्ठतः, तयोः समक्षेत्रफलम् अस्ति - ते समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठतः।*

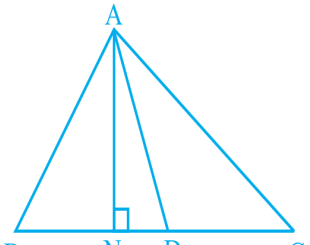
उपरितनपरिणामानां दृष्टान्तं दर्शयितुं कानिचन उदाहरणानि स्वीकुर्मः।

उदाहरणम् 3 : कस्यचन त्रिभुजस्य मध्यरेखा तत् त्रिभुजं – समक्षेत्रफलयुक्त-त्रिभुजद्वयेन विभजति इति निरूपयन्तु।

समाधानम् - ABC इति त्रिभुजं भवतु, AD मध्यरेखासु अन्यतमा भवतु (9.21 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

फलं(ABD) = फलं(ACD) इति निरूपयितुम् इच्छति।

यतः अस्मिन् सूत्रे औन्नत्यम् अस्ति, अतः $AN \perp BC$ इति चित्रयन्तु।



आकृतिः 9.21

इदानीं फलं(ABD) = $\frac{1}{2}$ आधारः × औन्नत्यम् (ABD त्रिभुजस्य)

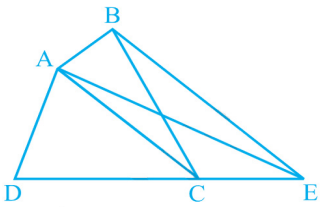
$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$

$= \frac{1}{2} \times CD \times AN$ (यतः BD = CD)

$= \frac{1}{2}$ × आधारः × औन्नत्यम् (ACD त्रिभुजस्य)

= फलं(ACD)

उदाहरणम् 4 : 9.22 तमायाम् आकृत्यां ABCD इति चतुर्भुजे BE || AC, अपि च BE रेखा DC रेखां E इति विस्तृतबिन्दौ मिलति। ADE त्रिभुजक्षेत्रफलं ABCDचतुर्भुजक्षेत्रफलेन समम् इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 9.22

समाधानम् - एताम् आकृतिं सावधानं पश्यन्तु।

BAC, EAC त्रिभुजे AC इति समानाधारे AC, BE इति समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठतः।

अतः फलं(BAC) = फलं(EAC) (9.2 तमेन प्रमेयेन)

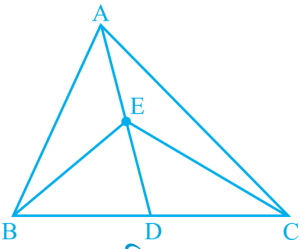
अतः फलं(BAC) + फलं(ADC) = फलं(EAC) + फलं(ADC)

(पार्श्वद्वये अपि समानक्षेत्रफलानां योजनम्)

अथवा फलं(ABCD) = फलं(ADE)

9.3 प्रश्नावलिः

1. 9.23 तमायाम् आकृत्यां ΔABC त्रिभुजस्य AD मध्यरेखायाम् E इति कश्चन बिन्दुः अस्ति । फलं(ABE) = फलं(ACE) इति निरूपयन्तु ।

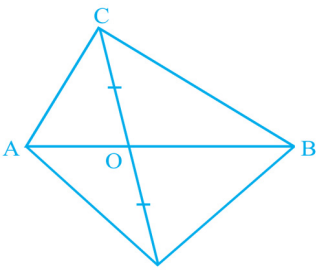


आकृतिः 9.23

2. ABC त्रिभुजे AD मध्यरेखायां मध्यबिन्दुः E । फलं(BED) = $\frac{1}{4}$ फलं(ABC) इति निरूपयन्तु ।

3. कस्यचन चतुर्भुजस्य कर्णौ तत् चतुर्भुजं समक्षेत्रफलयुक्त-त्रिभुजचतुष्टयेन विभजतः इति निरूपयन्तु ।

4. 9.24 तमायाम् आकृत्यां ABC, ABD त्रिभुजे AB इति समानाधारे तिष्ठतः। यदि CD रेखाखण्डः AB रेखया O बिन्दौ अर्ध्यते, तर्हि फलं(ABC) = फलं(ABD) इति निरूपयन्तु ।



आकृतिः 9.24

5. ABC त्रिभुजे क्रमशः BC, CA, AB इति भुजानां D, E , F इति मध्यबिन्दवः सन्ति । अत्र निरूपयन्तु यत् –

(i) BDEF समान्तरचतुर्भुजं अस्ति इति (ii) फलं(DEF) = $\frac{1}{4}$ फलं(ABC)

(iii) फलं(BDEF) = $\frac{1}{2}$ फलं(ABC)

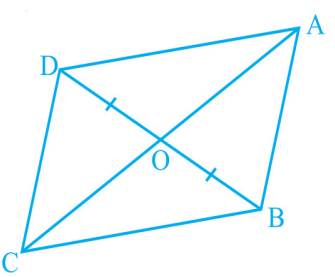
6. 9.25 तमायाम् आकृत्यां चतुर्भुजस्य AC, BD कर्णौ O बिन्दौ प्रतिच्छिनत्तः यथा OB = OD. यदि AB = CD तर्हि निरूपयन्तु यत् –

(i) फलं(DOC) = फलं(AOB)

(ii) फलं(DCB) = फलं(ACB)

(iii) DA || CB अथवा $ABCD$ समान्तरचतुर्भुजं अस्ति इति

(सङ्केतः – D,B इति बिन्दुतः AC रेखापर्यन्तं समालम्बौ चित्रयन्तु)

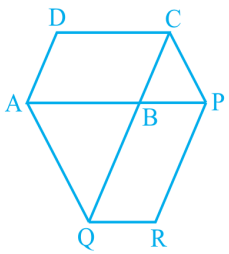


आकृतिः 9.25

7. ABC त्रिभुजे क्रमशः AB, AC इति भुजयोः D,E इति बिन्दू स्तः, यथा फलं(DBC) = फलं(EBC) स्यात् । DE || BC इति निरूपयन्तु ।

8. ABC त्रिभुजे XY इति रेखा BC भुजस्य समान्तरा अस्ति। यदि BE || AC, CF || AB च XY इति रेखां क्रमशः E,F इति बिन्द्वोः मिलतः, तर्हि फलं(ABE) = फलं(ACF) इति निरूपयन्तु।

9. $ABCD$ समान्तरचतुर्भुजस्य AB भुजः P इति बिन्दुपर्यन्तुं विस्तार्यते। A इति बिन्दुद्वारा गम्यमाना काचन रेखा या CP रेखायाः समान्तरा अस्ति, सा Q बिन्दुपर्यन्तं विस्तृतां CB रेखां मिलति। एवं PBQR चतुर्भुजं पूर्णं भवति (9.26 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु). फलं($ABCD$) = फलं(PBQR) इति .निरूपयन्तु।



आकृतिः 9.26

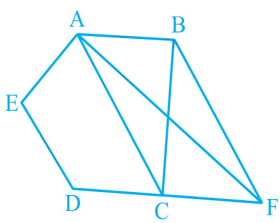
(सङ्केतः – AC,PQ रेखे योजयन्तु। इदानीं फलं(ACQ), फलं(APQ) च तोलयन्तु)

10. $ABCD$ विषमचतुर्भुजस्य AC, BD इति कर्णौ, AB||DC च। तौ कर्णौ O बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिन्तः। फलं(AOD) = फलं(BOC) इति निरूपयन्तु।

11. 9.27 तमायाम् आकृत्यां $ABCDE$ इति किञ्चन पञ्चभुजम्। B इति बिन्दुद्वारा गम्यमाना रेखा या AC रेखायाः समान्तरा अस्ति सा F बिन्दुपर्यन्तं विस्तृतां DC रेखां मिलति। अत्र निरूपयन्तु यत् –

(i) फलं(ACB) = फलं(ACF)

(ii) फलं($AEDF$) = फलं($ABCDE$)



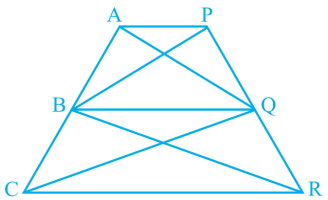
आकृतिः 9.27

12. इत्वारी इति कस्यचन ग्रामीणस्य समीपे चतुर्भुजाकारः कश्चन भूखण्डः विद्यते। भूखण्डस्य कस्माच्चित् कोणात् कश्चन भागः स्वास्थ्यकेन्द्रं निर्मातुं स्वीकरणीयम् इति ग्रामपञ्चायत-द्वारा निश्चितम् अभवत्। स्वस्य भूखण्डात् स्वीकृतभागस्य समभागं प्राप्नुयाम् येन स्वस्य भूखण्डः त्रिभुजकारः स्यात् – इति प्रतिबन्धेन इत्वारी तं प्रस्तावम् अङ्गीकृतवान्। एषः पस्तावः कथं क्रियान्वितः भवति इति विवृण्वन्तु।

13. $ABCD$ विषमचतुर्भुजे AB || DC। AC रेखायाः समान्तररेखा AB रेखां X इति बिन्दौ तथा BC रेखां Y इति बिन्दौ च प्रतिच्छिनत्ति। तर्हि फलं(ADX) = फलं(ACY) इति निरूपयन्तु।

(सङ्केतः – CX रेखां योजयन्तु)

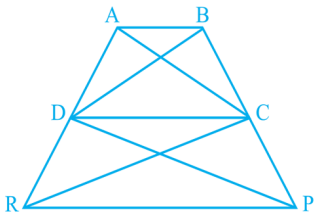
14. 9.28 तमायाम् आकृत्यां $AP \parallel BQ \parallel CR$ । तर्हि फलं(AQC) = फलं(PBR) इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 9.28

15. $ABCD$ चतुर्भुजस्य AC,BD कर्णौ O बिन्दौ प्रतिच्छिन्तः यथा फलं(AOD) = फलं(BOC). $ABCD$ कश्चन विषमचतुर्भुजं इति निरूपयन्तु।

16. 9.29 तमायाम् आकृत्यां फलं(DPC) = फलं(DRC)। तथा फलं(BDP) = फलं(ARC). $ABCD$, DCPR चतुर्भुजे विषमचतुर्भुजे इति निरूपयन्तु।

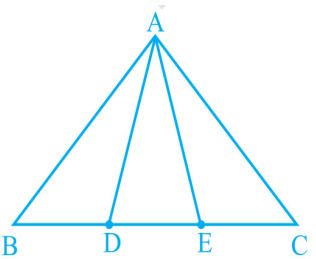


आकृतिः 9.29

प्रश्नावलि – 9.4 (विकल्पः)

1. $ABCD$ इति समान्तरचतुर्भुजं, $ABEF$ इति आयतं च AB इति समानाधारे तिष्ठतः, तयोः क्षेत्रफलं समम् अस्ति। समान्तरचतुर्भुजस्य परिधिः आयतस्य परिधेः अपेक्षया अधिकः इति निरूपयन्तु।

2. 9.30 तमायाम् आकृत्यां BC रेखायां D,E इति बिन्दुद्वयं यथा BD = DE = EC ॥ फलं(ABD)=फलं(ADE) = फलं(AEC) इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 9.30

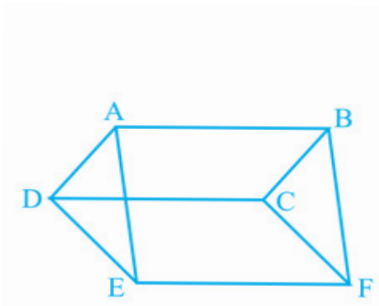
इदानीम् अस्य पाठस्य आरम्भे- बुधियायाः क्षेत्रं समत्रिभागेन विभक्तं वा? इति अनुत्तरित-प्रश्नस्य उत्तरं दातुं शक्नुवन्ति वा ?

|टिप्पणी - अत्र अवगच्छतु यत् BD = DE = EC, ABC त्रिभुजं ABD, ADE, AEC इति समक्षेत्रफलत्रिभुजत्रयेण विभक्ता अस्ति। तथैव BC इति रेखां n-इति समभागेन विभज्य तथा BC रेखायाः सम्मुखशीर्षं बिभाजकबिन्दुभिः सह योजनेन, भवन्तः ABC त्रिभुजं समक्षेत्रफलयुक्तैः n त्रिभुजैः विभक्तुं शक्नुवन्ति।

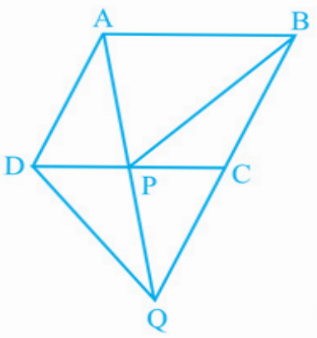
3. 9.31 तमायाम् आकृत्यां ABCD, DCFE, ABFE च चतुर्भुजानि सन्ति। फलं(ADE) = फलं(B-CF) इति निरूपयन्तु।

4. 9.32 तमायाम् आकृत्यां ABCD चतुर्भुजे BC रेखा Q बिन्दुपर्यन्तं विस्तारिता अस्ति, यथा AD = CQ। यदि AQ रेखा DC रेखां P बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति फलं(BPC) = फलं(DPQ) इति निरूपयन्तु।

(सङ्केतः – A, C बिन्दू योजयन्तु)

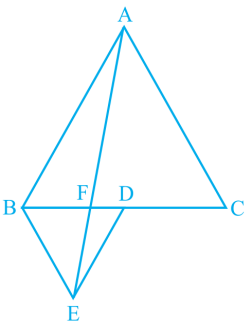


आकृतिः 9.31



आकृतिः 9.32

5. 9.33 तमायाम् आकृत्यां ABC, BDE इति समबाहुत्रिभुजयोः D इति बिन्दुः BC रेखायाः मध्यबिन्दुः अस्ति। यदि AE रेखा BC रेखां F बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति तर्हि निरूपयन्तु यत् –



आकृतिः 9.33

i. फलं(BDE) = $\frac{1}{4}$ फलं(ABC)

ii. फलं(BDE) = $\frac{1}{2}$ फलं(BAE)

iii. फलं(ABC) = 2फलं(BEC)

iv. फलं(BFE) = फलं(AFD)

v. फलं(BFE) = 2 फलं(FED)

vi. फलं(FED) = $\frac{1}{8}$ फलं(AFC)

[सङ्केतः – EC रेखां AD रेखया योजयन्तु। BE || AC, BE || AB च इत्यादि निरूपयन्तु]

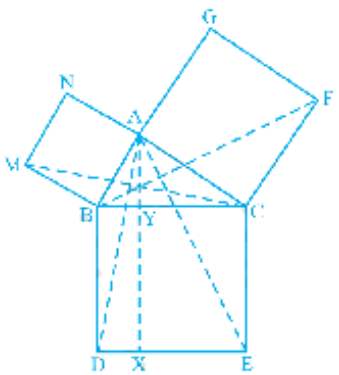
6. ABCD चतुर्भुजे AC, BD कर्णौ P बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिन्तः। फलं(APB) x फलं(CPD) = फलं(APD) x फलं(BPC) इति निरूपयन्तु । (सङ्केतः – A,C इति बिन्दुद्वयतः BD रेखापर्यन्तं समालम्बौ चित्रयन्तु)

7. ABC त्रिभुजस्य AB, BC भुजयोः क्रमशः P, Q इति मध्यबिन्दू स्तः। तथा AP रेखायाः R मध्यबिन्दुः अस्ति । अत्र निरूपयन्तु यत् –

(i) फलं(PRQ) = $\frac{1}{2}$ फलं(ARC) (ii) फलं(RQC) = $\frac{3}{8}$ फलं(ABC)

(iii) फलं(PBQ) = फलं(ARC)

8. 9.34 तमायाम् आकृत्यां ABC समकोणत्रिभुजं यत्र A बिन्दौ समकोणः अस्ति । BCED, ACFG, ADMN च क्रमशः BC, CA, AB इति भुजानां वर्गाः सन्ति । रेखाखण्डः $AX \perp$ DE । AX रेखा BC रेखां Y बिन्दौ मिलति । अत्र निरूपयन्तु यत् –



आकृतिः 9.34

(i) Δ MBC $\cong \Delta$ ABD (ii) फलं(BYXD) = 2 फलं(MBC)

(iii) फलं(BYXD) = फलं(ABMN) (iv) Δ FCB $\cong \Delta$ ACE

(v) फलं(CYXE) = 2 फलं(FCB) (vi) फलं(CYXE) = फलं(ACFG)

(vii) फलं(BCED) = फलं(ABMN) + फलं(ACFG)

टिप्पणी – सप्तमः परिणामः तु प्रसिद्ध-पैथागोरस्-प्रमेयम् अस्ति । भवन्तः अस्य प्रमेयस्य निरूपणं दशमकक्ष्यायां पठिष्यन्ति

9.5 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तांशान् अधीतवन्तः –

1. कस्याश्चित् आकृतेः क्षेत्रफलं तु केनचित् मात्रकेण उक्ता काचित् सङ्ख्या भवति या आकृत्या संवृत-तलस्य भागेन सम्बद्धा भवति।
2. द्वयोः सर्वाङ्गसमाकृत्योः समक्षेत्रफलं भवति, किन्तु अस्य विलोमः सत्यः न स्यात्।
3. यदि T आकृत्या निर्मितः समतलप्रदेशः - P,Q इति आकृतिद्वयेन निर्मितेन परस्परानाच्छादित-समतलप्रदेशद्वयेन निर्मितः अस्ति, तर्हि फलं(T) = फलं(P) + फलं(Q)। अत्र फलं(X) ×-आकृतेः क्षेत्रफलं सूचयति।
4. द्वे आकृती समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये स्तः यदि तयोः समानाधारः भवति, आकृत्योः समानाधारस्य अभिमुखं विद्यमानानि शीर्षाणि आधारस्य समान्तररेखायां भवन्ति।
5. समान्तरचतुर्भुजानि समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये च तिष्ठन्ति चेत्, तेषां समक्षेत्रफलं भवति।
6. समान्तरचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलं तु तस्य आधारस्य सङ्गतौन्नत्यस्य च गुणनफलं भवति।
7. समान्तरचतुर्भुजानि यानि समानाधारे तिष्ठन्ति, येषां समक्षेत्रफलम् अस्ति, तानि समानसमान्तरमध्ये तिष्ठन्ति।
8. यदि किञ्चन चतुर्भुजं, त्रिभुजं च समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठतः तर्हि त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं चतुर्भुजक्षेत्रफलस्य अर्धम् अस्ति।
9. त्रिभुजानि यानि समानाधारे, समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठन्ति तेषां समक्षेत्रफलं भवति।
10. त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं तु तस्य आधारस्य, सङ्गतौन्नत्यस्य गुणनफलस्य अर्धभागः भवति।
11. समानाधारे, समक्षेत्रफलयुक्त-त्रिभुजानि समानसमान्तरयोः मध्ये तिष्ठन्ति।
12. त्रिभुजस्य मध्यरेखा तत् त्रिभुजं समक्षेत्रफलयुक्त-त्रिभुजद्वयेन विभजति।

अध्यायः 10

वर्तुलाः

10.1 प्रस्तावना

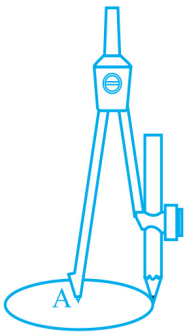
दैनन्दिनजीवने भवतां बहूनां वर्तुलाकारवस्तूनां परिचयः स्यात्। यथा वाहनस्य चक्राणि, कङ्कणानि, घटीमुखानि, विविधानि नाणकानि, कुञ्चिकावलयानि, कुङ्मलाः, इत्यादयः (10.1 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। घट्यां भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः यत् क्षणसूची घटीमुखं परितः वर्तुलपथि शीघ्रं भ्रमति । क्षणसूच्याः प्रयातः मार्गः वर्तुलाकारः अस्ति । अस्मिन् अध्याये भवन्तः वर्तुलानां विषये तत्सम्बद्धानाम् अन्यपारिभाषिकपदानां वर्तुलगुणधर्माणां विषये च पठिष्यन्ति।



आकृतिः 10.1

10.2 वर्तुलाः तत्सम्बद्धपारिभाषिकपदानि च - समीक्षा

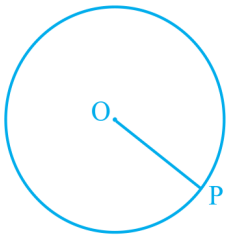
कञ्चन वर्तुलकारं स्वीकृत्य तत्र अङ्कनीं योजयन्तु । तस्य सूच्यग्रभागं पत्रके कस्मिंश्चित् बिन्दौ संस्थाप्य अपरं कोणम् उद्घाट्य किञ्चित् दूरे स्थापयित्वा, तत् चालयित्वा एकं वर्तुलं निर्मान्तु । पत्रके अङ्कन्या प्रयातस्य संवृताकृतेः नाम किम् ? भवन्तः जानन्ति किं स एव वर्तुलः इति ? (10.2 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। भवन्तः कथं वर्तुलं प्राप्तवन्तः? भवन्तः A इति एकं नियतं बिन्दुं स्थापयित्वा A-बिन्दुतः नियतदूरे विद्यमानान् सर्वान् बिन्दून् योजितवन्तः। अनेन वयम् अधोदत्तं लक्षणं प्राप्नुमः।



आकृतिः 10.2

कस्मिंश्चित् तले विद्यमानानां सर्वेषां बिन्दूनां सङ्ग्रहः यः नियतबिन्दुतः तले नियतदूरे अस्ति, सः वर्तुलः इति उच्यते ।

नियतबिन्दुः एव वर्तुलस्य मध्यबिन्दुः अस्ति, तथा नियतदूरं वर्तुलस्य त्रिज्या इति उच्यते । 10.3 तमायाम् आकृत्यां O-बिन्दुः मध्यबिन्दुः, OP रेखा वर्तुलस्य त्रिज्या भवति ।

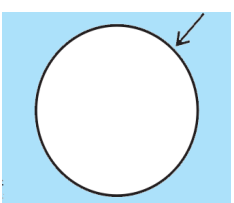


आकृतिः 10.3

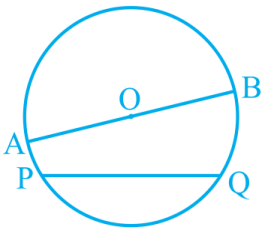
टिप्पणी - अत्र अवगच्छन्तु यत् यः रेखाखण्डः वर्तुलस्य मध्यबिन्दुं वर्तुले विद्यमानेन अन्येन केनचित् बिन्दुना योजयति सा अपि त्रिज्या इति उच्यते । अतः त्रिज्या इति पदम् उभयार्थे उपयुज्यते – रेखाखण्डः इत्यर्थे, तथा रेखायाः दीर्घता इत्यर्थे च ।

भवन्तः एतान् अधोदत्तांशान् षष्ठकक्ष्यायाम् एव अधीतवन्तः।

अत्र पुनःस्मारणं कुर्मः। यस्मिन् तले कश्चन वर्तुलः वर्तते सः वर्तुलः तं तलं त्रिधा विभजति । ते (i) वर्तुलस्य अन्तर्भागः यः वर्तुलान्तरः इति उच्यते (ii) वर्तुलः (iii) वर्तुलस्य बाह्यभागः यः वर्तुलबाह्यः इति उच्यते (10.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। वर्तुलः, अस्य आन्तरः च मिलित्वा वर्तुलप्रदेशं निर्मातः।

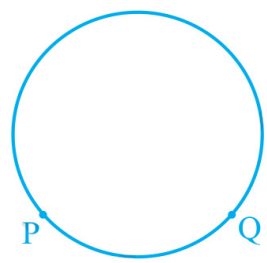

आकृतिः 10.4

यदि वर्तुले P,Q इति बिन्दू स्वीक्रियेते, तर्हि PQ रेखाखण्डः वर्तुलस्य जीवा इति उच्यते । (10.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। या जीवा वर्तुलस्य मध्यबिन्दुद्वारा गच्छति सा वर्तुलस्य व्यासः इति उच्यते । यथा त्रिज्या इति पदं तथा व्यासः इति पदम् अपि उभयार्थे प्रयुज्यते – रेखाखण्डार्थे, दीर्घतार्थे च । भवन्तः व्यासस्य अपेक्षया अन्यां काञ्चन दीर्घां जीवां द्रष्टुं शक्नुवन्ति वा ? न । अवगच्छन्तु यत् व्यासः एव दीर्घतमा जीवा इति । अपि च सर्वेषां व्यासानां समानदीर्घता भवति । व्यासः त्रिज्यायाः द्विगुणितः भवति । 10.5 तमायाम् आकृत्यां AOB इति वर्तुलस्य व्यासः अस्ति । वर्तुले कति व्यासाः भवन्ति ? किञ्चन वर्तुलं निर्माय तत्र कति व्यासः भवन्ति इति पश्यन्तु ।

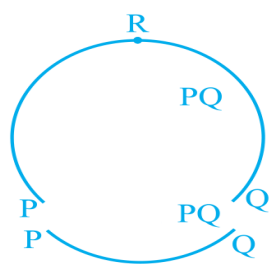


आकृतिः 10.5

द्वयोः बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानस्य वर्तुलस्य कस्यचन भागस्य चापः इति उच्यते । 10.6 तमायाम् आकृत्यां P,Q इति बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानान् वर्तुलस्य भागान् पश्यन्तु । भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् तत्र भागद्वयम् अस्ति यस्मिन् एकः बृहत्तरः अपरः लघुतरः च इति (10.7 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। बृहत्तरचापः PQ दीर्घचापः अन्यः लघुचापः PQ इति च उच्येते । PQ लघुचापः ($\overset{\frown}{PQ}$) इति, PQ दीर्घचापः ($\overset{\frown}{PRQ}$) इति च उच्येते, यत्र चापे P, Q बिन्द्वोः मध्ये R इति कश्चन बिन्दुः। यावत् अन्यथा न उच्यते $\overset{\frown}{PQ}$ चापः लघुचापम् एव सूचयति । यदा P,Q इति बिन्दू व्यासस्य उभयकोणौ भवतः तदा चापद्वयम् अपि समानं भवति । एषः अर्धवर्तुलः इति उच्यते ।



आकृतिः 10.6



आकृतिः 10.7

पूर्णवर्तुलस्य दीर्घता तस्य परिधिः इति उच्यते । जीवायाः चापस्य च मध्ये विद्यमानः प्रदेशः वृत्तखण्डः इति उच्यते । भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् वृत्तखण्डः द्विधा भवति - दीर्घवृत्तखण्डः लघुवृत्तखण्डः च इति (10.8 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। चापस्य, त्रिज्यद्वयस्य च मध्ये च विद्यमानः प्रदेशः - यः मध्यबिन्दुं चापस्य अन्त्यबिन्दुभिः सह योजयति - सः त्रिज्यान्तरखण्डः इति उच्यते । वृत्तखण्डवत् भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् लघुचापः लघुत्रिज्यान्तरखण्डसङ्गतः अस्ति, तथा दीर्घचापः दीर्घत्रिज्यान्तरखण्डसङ्गतः अस्ति इति । 10.9 तमायाम् आकृत्यां OPQ प्रदेशः लघुत्रिज्यान्तरखण्डः अस्ति, तथा वर्तुलप्रदेशस्य अवशिष्टभागः दीर्घत्रिज्यान्तरखण्डः इति उच्यते । यदा चापद्वयम् अपि समम् – अर्थात् प्रत्येकम् अपि अर्धवर्तुलम् अस्ति, तदा वृत्तखण्डद्वयम्, त्रिज्यान्तरखण्डद्वयं च समानं भवति । अत्र प्रत्येकम् अपि खण्डः अर्धवर्तुलः इति उच्यते ।



आकृतिः 10.8,



आकृतिः 10.9

प्रश्नावलिः 10.1

1. रिक्तस्थानानि पूरयन्तु –

(i) वर्तुलस्य मध्यबिन्दुः वर्तुलस्य _____ भवति। (आन्तरः / बाह्यः)

(ii) कश्चन बिन्दुः यस्य मध्यबिन्दोः विद्यमानं दूरं त्रिज्यायाः अपेक्षया बृहत्तरम् अस्ति, सः वर्तुलस्य _____ भवति। (आन्तरः / बाह्यः)

(iii) वर्तुलस्य दीर्घतमा जीवा तु वर्तुलस्य _____ इति उच्यते।

(iv) यदा कस्यचन चापस्य अन्त्यबिन्दू व्यासस्य अन्त्यबिन्दू च समानौ स्तः तदा चापः _____ इति उच्यते।

(v) वर्तुलस्य वृत्तखण्डः तु चापस्य, तथा _____ इत्यस्य च मध्ये विद्यमानः प्रदेशः।

(vi) कश्चन वर्तुलः यस्मिन् तले अस्ति तत् तलम् _____ भागेषु विभजति।

2. अधोदत्तवाक्यानि सत्यानि उत न इति, कारणानि च वदन्तु –

(i) या रेखा वर्तुलस्य मध्यबिन्दुं वर्तुले विद्यमानेन अन्येन केनचित् बिन्दुना सह योजयति सा त्रिज्या इति उच्यते।

(ii) कस्यचन वर्तुलसय् जीवाः परिमितसमसङ्ख्यया एव भवन्ति।

(iii) यदि कश्चन वर्तुलः त्रिभिः समचापैः विभक्तः तर्हि प्रत्येकं चापः दीर्घचापः।

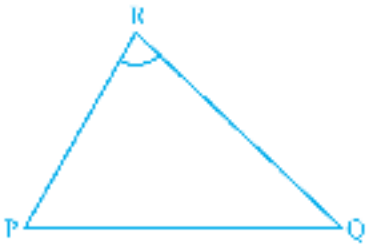
(iv) वर्तुलस्य काचित् जीवा या त्रिज्यायाः अपेक्षया द्विगुणिता अस्ति, सः व्यासः इति उच्यते।

(v) जीवायाः, तस्याः सङ्गतचापस्य च मध्ये विद्यमानः प्रदेशः त्रिज्यान्तरखण्डः इति उच्यते।

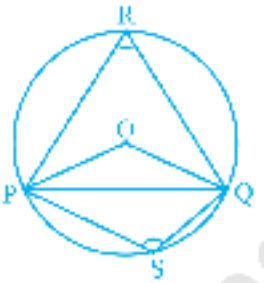
(vi) वर्तुलः काचन समतलाकृतिः।

10.3 जीवया वृत्तबिन्दुना च जातः आन्तरितकोणः

PQ इति रेखाखण्डं स्वीकुर्वन्तु, तथा R इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु यः बिन्दुः PQ रेखाखण्डे नास्ति। PR, QR च योजयन्तु (10.10 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। तदा PRQ इति कोणः R इति बिन्दौ PQ रेखाखण्डेन जातः अन्तरितकोणः। 10.11 तमायाम् आकृत्यां ∠POQ, ∠PRQ, ∠PSQ कोणान् किमिति वदामः? POQ इति कोणः O बिन्दौ जीवया जातः अन्तरितकोणः। ∠PRQ, ∠PSQ कोणौ क्रमशः R, S इति बिन्द्वोः दीर्घचापलघुचापयोः PQ द्वारा अन्तरितकोणौ स्तः।

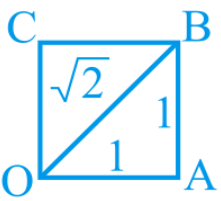


आकृतिः 10.10,



आकृतिः 10.11

इदानीं जीवायाः आमापस्य तथा मध्यबिन्दौ तया जातस्य अन्तरितकोणस्य मध्ये विद्यमानं सम्बन्धं परिशीलयामः। भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् वर्तुलस्य बह्वीः जीवाः चित्रयित्वा तथा ताभिः मध्यबिन्दौ अन्तरितान् कोणान् परिशीलयामः चेत् ज्ञायते यत् जीवा यावती बृहत्तरा, मध्यबिन्दौ तया जातः अन्तरितकोणः अपि तावान् बृहत्तरः भवति इति। यदा वर्तुलस्य समजीवाद्वयं स्वीकुर्वन्ति तदा किं भवति ? मध्यबिन्दौ अन्तरिताः कोणाः समाः भवन्ति उत न ?

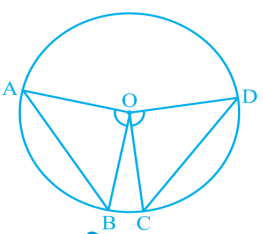


आकृतिः 10.12

वर्तुलस्य द्वे अथवा द्व्यधिक-समजीवाः चित्रयित्वा ताभिः मध्यबिन्दौ जातान् अन्तरितकोणान् अवलोकयन्तु (10.12 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् ताभिः मध्यबिन्दौ जाताः अन्तरितकोणाः समाः भवन्ति इति। अस्य तथ्यस्य निरूपणं कुर्मः।

प्रमेयम् 10.1 - *वर्तुलस्य समजीवाः मध्यबिन्दौ समानान् कोणान् निर्मान्ति।*

उपपत्तिः - वर्तुलस्य समजीवाद्वयम् AB, CD च इति भवतु। अस्य मध्यबिन्दुः O इति भवतु (10.13 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। $\angle AOB = \angle COD$ इति निरूपणीयम्।



आकृतिः 10.13

AOB, COD त्रिभुजयोः

$OA = OC$ (समानवर्तुलस्य त्रिज्ये)

$OB = OD$ (समानवर्तुलस्य त्रिज्ये)

$AB = CD$ (दत्तम्)

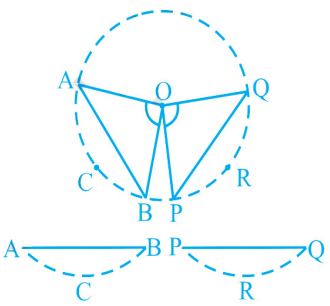
अतः $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (भु-भु-भु SSS नियमानुसारम्)

अनेन $\angle AOB = \angle COD$ इति प्राप्नुमः (सर्वाङ्गसमत्रिभुजयोः सङ्गतभागौ)

टिप्पणी - सौकर्यार्थं सर्वाङ्गसमत्रिभुजानां सङ्गतभागाः इति स्थाने सङ्क्षेपेण CPCT इति प्रयोगं कुर्मः। यतः एतस्य नियमस्य असकृत् उपयोगं कुर्मः।

इदानीं यदि कस्यचन वर्तुलस्य जीवाद्वयं मध्यबिन्दौ समान-कोणौ निर्माति, तर्हि तयोः जीवयोः विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? तौ समौ उत न ? एतं विषयम् अधोदत्ताभ्यासेन पश्यामः।

किञ्चन पारदर्शपत्रं स्वीकृत्य तत्र किञ्चन वर्तुलं चित्रयन्तु। वर्तुलानुदिशं तत् पत्रं कर्तयन्तु यथा चक्रिका प्राप्येत। O इति मध्यबिन्दौ AOB इति कोणं चित्रयन्तु यत्र A, B वर्तुलस्य परिधिबिन्दू स्तः। मध्ये AOB कोणेन समं POQ इति अन्यं कोणं कुर्वन्तु। AB, PQ इति अनुदिशि तां चक्रिकां कर्तयन्तु (10.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। भवन्तः वर्तुलस्य ACB, PRQ इति वृत्तखण्डद्वयं प्राप्तुं शक्नुवन्ति। यदि एकस्य उपरि अन्यः खण्डः स्थापितः चेत् ततः किम् अवगच्छन्ति ? तौ द्वौ अपि परस्परम् आच्छादयतः इति। अर्थात् – तौ सर्वाङ्गसमौ इति। अतः $AB = PQ$.



आकृतिः 10.14

यद्यपि भवन्तः एकस्याः विशिष्टस्थित्याः कृते एतम् अभ्यासं कृतवन्तः तथापि अन्येषां कोणानां कृते अपि अस्य अभ्यासस्य प्रयत्नं कुर्वन्तु। सर्वाः जीवाः अधोदत्तप्रमेयस्य कारणेन समानाः भविष्यन्ति।

10.2 प्रमेयम् - *यदि वर्तुलस्य जीवाभिः मध्यबिन्दौ निर्मिताः कोणाः समानाः, तर्हि ताः जीवाः अपि समानाः भवन्ति।*

उपरितनप्रमेयम् 10.1 प्रमेयस्य विलोमम् अस्ति। 10.13 तमायाम् आकृत्यां $\angle AOB = \angle COD$ इति स्वीक्रियते चेत् -

$$\Delta AOB \cong \Delta COD \text{ (किमर्थम् ?)}$$

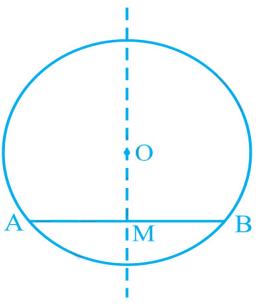
इदानीं भवन्तः $AB = CD$ इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा ?

प्रश्नावलिः – 10.2

1. भवन्तः स्मरन्तु, यदि द्वयोः वर्तुलयोः समानत्रिज्या अस्ति तर्हि द्वौ अपि सर्वाङ्गसमौ इति। निरूपयन्तु यत् सर्वाङ्गसमवर्तुलयोः समजीवाः मध्यबिन्दौ समानकोणान् निर्मान्ति।
2. यदि सर्वाङ्गसमवर्तुलयोः जीवाभ्यां मध्यबिन्दौ समकोणौ निर्मितौ, तर्हि ते जीवे समे इति निरूपयन्तु।

10.4 मध्यबिन्दुतः जीवापर्यन्तं विद्यमानः समालम्बः

क्रियाकलापः - पारदर्शपत्रे कञ्चन वर्तुलं चित्रयन्तु - यस्य O मध्यबिन्दुः। AB जीवां च चित्रयन्तु। जीवायाः एकः बिन्दुः अपरं यथा स्पृशति, तथा O बिन्दोः रेखानुदिशं पत्रं पुटीकुर्वन्तु । पुटीकृता रेखा AB रेखां M बिन्दौ कर्तयतु। तदा $\angle OMA = \angle OMB = 90^0$. अथवा $OM \perp AB$। B बिन्दुः A बिन्दुम् आवृणोति किम्? (10.15 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। आम् आवृणोति।



आकृतिः 10.15

अतः $MA = MB$. भवन्तः स्वयं

OA रेखां OB रेखया सह योजयित्वा अस्य निरूपणं यच्छन्तु । तथा OMA, OMB इति लम्बकोणत्रिभुजे सर्वाङ्गसमे इति निरूपयन्तु। एतत् उदाहरणम् अधोदत्तपरिणामस्य विशिष्टं निदर्शनम् अस्ति।

10.3 प्रमेयम् - *वर्तुलस्य मध्यबिन्दोः जीवापर्यन्तं विद्यमानः समालम्बः जीवाम् अर्धयति।*

अस्य प्रमेयस्य विलोमः कः ? एतं विलोमं लेखितुम् आदौ 10.3 तमे प्रमेये विद्यमानपरिकल्पना, तथा तत्र निरूपितविषयः च स्पष्टः भवतु। वर्तुलस्य मध्यबिन्दोः जीवापर्यन्तं चित्रितः समालम्बः दत्तः अस्ति। तथा सः समालम्बः जीवाम् अर्धयति इति निरूपणीयम्। अतः विलोमे दत्तविषयः तु 'यदि वर्तुलस्य मध्यबिन्दोः आरभ्यमाना रेखा जीवाम् अर्धयति'। अस्माभिः निरूपणीयः विषयः – 'सा रेखा जीवायाः समालम्बा इति। अतः विलोमः तु -

10.4 प्रमेयम् - *वर्तुलस्य मध्यबिन्दुद्वारा चित्रिता रेखा या जीवाम् अर्धयति, सा जीवायाः समालम्बा स्यात्।*

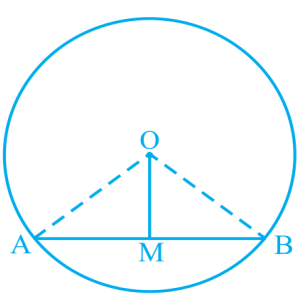
एतत् सत्यं किम्? कासुचित् स्थितिषु प्रयत्नं कृत्वा पश्यन्तु । भवन्तः अवलोकयन्ति यत् एतासु स्थितिषु उपरिदत्तप्रमेयम् सत्यम् एव इति। तर्हि सामान्यतया वयम् अधोदत्तक्रियाकलापेन अस्य सोपानानि लिखित्वा तेषाम् उचितकारणानि अपि दद्मः।

वर्तुलस्य AB=जीवा भवतु, यस्य मध्यबिन्दुः O भवतु। O बिन्दुं AB रेखायाः M इति मध्यबिन्दुना योजयन्तु। $OM \perp AB$ इति निरूपणीयम्। OA, OB च योजयन्तु (10.16 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) OAM, OBM त्रिभुजयोः,

$OA = OB$ (किमर्थम्)

$AM = BM$ (किमर्थम्)

$OM = OM$ (सामान्यम्)



आकृतिः 10.4

Δ O*A*M $\cong$ Δ OBM (कथम् ?)

अनेन $\angle$OM*A* = $\angle$OMB = 90^0 (किमर्थम् ?) इति प्राप्नुमः।

10.5 बिन्दुत्रयद्वारा वर्तुलः

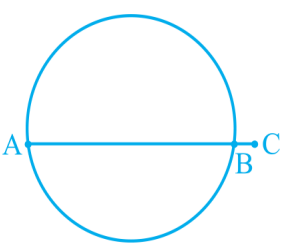
षष्ठाध्याये भवन्तः अधीतवन्तः यत् काञ्चन रेखां निर्णेतु बिन्दुद्वयं पर्याप्तम् इति। अर्थात् बिन्दुद्वयद्वारा एकमात्ररेखा गच्छति इति ज्ञायते। अत्र कश्चन स्वाभाविकः प्रश्नः उदेति यत् वर्तुलं निर्णेतुं कति बिन्दवः अपेक्षिताः इति ?

P बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। अनेन बिन्दुना कति वर्तुलान् चित्रयितुं शक्यते ? भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् अनेन बिन्दुना यथेच्छं वर्तुलान् चित्रयितुं शक्नुवन्ति इति {10.17(i)तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}। इदानीं P,Q इति बिन्दुद्वयं स्वीकुर्वन्तु। भवन्तः पुनः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् P,Q बिन्दुद्वयेन अनन्तवर्तुलान् चित्रयितुं शक्यते इति {(10.17(ii) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}. *A*,B,C इति बिन्दुत्रयं स्वीक्रियते चेत् किं भविष्यति ? त्रिभिः सरैखिकबिन्दुभिः वर्तुलं चित्रयितुं शक्नुवन्ति किम् ?



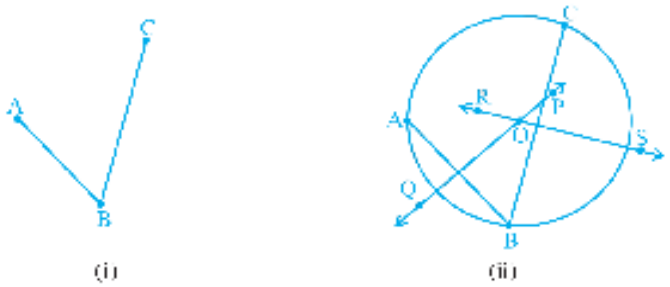
आकृतिः 10.17

यदि बिन्दुद्वयं रेखायां तिष्ठति, तृतीयः बिन्दुः वर्तुलस्य अन्तः वा बहिः वा भवति। यथा वर्तुलः अन्यबिन्दुद्वयेन गच्छति (10.18 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 10.18

अतः समानरेखायाम् अविद्यमानान् *A*, B, C इति त्रीन् बिन्दून् स्वीकुर्मः। ते बिन्दवः सरैखिकाः न [10.19(i)तमाम् आकृतिं पश्यन्तु]। *A*B, BC रेखयोः PQ, RS इति समालम्ब-अर्धके चित्रयन्तु। एते समालम्ब-अर्धके O बिन्दौ प्रतिच्छिन्ताम् (PQ, RS च परस्परं प्रतिच्छिन्तः यतः ते रेखे समान्तरे न स्तः) {10.19(ii) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}।



आकृतिः10.19

O बिन्दुः AB रेखायाः PQ इति समालम्ब-अर्धके अस्ति, OA = OB इति दत्तम् अस्ति। यतः, कस्यचन रेखाखण्डस्य समालम्ब-अर्धके विद्यमानः प्रत्येकं बिन्दुः तस्य रेखाखण्डस्य कोणबिन्दुभ्यः समदूरे अस्ति इति सप्तमाध्याये निरूपितमस्ति।

तथैव O बिन्दुः BC रेखायाः RS इति समलम्ब-अर्धके अस्ति इति कारणेन –

$$OB = OC।$$

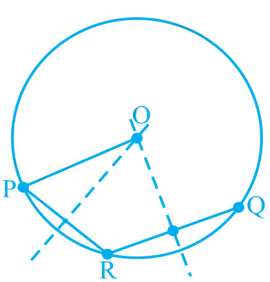
अतः OA = OB = OC अर्थात् – A,B,C इति बिन्दवः O बिन्दोः समदूरे सन्ति। अतः यदि O बिन्दुं केन्द्रीकृत्य OA त्रिज्यया कञ्चन वर्तुलं चित्रयन्ति चेत् सः वर्तुलः B,C इति बिन्दुद्वारा गच्छति। अनेन अवगन्तुं शक्यते यत् कश्चन वर्तुलः A,B,C इति बिन्दुत्रय-द्वारा अपि गच्छति इति। भवन्तः जानीयुः यत् द्वे समलम्ब-अर्धके एकस्मिन् बिन्दौ एव प्रतिच्छिन्तः इति। अतः OA त्रिज्यया एकः वर्तुलः चित्रयितुं शक्यः। अन्यैः शब्दैः वदामः चेत् – A, B, C बिन्दूनां द्वारा कश्चन अद्वितीयः वर्तुलः गच्छति इति। भवन्तः इदानीम् अधोदत्तप्रमेयं निरूपितवन्तः।

प्रमेयम् 10.5 - *केनचित् असरैखिक-बिन्दुत्रय-द्वारा एकमात्रः अद्वितीयः वर्तुलः गच्छति इति।*

टिप्पणी - यदि ABC किञ्चन त्रिभुजम् अस्ति तर्हि 10.5 प्रमेयेन त्रिभुजस्य A, B, C इति शीर्षैः कश्चन अद्वितीयः वर्तुलः गच्छति। एषः वर्तुलः ΔABC त्रिभुजस्य वृत्तवर्तुलः भवति। अस्याः त्रिभुजाया¬ केन्द्रं तथा त्रिज्या क्रमशः वृत्तकेन्द्रम्, वृत्तत्रिज्या इति उच्यते।

उदाहरणम् 1 : कस्यचन वर्तुलस्य चापः दत्तः अस्ति, वर्तुलं पूरयन्तु।

समाधानम् - वर्तुलस्य चापः PQ दत्तः अस्ति। अस्माभिः वर्तुलः पूरणीयः। अर्थात् – तस्य केन्द्रम्, त्रिज्या ज्ञातव्यौ। चापे R इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। PR, RQ योजयन्तु। वर्तुलस्य केन्द्रं, त्रिज्यां च ज्ञातुं 10.5 तमं प्रमेयं निरूपयितुम् उपयुक्तं निर्माणम् अत्रापि उपयुज्यताम्।



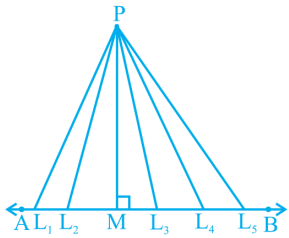
आकृतिः 10.20

प्राप्तकेन्द्रं त्रिज्यां च स्वीकृत्य वर्तुलं पूरयामः (10.20 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

प्रश्नावलिः – 10.3

1. वर्तुलस्य बहूनि युग्मानि चित्रयन्तु। प्रत्येकं युग्मे कति बिन्दवः सामान्याः सन्ति ? अधिकतम-सामान्य-बिन्दूनां सङ्ख्या का ?
2. कश्चन वर्तुलः दत्तः अस्ति। तस्य केन्द्रम् अवगन्तुं वर्तुलं निर्मान्तु।
3. यदि वर्तुलद्वयं बिन्दुद्वये प्रतिच्छिनत्ति, निरूपयन्तु यत् तयोः केन्द्रे सामान्यजीवायाः समालम्बअर्धके स्तः इति।

10.6 समजीवाः तथा केन्द्रतः तासां दूरम्



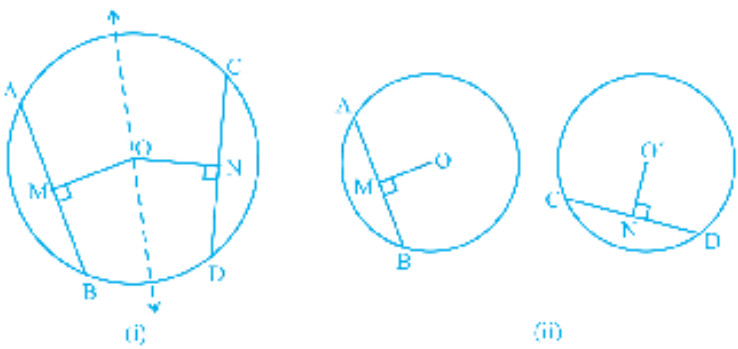
आकृतिः 10.21

*A*B काचन रेखा, P कश्चन बिन्दुः च भवताम्। यतः रेखायाम् अनन्ताः बिन्दवः भवन्ति, एतान् बिन्दून् P बिन्दुना सह योजयन्ति चेत् भवन्तः अनन्तरेखाखण्डान् प्राप्नुवन्ति, यथा PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4 इत्यादयः। एतासु रेखासु का रेखा P बिन्दुतः *A*B रेखायाः समदूरे अस्ति ? किञ्चित् विचिन्त्य उत्तरितुं शक्नुवन्ति। एतेषु रेखाखण्डेषु P बिन्दुतः *A*B रेखापर्यन्तं विद्यमाना PM इति समलम्बरेखा (10.21 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) न्यूनतमे दूरे भवति। गणिते P बिन्दुतः *A*B पर्यन्तं विद्यमानं दूरं PM इति न्यूनतमदीर्घतायुतरेखया सूचयामः। अतः भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत्

बिन्दुतः रेखापर्यन्तं विद्यमान-समालम्बदीर्घता तु रेखातः बिन्दुपर्यन्तं विद्यमानं दूरम् एव अस्ति।

अत्र अवगच्छन्तु यत् यदि बिन्दुः रेखायाम् एव तिष्ठति तर्हि बिन्दुतः रेखापर्यन्तं विद्यमानं दूरं शून्यम् इति।

वर्तुलस्य अनन्तसङ्ख्यया जीवाः भवितुम् अर्हन्ति। भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् वर्तुले विद्यमानासु जीवासु दीर्घतरा जीवा लघुतरजीवायाः अपेक्षया केन्द्रतः समीपतरा भवति। भवन्तः बह्वीषु दीर्घतासु वर्तुलस्य बहुविधजीवाः चित्रयित्वा तासां दूरं केन्द्रतः मापयित्वा उपरिदत्तविषयम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति। केन्द्रतः दीर्घतमायाः जीवायाः व्यासस्य च किं दूरम् ? यतः तस्मिन् एव केन्द्रं तिष्ठति, दूरं तु शून्यम् एव। किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् जीवायाः दीर्घतायाः तथा तस्याः केन्द्रतः विद्यमानस्य दूरस्य च कोऽपि सम्बन्धः अस्ति इति? इदानीम् एतं विषयं परिशीलयामः।

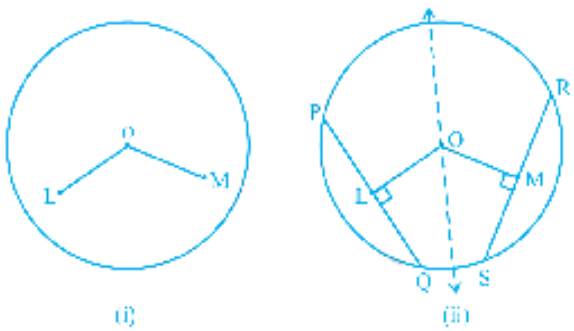


आकृतिः 10.22

क्रियाकलापः - पारदर्शपत्रे कयाचित् त्रिज्यया युक्तं कञ्चन वर्तुलं चित्रयन्तु । AB, CD इति समजीवाद्वयं चित्रयन्तु । अपि च O केन्द्रतः OM, ON इति समलम्बौ चित्रयन्तु । आकृतिं तथा पुटीकुर्वन्तु यथा D बिन्दुः B बिन्दौ भवति, C बिन्दुः A बिन्दौ च [10.22(i)तमाम् आकृतिं पश्यन्तु]। भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् O बिन्दुः पुटीकृतरेखायां तिष्ठति, तथा N बिन्दुः M बिन्दौ तिष्ठति । अतः OM = ON । O, O' इति मध्यबिन्दुद्वयेन अपि सर्वाङ्गसमवर्तुलौ चित्रयित्वा, AB,CD इति समजीवां च स्वीकृत्य एतं क्रियाकलापम् आवर्तयन्तु । OM, O'N इति समलम्बौ जीवयोः चित्रयन्तु [10.22(ii) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु]. एकं वर्तुलाकारं कर्तयित्वा अपरे स्थापयन्तु, यथा AB रेखा CD रेखाम् आवृणुयात् । तदा भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् O बिन्दुः O' बिन्दुना सह ऐक्यम् आप्नोति, तथा M बिन्दुः N बिन्दुना सह ऐक्यम् आप्नोति । एवम्प्रकारेण भवन्तः अधोदत्तं विषयं परिशीलितवन्तः।

10.6 प्रमेयम् - *वर्तुलानाम् (अथवा सर्वाङ्गसमवर्तुलानां) समजीवाः केन्द्रात्(केन्द्रेभ्यः) समदूरे सन्ति ।*

अग्रे अस्य प्रमेयस्य विलोमः सत्यः उत न इति परिशील्यते । एतदर्थं O केन्द्रतः कञ्चन वर्तुलं चित्रयन्तु । O केन्द्रतः समदीर्घतायुक्तं OL, OM इति रेखाखण्डद्वयं चित्रयन्तु यथा तत् वर्तुलस्य अन्तः स्यात् {10.23(i) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}. अग्रे वर्तुलस्य PQ,RS इति जीवे चित्रयन्तु यथा तत् क्रमशः OL, OM इत्यनयोः समालम्बे स्याताम् [10.23(ii) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु] । PQ, RS इति अनयोः दीर्घतां मापयन्तु । एतयोः दीर्घतायां भेदः अस्ति किम् ? न, द्वे अपि समे एव । अन्येषां समरेखाखण्डानां कृते एतं क्रियाकलापम् आवर्तयन्तु तथा तेषां समालम्बं जीवाः चित्रयन्तु । अनेन 10.6 प्रमेयस्य विलोमं परिशीलयामः, यत् अधोदत्तम् अस्ति ।



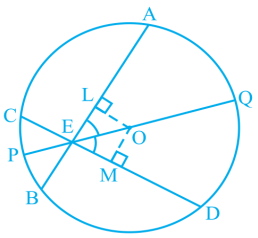
आकृतिः 10.23

प्रमेयम् 10.7 - *वर्तुलस्य केन्द्रतः समदूरे विद्यमानाः जीवाः समदीर्घतायुताः भवन्ति ।*

इदानीं केनचित् उदाहरणेन उपरितन-परिणामान् अवगमयामः।

उदाहरणम् 2 : यदि वर्तुलस्य परस्परप्रतिच्छिन्ने जीवे प्रतिच्छेदबिन्दुद्वारा गच्छता व्यासेन सह समकोणौ कुरुतः। जीवे समाने इति निरूपन्तु।

समाधानम् - AB, CD इति वर्तुलस्य जीवाद्वयं भवतु यस्य O मध्यबिन्दुः स्यात्। ते द्वे जीवे E बिन्दौ प्रतिच्छिन्तः। E बिन्दुद्वारा गम्यमानः व्यासः PQ यथा $\angle AEQ = \angle DEQ$ (10.24 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु). अस्माभिः $AB = CD$ इति निरूपणीयम्। AB, CD जीवयोः क्रमशः OL, OD समलम्बौ चित्रयन्तु। इदानीम् –



आकृतिः 10.24

$\angle LOE = 180^0 - 90^0 - \angle LEO = 90^0 - \angle LEO$ (त्रिभुजस्य कोणयोगगुणधर्मः)

$= 90^0 - \angle AEQ = 90^0 - \angle DEQ$

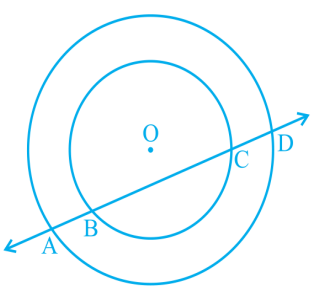
$= 90^0 - \angle MEO = \angle MOE$

OLE, OME त्रिभुजयोः

	$\angle LEO = \angle MEO$	(किमर्थम् ?)
	$\angle LOE = \angle MOE$	(उपरि निरूपितम्)
	$EO = EO$	(सामान्यम्)
अतः	$\Delta OLE \cong \Delta OME$	(किमर्थम् ?)
अनेन	$OL = OM$	इति प्राप्नुमः
अतः	$AB = CD$	(किमर्थम् ?)

प्रश्नावलिः – 10.4

1. 5cm, 3cm मित-त्रिज्यायुक्तं वर्तुलद्वयं बिन्दुद्वये प्रतिच्छिनत्ति। तथा तयोः वर्तुलयोः केन्द्रयोः मध्ये विद्यमानं दूरं 4cm मितम्। तयोः सामान्यजीवायाः दीर्घताम् अन्विषन्तु।
2. यदि वर्तुलस्य समजीवाद्वयं वर्तुलस्य अन्तः एव प्रतिच्छिनत्ति, निरूपयन्तु यत् एतस्याः जीवायाः वृत्तखण्डः अपरस्याः जीवायाः सङ्गतवृत्तखण्डेन समः अस्ति इति।
3. यदि वर्तुलस्य समजीवाद्वयं वर्तुलस्य अन्तः एव प्रतिच्छिनत्ति, निरूपयन्तु यत् या रेखा प्रतिच्छेदबिन्दुं केन्द्रेण योजयति, सा जीवाभिः सह समकोणान् करोति इति।
4. यदि काचन रेखा एककेन्द्रीयवर्तुलद्वयं प्रतिच्छिनत्ति, वर्तुलयोः केन्द्रं O बिन्दुः भवतु, तथा प्रतिच्छिन्नबिन्दवः A, B, C, D भवन्तु, तर्हि $AB = CD$ इति निरूपयन्तु (10.25 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 10.25

5. रेश्मा, सल्मा, मन्दीपा इति तिस्रः बालिकाः कस्मिंश्चित् उद्याने 5m त्रिज्यायुक्ते वर्तुले स्थित्वा काञ्चन क्रीडां क्रीडन्ति। रेश्मा सल्मां प्रति कन्दुकं क्षिपति, सल्मा मन्दीपां

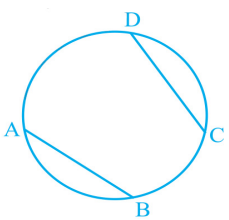
प्रति, मन्दीपा च रेश्मां प्रति क्षिपति । यदि रेश्मा-सल्मयोः तथा सल्मामन्दीपयोः च मध्ये विद्यमानं दूरं 6m मितं तर्हि रेश्मामन्दीपयोः मध्ये विद्यमानं दूरं किम् ?

6. 20m मितत्रिज्यायुक्तं वर्तुलाकारं किञ्चन उद्यानं कस्याञ्चित् वसत्याम् अस्ति । अङ्कुरः, सयिद्दः, डेविडः चेति त्रयः बालकाः उद्यानस्य सीमायां समदूरे उपविशन्ति । प्रत्येकं बालस्य हस्ते किञ्चित् दूरवाणीक्रीडनकम् अस्ति यया ते परस्परं भाषन्ते । प्रत्येकं दूरवाण्याः तन्त्र्याः दीर्घताम् अन्विषन्तु।

10.7 वर्तुलचापेन अन्तरितः कोणः

भवन्तः अवगतवन्तः यत् व्यासातिरिक्ताः वर्तुलस्य जीवायाः अन्त्यबिन्दवः वर्तुलं चापद्वयेन बिभजन्ति – एकं दीर्घम् अन्यत् लघु च । यदि समजीवाद्वयं स्वीक्रियते तर्हि चापस्य आमापस्य विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? प्रथमजीवाद्वारा निर्मितः चापः अपरजीवया निर्मितेन सङ्गतचापेन समः अस्ति किम् ? वस्तुतः चापद्वयम् अपि समं मात्रं न अपि तु सर्वाङ्गसमम् अपि । अर्थात् – एकं चापम् अपरस्य उपरि वक्रीकरणं विना तथैव स्थापयामः चेत् एकः चापः अपरम् अध्यारोहति ।

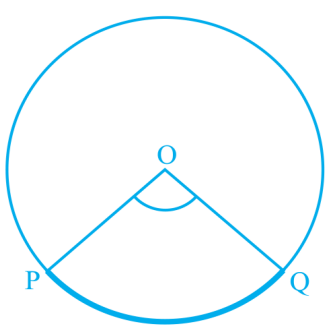
वर्तुलस्य CD जीवासङ्गतम्, CD जीवानुदिशं चापं कर्तयित्वा AB जीवया निर्मिते अपरचापे स्थापयित्वा तथ्यं परिशीलयितुं शक्नुवन्ति । भवन्तः अवलोकयन्ति यत् CD चापः AB चापं पूर्णतया अध्यारोहति इति (10.26 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अनेन अवगन्तुं शक्नुमः यत् समजीवे समचापौ कुरुतः इति । तथा विलोमेन समचापौ समजीवे कुरुतः इति । एतं विषयम् अधोदत्तप्रकारेण वक्तुं शक्नुमः -



आकृतिः 10.26

यदि वर्तुलस्य जीवाद्वयं समानं तर्हि तयोः सङ्गतचापौ सर्वाङ्गसमौ भवतः। तथा विलोमेन - यदि द्वौ चापौ सर्वाङ्गसमौ तर्हि तयोः सङ्गतजीवे समाने समे भवतः।

अपि च वर्तुलस्य केन्द्रे चापेन अन्तरितः कोणः तु सङ्गतजीवया केन्द्रे अन्तरितकोणः इति लक्षितं भवति । अर्थात् – कोणः लघुचापेन अन्तरितः तथा प्रतिवर्तिकोणः दीर्घचापेन अन्तरितः भवति । अतः 10.27 तमायाम् आकृत्यां PQ लघुचापेन अन्तरितः कोणः तु O बिन्दौ भवति । तस्य नाम $\angle POQ$. तथा PQ दीर्घचापेन O बिन्दौ अन्तरितः कोणः POQ इति प्रतिवर्तिकोणः भवति ।



आकृतिः 10.27

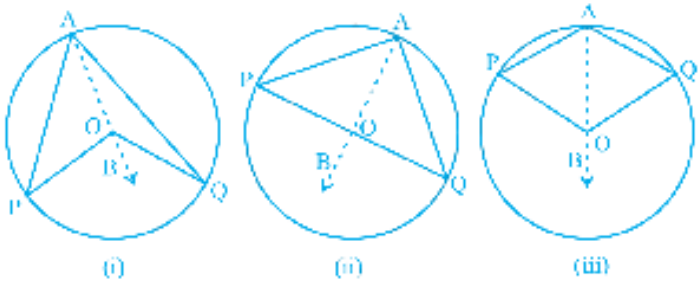
उपरितनगुणधर्मानुगुणं तथा 10.1 प्रमेयानुगुणम् अधोदत्तः परिणामः सत्यं भवति।

वर्तुलस्य सर्वाङ्गसमौ चापौ केन्द्रे समानकोणौ निर्मातः।

अतः वर्तुलस्य केन्द्रे जीवाद्वारा निर्मितः कोणः तु वर्तुलस्य केन्द्रे लघुचापेन अन्तरितकोणेन समः अस्ति। अधोदत्तप्रमेयम् केन्द्रे चापेन अन्तरितकोणानां तथा वर्तुलस्य कस्यचित् बिन्दौ अन्तरितकोणानां मध्ये विद्यमानं सम्बन्धं सूचयति।

प्रमेयम् 10.8 - *केनचित् चापेन वर्तुलस्य केन्द्रे निर्मितः कोणः, तेनैव चापेन अन्यस्मिन् कस्मिंश्चिदपि वृत्तबिन्दौ निर्मितस्य कोणस्य अपेक्षया द्विगुणितः भवति।*

उपपत्तिः - वर्तुलस्य PQ चापः दत्तः अस्ति, येन O मध्यबिन्दौ POQ कोणः अन्तरितः अस्ति। तथा A बिन्दौ PAQ कोणः अन्तरितः अस्ति। A बिन्दुः वर्तुलस्य अवशिष्टभागे विद्यमानेषु बिन्दुषु अन्यतमः अस्ति। $\angle POQ = 2\ \angle PAQ$ इति निरूपणीयम् अस्ति।



आकृतिः10.28

10.28 तमायाम् आकृत्यां विद्यमानप्रकारेण स्थितित्रयं स्वीकुर्वन्तु – प्रथमस्थित्यां PQ चापः लघुः, द्वितीयायाम् अर्धवर्तुलः, तृतीयायां च सः दीर्घचापः।

AO रेखां योजयित्वा B बिन्दुपर्यन्तं तां रेखां विस्तारयामः।

सर्वासु स्थितिषु,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

यतः त्रिभुजस्य बाह्यकोणः द्वयोः अभिमुख-अन्तःकोणयोः योगतुल्यः भवति।

अपि च Δ OAQ त्रिभुजयाम्

	$OA = OQ$	(वर्तुलस्य त्रिज्ये)
अतः	$\angle OAQ = \angle OQA$	(7.5 तमेन प्रमेयेन)
अनेन	$\angle BOQ = 2\ \angle OAQ$ इति प्राप्नुमः	(1)
तथैव	$\angle BOP = 2\ \angle OAP$	(2)

प्रथम-द्वितीय-समीकरणाभ्याम् $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

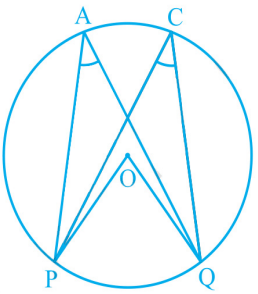
अनेन समः भवति $\angle POQ = 2\ \angle PAQ$ (3)

तृतीयस्थित्यां यत्र PQ दीर्घचापः अस्ति, तृतीयं समीकरणं तु

अधोदत्तेन प्रतिस्थापनं कुर्मः।

प्रतिवर्तिकोणः $POQ = 2\ \angle PAQ$

टिप्पणी - यदि P, Q बिन्दुद्वयं योजयित्वा उपरितनाकृतिषु PQ जीवां प्राप्नन्तः तर्हि $\angle PAQ$ तु $PAQP$ इति वृत्तखण्डे निर्मितः कोणः भवति।



आकृतिः 10.29

10.8 प्रमेये A इति बिन्दुः वर्तुलस्य कस्मिंश्चिदपि भागे विद्यमानः स्यात्। अतः C इति अन्यं वर्तुलबिन्दुं स्वीकुर्मः चेत् (10.29 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$

अतः $\angle PCQ = \angle\ PAQ$

अनेन अधोदत्तप्रमेयम् निरूप्यते –

प्रमेयम् 10.9 - *वर्तुलस्य समानवृत्तखण्डे विद्यमानाः कोणाः समाः भवन्ति।*

10.8 प्रमेयस्य द्वितीयां स्थितिं पुनरेकवारं पृथक् चर्चयामः। अत्र $\angle PAQ$ कोणः वृत्तखण्डे कश्चन कोणः यः अर्धवर्तुलः अस्ति। अपि च $\angle PAQ = \frac{1}{2}\ \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180^0 = 90^0$

यदि अर्धवर्तुले C इति अन्यबिन्दुं स्वीकुर्वन्ति चेत् $\angle PCQ\ 90^0$ इति प्राप्तुं शक्नुमः।

अतः अत्र वर्तुलस्य अन्यं गुणधर्मं पश्यामः।

अर्धवर्तुले विद्यमानः कोणः लम्बकोणः(लम्बकोणः) भवति।

10.9 प्रमेयस्य विलोमः अपि सत्यम् अस्ति। विलोमः अधोदत्तः अस्ति।

प्रमेयम् 10.10 - *यदि कश्चन रेखाखण्डः तस्य समानपार्श्वे विद्यमानं बिन्दुद्वयं समानकोणयोः योजयति, तर्हि ते चत्वारः बिन्दवः कस्मिंश्चिच् वर्तुले तिष्ठन्ति (अर्थात् – ते बिन्दवः चक्रीयबिन्दवः इति)।*

ते बिन्दवः रेखायाः समानपार्श्वे सन्ति यस्यां रेखाखण्डः अस्ति।

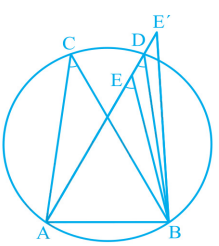
अधोदत्तप्रकारेण अस्य परिणामस्य सत्यम् अवलोकयामः।

10.30 तमायाम् आकृत्यां AB रेखाखण्डेन C,D इति बिन्द्वोः समकोणौ निर्मितौ स्तः। अर्थात् –

$\angle ACB = \angle ADB.$

A, B, C, D च वर्तुले तिष्ठन्ति इति निरूपयितुं वयं A, C, B बिन्दुभिः कञ्चन वर्तुलं चित्रयामः। यदि सः वर्तुलः D द्वारा न गच्छति तर्हि सः E (E' वा) रेखापर्यन्तं विस्तृतां AD रेखां E(E' वा) बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति। यदि A, C, E, B वर्तुले तिष्ठन्ति,

$\angle ACB = \angle AEB$ (किमर्थम् ?)



आकृतिः 10.30

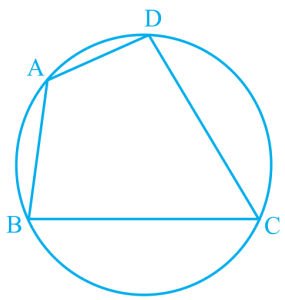
किन्तु $\angle ACB = \angle ADB$ इति दत्तम् अस्ति

अतः $\angle AEB = \angle ADB$

किन्तु यावत्पर्यन्तं E बिन्दुः D बिन्दुना सह ऐक्यः न भवति, तावत्पर्यन्तम् एतत् साध्यं न भवति (किमर्थम् ?) तथैव E' बिन्दुः अपि D बिन्दुना सह ऐक्यताम् प्राप्नुयात्।

10.8 चक्रीय-चतुर्भुजम्

$ABCD$ चतुर्भुजं चक्रीयचतुर्भुजम् इति उच्यते - यदा तस्य चत्वारि अपि शीर्षाणि कस्मिंश्चित् वर्तुले तिष्ठन्ति (10.31 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। एतेषु चतुर्भुजेषु कञ्चन विशिष्टं गुणधर्मं पश्यन्ति – विविधपार्श्वयुक्तानि बहूनि चतुर्भुजानि चित्रयन्तु येषां नाम $ABCD$ इति कुर्वन्तु (बहुविधत्रिज्यायुक्तवर्तुलान् चित्रयित्वा तेषु चतुरः बिन्दून् स्वीकृत्य एवं कर्तुं शक्नुमः।) अभिमुखकोणान् मापयित्वा अधोदत्त-कोष्ठके भवताम् अवलोकनानि लिखन्तु।



आकृतिः 10.31

चतुर्भुजस्य क्रमसङ्ख्या	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

अस्मात् कोष्ठकात् किम् अनुमातुं शक्यते ?

भवन्तः अवगच्छन्ति यत् $\angle A + C = 180^0$, $\angle B + \angle D = 180^0$ च।

अत्र मापनेषु विद्यमानत्रुटिं निराकृत्य उपरिदत्तं परिणामं प्राप्तवन्तः। अनेन अधोदत्तं प्रमेयं परिशीलयितुं शक्नुमः।

10.11 प्रमेयम् - *चक्रीयचतुर्भुजस्य -अभिमुखकोणयोः योगः 180^0 स्यात्।*

वस्तुतः अस्य प्रमेयस्य विलोमः यः अधोदत्तः अस्ति सः अपि सत्यः अस्ति।

10.12 प्रमेयम् - *यदि चतुर्भुजस्य अभिमुखकोणायोः योगः 180^0 अस्ति तर्हि तत् चतुर्भुजं चक्रीयचतुर्भुजम्।*

10.10 तमे प्रमेये उपयुक्तपद्धत्या अस्य प्रमेयस्य अपि सत्यताम् अवगन्तुं शक्नुमः।

उदाहरणम् 3 : 10.32 तमायाम् आकृत्यां वर्तुलस्य व्यासः AB इति। वर्तुलस्य जीवा – CD त्रिज्यया समा अस्ति। AC, BD रेखे यदा विस्तारिते, तदा E बिन्दौ प्रतिच्छिन्तः। $\angle AEB = 60^0$ इति निरूपयन्तु।

समाधानम् - OC, OD, BC रेखाः योजयन्तु।

ODC त्रिभुजं समबाहुत्रिभुजम् अस्ति (किमर्थम्?)

अतः $\angle COD = 60^0$.

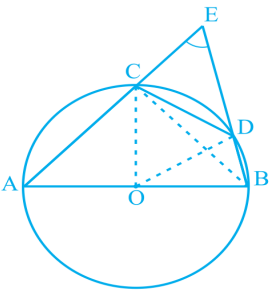
इदानीं $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (10.8 प्रमेयम्)

अनेन $\angle CBD = 30^0$ इति प्राप्नुमः।

पुनः $\angle ACB = 90^0$ (किमर्थम्?)

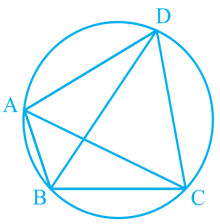
अतः $\angle BCE = 180^0 - \angle ACB = 90^0$

येन $CEB = 90^0 - 30^0 = 60^0$ अर्थात् $\angle AEB = 60^0$.



आकृतिः 10.32

उदाहरणम् 4 : 10.33 तमायाम् आकृत्याम् $ABCD$ किञ्चन चक्रीयचतुर्भुजं, यत्र AC, BD द्वौ कर्णौ। यदि $\angle DBC = 55^0$, तथा $\angle BAC = 45^0$, तर्हि $\angle BCD$ कोणम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 10.33

समाधानम् - $\angle CAD = \angle DBC = 55^0$. (समानवृत्तखण्डे विद्यमानौ कोणौ)

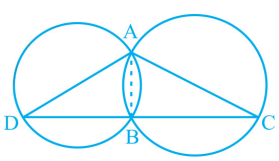
अतः $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55^0 + 45^0 = 100^0$

किन्तु $\angle DAB + \angle BCD = 180^0$ (चक्रीयचतुर्भुजस्य अभिमुखकोणौ)

अतः $\angle BCD = 180^0 - 100^0 = 80^0$.

उदाहरणम् 5 : वर्तुलद्वयं A, B इति बिन्दुद्वये प्रतिच्छिनत्ति। AD, AC च तयोः वर्तुलयोः व्यासौ स्तः (10.34 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। B बिन्दुः DC रेखाखण्डे तिष्ठति इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 10.34

समाधानम् - A, B बिन्दू योजयन्तु।

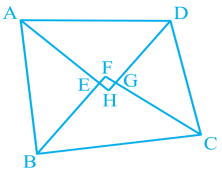
$\angle ABD = 90^0$ (अर्धवर्तुलस्य कोणः)

$\angle ABC = 90^0$ (अर्धवर्तुलस्य कोणः)

अतः $\angle ABD + \angle ABC = 90^0 + 90^0 = 180^0$

अतः DBC काचन रेखा अस्ति, अर्थात् – DC रेखाखण्डे B बिन्दुः अस्ति।

उदाहरणम् 6 : कस्यचित् चतुर्भुजस्य अन्तःकोण-अर्धकाभ्यां निर्मितः अन्यत् चतुर्भुजं चक्रीयम् इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 10.35

समाधानम् - 10.35 तमायाम् आकृत्यां ABCD किञ्चन चतुर्भुजं यत्र क्रमशः A, B, C, D इति अन्तःकोणानां कोणार्धकानि AH, BF, CF, DH च EFGH इति अन्यत् चतुर्भुजं करोति।

इदानीं $\angle FEH = \angle AEB = 180^0 - \angle EAB - \angle EBA$ (किमर्थम् ?)

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

तथा $\angle FGH = \angle CGD = 180^0 - \angle GCD - \angle GDC$ (किमर्थम् ?)

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

अतः $\angle FEH + \angle FGH = 180^0 - \frac{1}{2}\angle A + \angle B) + 180^0 - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$$= 360^0 - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B\ \angle C + \angle D)$$

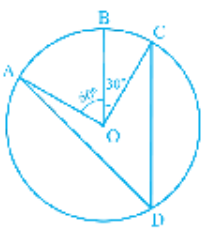
$$= 360^0 - \frac{1}{2} \times 360^0$$

$$= 360^0 - 180^0 = 180^0$$

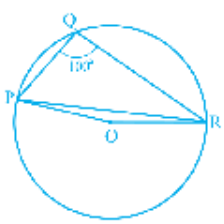
अतः 10.12 प्रमेयेन EFGH चतुर्भुजं चक्रीयचतुर्भुजम्।

प्रश्नावलिः – 10.5

1. 10.36 तमायाम् आकृत्यां O इति मध्यबिन्दुयुक्ते वर्तुले A, B, C इति त्रयः बिन्दवः - यथा $\angle BOC = 30^0$, $\angle AOB = 60^0$ च स्याताम्। यदि वर्तुले ABC चापं विना D अपि कश्चन बिन्दुः, $\angle A$DC अन्विषन्तु।
2. वर्तुलस्य जीवा तत्त्रिज्यया समा अस्ति। लघुचापस्य दीर्घचापस्य च कस्मिंश्चित् बिन्दौ जीवया अन्तरितं कोणम् अन्विषन्तु।
3. 10.37 तमायाम् आकृत्यां $\angle PQR = 100^0$, यत्र O इदि मध्यबिन्दुयुक्ते वर्तुले P, Q, R बिन्दवः सन्ति। $\angle OPR$ कोणम् अन्विषन्तु।

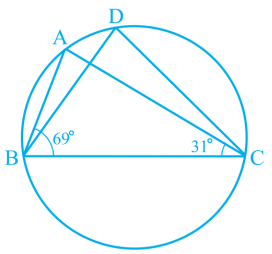


आकृतिः 10.36



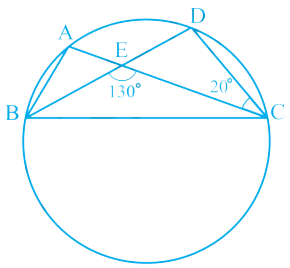
आकृतिः 10.37

4. 10.38 तमायाम् आकृत्याम् $\angle A\text{BC} = 69^0$, $\angle A\text{CB} = 31^0$, $\angle$BDC कोणम् अन्विषन्तु।



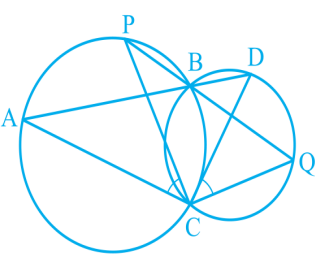
आकृतिः 10.38

5. 10.39 तमायाम् आकृत्यां कस्मिंश्चित् वर्तुले *A*, B, C, D इति चत्वारः बिन्दवः। *A*C, BD च E बिन्दौ प्रतिच्छिन्तः, यथा $\angle\text{BEC} = 130^0$, $\angle\text{ECD} = 20^0$ च। $\angle$B*A*C अन्विषन्तु।



आकृतिः 10.39

6. *A*BCD इति चक्रीयचतुर्भुजे कर्णौ E बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिन्तः। यदि $\angle\text{DBC} = 70^0$, $\angle$B*A*C $= 30^0$ च, $\angle$BCD कोणम् अन्विषन्तु। अग्रे यदि *A*B = BC, $\angle$ECD कोणम् अन्विषन्तु।
7. यदि कस्यचन चक्रीयचतुर्भुजस्य कर्णौ कस्यचन वर्तुलस्य व्यासौ भवतः, तर्हि तत् आयतम् इति निरूपयन्तु।
8. यदि कस्यचन समलम्बचतुर्भुजस्य असमान्तरभुजाः समाः तर्हि तत् चक्रीयचतुर्भुजम् इति निरूपयन्तु।
9. वर्तुलद्वयं B,C इति बिन्द्वोः प्रतिच्छिनत्ति। B बिन्दुद्वारा *A*BD, PBQ इति रेखाखण्डद्वयं चित्रयन्तु यथा तौ रेखाखण्डौ क्रमशः *A*,D,P,Q इति बिन्दुषु वर्तुले प्रतिच्छिन्द्याताम् (10.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। $\angle A\text{CP} = \angle$QCD इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 10.40

10. यदि कस्यचन त्रिभुजस्य पार्श्वद्वयं व्यासरूपेण स्वीकृत्य वर्तुलौ चित्रितौ, तर्हि तयोः वर्तुलयोः प्रतिच्छेदबिन्दुः त्रिभुजस्य तृतीयभुजायां भवति इति निरूपयन्तु।

11. ABC, ADC इति समकोणत्रिभुजे स्तः ययोः AC इति सामान्यकर्णः अस्ति। $\angle CAD = \angle CBD$ इति निरूपयन्तु।

12. कञ्चन चक्रीयसमान्तरचतुर्भुजं किञ्चन आयतम् इति निरूपयन्तु।

10.6 प्रश्नावलिः – (ऐच्छिकी)

1. परस्परप्रतिच्छेदकस्य वर्तुलद्वयस्य केन्द्रयोः योजकः रेखाखण्डः प्रतिच्छेदबिन्दुद्वये समकोणौ निर्मातः इति निरूपयन्तु।

2. कस्यचन वर्तुलस्य AB, CD इति जीवे ययोः क्रमशः 5cm, 11cm मिता दीर्घता। ते परस्परं समान्तरे स्तः तथा वर्तुलकेन्द्रस्य विभिन्नपार्श्वयोः स्तः। यदि AB, CD इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं दूरं 6cm मितम् अस्ति तर्हि वर्तुलस्य त्रिज्याम् अन्विषन्तु।

3. वर्तुलस्य द्वयोः समान्तरजीवयोः दीर्घता 6cm, 8cm च। यदि लघुतरजीवा केन्द्रतः 4cm दूरे अस्ति, तर्हि केन्द्रतः अपरजीवायाः दूरं किम् ?

4. कस्यचन $\angle A$BC इति कोणस्य शीर्षं वर्तुलात् बहिः तिष्ठतु। तथा कोणस्य भुजे वर्तुलस्य अन्तः AD,CE इति समजीवाद्वयं कुरुताम्। ABC कोणः केन्द्रे AC,DE इति जीवाद्वयेन अन्तरितयोः कोणयोः अन्तरस्य अर्धतुल्यः इति निरूपयन्तु।

5. समचतुर्भुजस्य कञ्चित् भुजं व्यासरूपेण स्वीकृत्य चित्रितः वर्तुलः तस्य कर्णयोः प्रतिच्छिन्नबिन्दुद्वारा गच्छति इति निरूपयन्तु।

6. ABCD किञ्चन समान्तरचतुर्भुजं अस्ति। A,B,C बिन्दूनां द्वारा गम्यमानः वर्तुलः CD रेखां E बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति (आवश्यकता अस्ति चेत् रेखां विस्तारयन्तु)। $AE = AD$ इति निरूपयन्तु।

7. कस्यचन वर्तुलस्य AC, BD इति जीवाद्वयं परस्परं अर्धयतः। निरूपयन्तु यत् –
   (i) AC,BD व्यासौ इति (ii) ABCD किञ्चन आयतम् इति

8. ABC त्रिभुजस्य A, B, C कोणानां अर्धकरेखाः वृत्तवर्तुलं क्रमशः D, E, F बिन्दुषु प्रतिच्छिनन्ति। निरूपयन्तु यत् DEF त्रिभुजस्य कोणाः $90^0 - \frac{1}{2}A$, $90^0 - \frac{1}{2}$B, $90^0 - \frac{1}{2}$C इति।

9. द्वौ सर्वाङ्गसमवर्तुलौ A,B इति बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिन्तः। A बिन्दुद्वारा PAQ इति कञ्चन वृत्तखण्डः चित्रीयते यथा P, Q बिन्दू वर्तुलद्वये तिष्ठतः। BP = BQ इति निरूपयन्तु।

10. ABC त्रिभुजायां $\angle A$ इत्यस्य कोणार्धक तथा BC रेखायाः समलम्ब-अर्धकं च परस्परं प्रतिच्छिन्तः। निरूपयन्तु यत् ते Δ ABC त्रिभुजस्य वृत्तवर्तुले प्रतिच्छिन्तः इति।

10.9 सारांशः

अस्मिन् अध्याये अधोदत्तांशान् अधीतवन्तः –

1. कस्मिंश्चित् तले नियतबिन्दुतः समदूरे विद्यमानानां सर्वेषां बिन्दूनां सङ्ग्रहः वर्तुलः भवति।
2. वर्तुलस्य (सर्वाङ्गसमवर्तुलस्य वा) समजीवाभिः केन्द्रे(केन्द्रेषु वा) समकोणाः निर्मीयन्ते।
3. यदि वर्तुलस्य केन्द्रे जीवाद्वयेन निर्मितौ कोणौ समौ तर्हि ते जीवे अपि समे।
4. वर्तुलस्य मध्यबिन्दुतः जीवापर्यन्तं विद्यमानः समालम्बः जीवाम् अर्धयति।
5. वर्तुलस्य केन्द्रद्वारा रचितः जीवायाः अर्धकः रेखाखण्डः जीवायाः समालम्बः भवति।
6. त्रिभिः अरैखिकबिन्दुभिः एकः एव वर्तुलः गच्छति।
7. वर्तुलस्य (सर्वाङ्गसमवर्तुलस्य) समजीवाः केन्द्रतः (सङ्गतकेन्द्रतः) समदूरे सन्ति।
8. वर्तुलस्य (सर्वाङ्गसमवर्तुलस्य) केन्द्रतः (सङ्गतकेन्द्रतः) समदूरे स्थिताः जीवाः समाः भवन्ति।
9. यदि वर्तुलस्य चापद्वयं सर्वाङ्गसमं, तर्हि तयोः सङ्गतजीवे अपि समे, तथा विलोमेन यदि वर्तुलस्य जीवे समे तर्हि तयोः सङ्गतचापौ (दीर्घः लघुः च) सर्वाङ्गसमौ भवतः।
10. वर्तुलस्य सर्वाङ्गसमचापाभ्यां केन्द्रे समकोणौ निर्मितौ भवतः।
11. वर्तुलस्य चापेन केन्द्रे अन्तरितकोणः तु वर्तुलस्य अवशिष्टभागे कस्मिंश्चित् बिन्दौ अन्तरितकोणस्य अपेक्षया द्विगुणितः अस्ति।
12. वर्तुलस्य समानवृत्तखण्डे विद्यमानकोणाः समाः भवन्ति।
13. अर्धवर्तुलस्य कोणः लम्बकोणः भवति।
14. यदि बिन्दुद्वयं योजयता रेखाखण्डेन तस्य समानपार्श्वे विद्यमानयोः अन्यबिन्द्वोः समकोणौ अन्तरितौ भवतः, तर्हि ते चत्वारः बिन्दवः वर्तुले भवन्ति।
15. कस्यचन चक्रीयचतुर्भुजस्य अभिमुखकोणयोः योगः 1800 अस्ति।
16. यदि कस्यचन चतुर्भुजस्य अभिमुखकोणयोः योगः 1800 अस्ति तर्हि तत् चतुर्भुजं चक्रीयचतुर्भुजम् अस्ति।

अध्यायः 11

रचनानि

11.1 - प्रस्तावना

पूर्वतनेषु अध्यायेषु प्रमेयनिरूपणार्थं तथा समस्यासमाधानार्थं याः आकृतयः प्रयुक्ताः ताः परिपूर्णाः न आसन्। केवलं सन्दर्भावगमनार्थम्, उचिततर्कस्य उपयोगार्थं च ताः प्रयुक्ताः आसन्। किन्तु कदाचित् परिशुद्धाकृतीनाम् अपि आवश्यकता भवति । उदाहरणार्थम् – निर्मीयमाण-भवनस्य मानचित्रस्य प्राप्तौ, उपकरणानां यन्त्राणां विविधभागानाम् अभिकलनार्थं च प्रारूपयोजनानिर्माणे परिशुद्धाकृतीनाम् अपेक्षा भवति। ईदृशीनाम् आकृतीनां चित्रणाय कानिचन आधारीभूत-ज्यामितीय-उपकरणानाम् आवश्यकता भवति । भवतां समीपे काचित् ज्यामितीय-पेटिका स्यात् यस्मिन् अधोदत्तानि उपकरणानि भवेयुः।

(i) मापिका : यस्याः एकपार्श्वे सेन्टिमीटर्-मापनं, मिल्लिमीटर्-मापनं च अस्ति तथा अपरपार्श्वे अङ्गुलं, तद्भागाः च सन्ति।

(ii) त्रिकोणाकृतिकमापिकायाः युग्मं - यत्र एकस्यां त्रिकोणाकृतिकमापिकायां 90^0, 60^0, 30^0 मिताः कोणाः अङ्किताः तथा अपरमापिकायां 90^0, 45^0, 45^0 मिताः कोणाः च अङ्किताः।

(iii) विभाजकयोः युग्मं – समञ्जनव्यवस्थासहितम्।

(iV) वृत्तनिर्मात्रोः युग्मं - अङ्कन्याः स्थापनार्थं व्यवस्था यत्र स्यात्।

(v) एकः कोणमापकः

सामान्यतया एतानि उपकरणानि त्रिभुज-वृत्त-चतुर्भुज-बहुभुजानां तथा अन्यज्यामितीयाकृतीनां दत्तमापनैः चित्रणार्थम् अपेक्षितानि भवन्ति । किन्तु ज्यामितीय-निर्माणप्रक्रिया तु अनङ्कितमापिकां, वृत्तनिर्मातारं च उपयुज्य ज्यामितीय-आकृतेः रचनम् इति । अनङ्कितमापिका तु ऋजुधारः इति उच्यते । येषु निर्माणेषु मापनानाम् अपि अपेक्षा अस्ति, तत्र मापिकायाः तथा कोणमापकस्य अपि अपेक्षा भवति। अस्मिन् अध्याये आधारभूतरचनानि पाठ्यन्ते। अग्रे एतानि उपयुज्य कतिचनविधानां त्रिभुजानां निर्माणं पाठ्यते।

11.2 मूलभूत-रचनानि

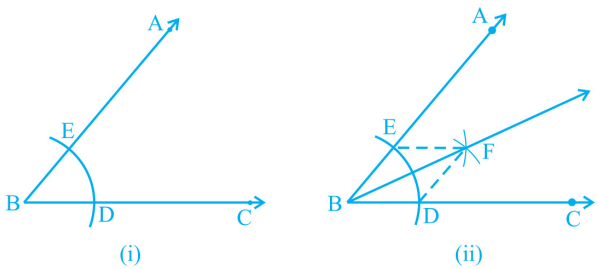
षष्ठकक्ष्यायां भवन्तः वृत्तस्य रचनम्, रेखाखण्डस्य समालम्ब-अर्धकस्य निर्माणं, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0 इत्यादिकोणानां निर्माणं तथा दत्तकोणस्य अर्धकनिर्माणं च पठितवन्तः। किन्तु एतेषां रचनानां समर्थनं न कृतवन्तः। अस्मिन् परिच्छेदे भवन्तः उपरिदत्तेषु कानिचनरचनानि, तत्पृष्ठतः विद्यमानतर्केण सहितं पठिष्यन्ति, येन भवन्तः जानिष्यन्ति यत् एतानि रचनानि कथं समञ्जसानि इति।

रचनम् 11.1 - *दत्तकोणस्य अर्धकरचनम्*

ABC इति कश्चन कोणः दत्तः चेत् अस्माभिः तस्य अर्धकं निर्मातव्यम्।

रचनानां सोपानानि -

1. B इति बिन्दुं केन्द्रीकृत्य, तथा कयाचित् त्रिज्यया कञ्चन चापं चित्रयन्तु - यः BA तथा BC इति किरणद्वयस्य अपि क्रमशः E, D इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्यात् {11.1(i) आकृतिं पश्यन्तु}।
2. अग्रे D,E इति बिन्दू केन्द्रीकृत्य $\frac{1}{2}$ DE अपेक्षया अधिक-त्रिज्यां कृत्वा F इति बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छेदं यथा कुर्यातां, तथा चापौ चित्रयन्तु
3. BF इति किरणं चित्रयन्तु [11.(ii) आकृतिं पश्यन्तु]। एषः किरणः BF एव ABC कोणस्य अभीष्टम् अर्धकं अस्ति।



आकृतिः 11.1

इदानीम् एतया पद्धत्या अभीष्टं कोणार्धकं कथं प्राप्यते इति पश्यामः।

DF तथा EF योजयित्वा रेखां निर्मान्तु। BEF तथा BDF इति त्रिभुजयोः

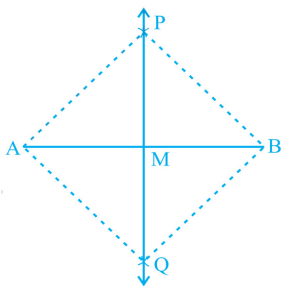
	BE = ED	(समचापस्य त्रिज्ये)
	EF = DF	(समत्रिज्ययोः चापौ)
	BF = BF	(सामान्यम्)
अतः त्रिभुजा	Δ BEF $\cong$ Δ BDF	(भु-भु-भु SSS नियमः)
	$\angle$EBF = $\angle$DBF	(CPCT) इति प्राप्नुमः।

रचनम् 11.2 - *दत्तरेखाखण्डस्य समालम्ब-अर्धकस्य रचनम्* ।

AB इति रेखाखण्डः दत्तः, तस्य समालम्बअर्धकं निर्मातव्यम् ।

निर्माणस्य सोपानानि

1. AB इति बिन्दू केन्द्रीकृत्य तथा $\frac{1}{2}AB$ अपेक्षया अधिकत्रिज्यां स्वीकृत्य AB इति रेखाखण्डस्य भुजाद्वये अपि चापौ चित्रयन्तु यथा तौ परस्परं प्रतिच्छेदं कुर्याताम् ।
2. एतौ चापौ P, Q इत्यत्र परस्परं प्रतिच्छेदं कुर्याताम्। PQ योजयत्वा रेखां निर्मान्तु (11.2 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)
3. M इति बिन्दौ PQ इति रेखा AB रेखां प्रतिच्छिन्द्यात् । तदा PMQ रेखा AB रेखायाः अभीष्टं समालम्ब-अर्धकम् अस्ति ।



आकृतिः 11.2

A, B बिन्दुद्वयं PQ बिन्दुभ्यां सह योजयन्तु यथा AP, AQ, BP, BQ इति रेखानां निर्माणं स्यात् । एतया पद्धत्या AB रेखायाः समालम्बअर्धकं कथं प्राप्यते इति पश्यामः।

PAQ, PBQ त्रिभुजयोः

	$AP=BP$	(समत्रिज्ययोः चापौ)
	$AQ=BQ$	(समत्रिज्ययोः चापौ)
	$PQ=PQ$	(सामान्यम्)
	$\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	(भु-भु-भु SSS नियमः)
अतः	$\angle APM = \angle BPM$	(CPCT)

इदानीं ΔPMA, ΔPMB त्रिभुजयोः

	$AB = BP$	(पूर्ववत्)
	$PM = PM$	(सामान्यम्)
	$\angle APM = \angle BPM$	(उपरि निरूपितम्)
अतः	$\Delta PMA \cong \Delta PMB$	(भु-को-भु SAS नियमः)
अतः	$AM = BM$, $\angle PMA = \angle PMB$	(CPCT)
यतः	$\angle PMA + \angle PMB = 180^0$	(रैखिकयुग्म-स्वयंसिद्धम्)

वयम् एवं प्राप्नुमः

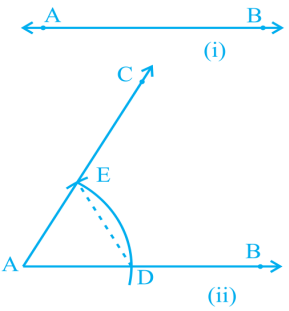
$$\angle PMA = \angle PMB = 90^0$$

अतः PM अर्थात् PMQ एव AB रेखायाः समालम्ब-अर्धकम् अस्ति ।

रचनम् 11.3 - *दत्तकिरणस्य आदिबिन्दौ 60^0 मित-कोणस्य रचनम्*

A इति आदिबिन्दुसहितं AB किरणं स्वीकुर्मः [11.(i) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु]। AC किरणः निर्मातव्यः यथा $\angle CAB = 60^0$। तत्कर्तुम् अन्यतमः उपायः अधोदत्तः अस्ति।

निर्माणसोपानानि



आकृतिः 11.3

1. A बिन्दुं केन्द्रीकृत्य तथा कयाचित् त्रिज्यया वृत्तस्य कञ्चन चापं चित्रयन्तु यत् AB किरणम् D बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति।
2. D बिन्दुं केन्द्रीकृत्य तथा पूर्ववत् समानत्रिज्यया अन्यं कञ्चन चापं चित्रयन्तु यथा स चापः पूर्वनिर्मितं चापं E बिन्दौ प्रतिच्छिन्द्यात्।
3. AC इति किरणं चित्रयन्तु यथा सः E बिन्दुना गच्छेत् [11.3(ii) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु]।

तदा $\angle CAB$ कोणः एव 60^0 मितः अभीष्टकोणः भवति। इदानीम् एतया पद्धत्या 60^0 मितः अभीष्टः कोणः कथं प्राप्यते इति पश्यामः।

DE बिन्दू योजयन्तु।

तर्हि $AE=AD=DE$ (निर्माणद्वारा)

अतः Δ EAD समत्रिभुजा अस्ति तथा $\angle EAD$ कोणः $\angle CAB$ कोणेन समः यस्य मितिः अपि 60^0 अस्ति।

प्रश्नावलिः – 11.1

1. कस्यचित् किरणस्य आदिबिन्दौ 90^0 मितं कोणं निर्मान्तु तथा अस्य औचित्यं समर्थयन्तु।
2. कस्यचित् किरणस्य आदिबिन्दौ 45^0 मितं कोणं निर्मान्तु तथा अस्य औचित्यं समर्थयन्तु।
3. अधोदत्तमापनानां कोणान् निर्मान्तु –

   (i) 30^0 (ii) $22\frac{1}{2}^0$ (iii) 15^0

4. अधोदत्तकोणान् निर्मान्तु, कोणमापकेन तान् परिशीलयन्तु च –

   (i) 75^0 (ii) 105^0 (iii) 135^0
5. कञ्चन समबाहुत्रिभुजं निर्मान्तु यस्य एकः भुजः दत्तः, तथा तस्य निर्माणं समर्थयन्तु।

11.3 – केषाञ्चन त्रिभुजानां रचनानि

एतावत्पर्यन्तम् मूलभूतरचनानि चिन्तितवन्तः। अग्रे, पूर्वतनवर्गेषु पठित-रचनानाम् उपयोगेन, उपरिदत्तप्रकारेण च कानिचन त्रिभुजानि रचयामः। सप्तमाध्यायात् एतत् स्मरतु यत् भु-को-भु SAS, भु-भु-भु SSS, को-भु-को ASA,

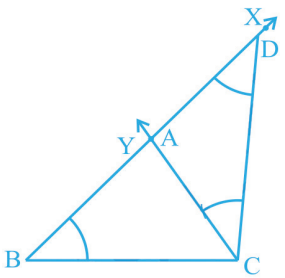
तथा ल-क-भु RHS नियमाः त्रिभुजयोः मध्ये विद्यमानं सर्वाङ्गसमत्वं द्योतयति। अतः काचन त्रिभुजा अद्वितीया भवति यदा – (i) भुजाद्वयं अन्तर्गतकोणः च दत्तौ (ii) भुजात्रयम् अपि दत्तम् (iii) कोणद्वयं तथा एका भुजा दत्ता (iv) समकोणत्रिभुजायां कर्णः तथा एका भुजा दत्ता। सप्तमाध्याये एव ईदृशानि त्रिभुजानि कथं निर्मातव्यानि इति पठितवन्तः । इदानीम् इतोऽपि कानिचन त्रिभुजरचनानि पठामः । भवन्तः जानीयुः यत् न्यूनातिन्यूनं त्रिभुजस्य रचनार्थं भागत्रयं दातव्यं भवति इति। किन्तु भागत्रयस्य बहुविधसंयोगाः मात्रं त्रिभुजानिर्माणे पर्याप्ताः न भवन्ति। उदाहरणार्थम् – यदि भुजाद्वयं तथा एकः कोणः दत्तः, किन्तु सः अन्तर्गतकोणः नास्ति तर्हि अद्वितीयरूपेण त्रिभुजानिर्माणं सर्वदा सम्भवं नास्ति।

रचनम् 11.4 - *आधारः, आधारकोणः तथा अन्यभुजाद्वयस्य योगः च दत्ताः, अधुना त्रिभुजं निर्मातव्यम्।*

ABC इति त्रिभुजे BC इति आधारः दत्तः, ∠B इति आधारकोणः दत्तः, तथा AB + BC इति अन्यभुजाद्वयस्य च योगः दत्तः। भवन्तः अस्य त्रिभुजस्य निर्माणं कुर्वन्तु।

रचनायाः सोपानानि

1. BC इति आधारं चित्रयन्तु, तथा B इति बिन्दुं केन्द्रीकृत्य ∠XBC इति कोणं चित्रयन्तु यथा ∠XBC कोणः दत्तकोणेन समः अस्ति।
2. BX किरणतः AB + AC इत्यनेन समानं BD इति रेखाखण्डं कर्तयन्तु।
3. D, C बिन्दुद्वयं योजयन्तु तथा ∠DCY कोणं ∠BDC कोणस्य अनुरूपं निर्मान्तु
4. CY रेखा BX रेखाम् A बिन्दौ प्रतिच्छिनत्तु (11.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 11.4

तर्हि ABC एव अभीष्ट-त्रिभुजम्।

इदानीं कथम् अभीष्टत्रिभुजं प्राप्यते इति पश्यामः।

BC आधारः तथा ∠B दत्तप्रकारेण चित्रितः अस्ति । अग्रे ACD त्रिभुजे

$$\angle ACD = \angle ADC \qquad \text{(निर्माणेन)}$$

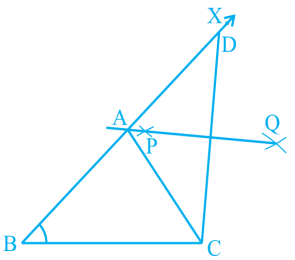
अतः $AC = AD$ तर्हि

$$AB = BD - AD = BD - AC$$

$$AB + AC = BD$$

वैकल्पिक-पद्धतिः

आरम्भिक-सोपानद्वयम् उपरिदत्तप्रकारेणैव पालयन्तु । अग्रे CD रेखायाः PQ इति समालम्ब-अर्धकं चित्रयन्तु, यथा सः BD इति रेखां A बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति । (11.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) A, C इति बिन्दुद्वयं योजयन्तु ABC एव अभीष्टत्रिभुजम् अत्र अवगच्छु यत् A बिन्दुः CD रेखायाः समालम्ब-अर्धके अस्ति । अतः AD = AC.



आकृतिः 11.5

टिप्पणी - अस्य त्रिभुजस्य निर्माणं तदा साध्यं नास्ति यदा AB + AC ≤ BC

रचनम् – 11.5 - *आधारः, आधारकोणः, अन्यभुजाद्वयस्य अन्तरं च दत्तम् । अधुना त्रिभुजं निर्मान्तु ।*

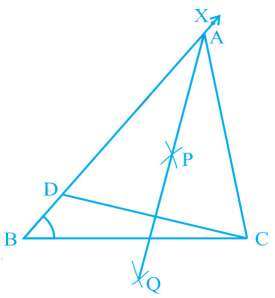
BC इति आधारः, ∠B इति आधारकोणः, AB - AC अथवा AC - AB इति अन्यभुजाद्वयस्य अन्तरं च दत्तम् । ABC त्रिभुजं निर्मातव्यम् ।

स्पष्टतया अत्र स्थितिद्वयम् अस्ति –

स्थितिः १ :– AB > AC भवतु, अर्थात् AB - AC दत्तम् ।

रचनस्य सोपानानि

1. BC इति आधारं चित्रयन्तु तथा B इति बिन्दुं केन्द्रीकृत्य XBC इति कोणं चित्रयन्तु यथा XBCकोणः दत्तकोणेन समः अस्ति ।
2. BX किरणतः AB - AC इत्यनेन समानं BD इति रेखाखण्डं कर्तयन्तु ।
3. D,C इति बिन्दुद्वयं योजयन्तु तथा DC रेखायाः PQ इति समालम्ब-अर्धकं निर्मान्तु
4. एषा रेखा BX रेखाम् A बिन्दौ प्रतिच्छिनत्तु । AC बिन्दुं योजयन्तु (11.6 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)
   तर्हि ABC एव अभीष्ट-त्रिभुजम् ।



आकृतिः 11.6

इदानीं कथम् अभीष्टत्रिभुजं प्राप्यते इति पश्यामः।

BC आधारः तथा ∠B कोणः च दत्तप्रकारेण चित्रितः अस्ति । A इति बिन्दुः DC रेखायाः समालम्ब-अर्धके अस्ति ।

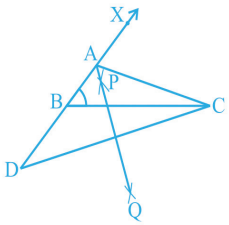
$$AD = AC$$

$$BD = AB - AD = AB - AC$$

स्थितिः २ - $AB < AC$ भवतु, $AC - AB$ इति दत्तम्।

रचनस्य सोपानानि -

1. प्रथमास्थितेः समानं रचयन्तु।
2. यथा $BD = AC - AB$ स्यात्, तथा BX इति रेखायाम् BD रेखाखण्डं कर्तयन्तु।
3. DC बिन्दुद्वयं योजयन्तु, तथा DC रेखायाः PQ इति समालम्ब-अर्धकं चित्रयन्तु
4. PQ रेखा BX रेखाम् A बिन्दौ प्रतिच्छिनत्तु (11.7 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 11.7

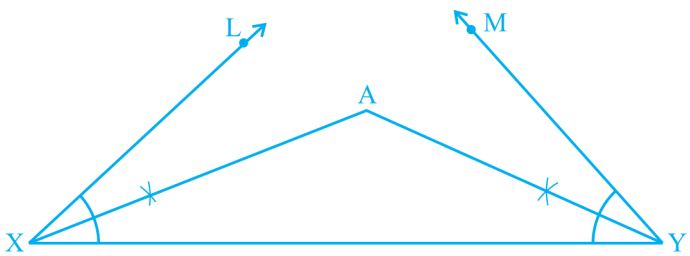
ABC एव अभीष्टत्रिभुजम्। यथा प्रथमास्थितौ, तथैव निर्माणं समर्थयितुं शक्नुमः।

रचनम् 11.6 - *त्रिभुजस्य परिधिः तथा आधारकोणद्वयं च दत्तम्। अधुना त्रिभुजं निर्मातव्यम्।*

आधारकोणौ $\angle B$, $\angle C$ दत्तौ। तथा $BC + CA + AB$ इति परिधिः अपि दत्ता। ABC त्रिभुजं निर्मातव्यम्।

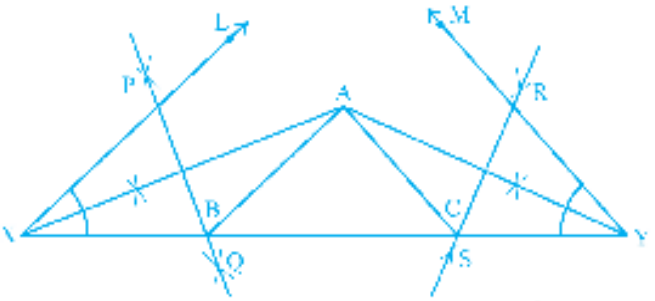
रचनस्य सोपानानि -

1. $BC+CA+AB$ इत्यस्य दैर्घ्यस्य समानं XY इति रेखाखण्डं चित्रयन्तु।
2. $\angle B$ इति कोणेन समः $\angle LXY$, तथा $\angle C$ इति कोणेन समः $\angle MYX$ इति कोणद्वयं भवतु।
3. $\angle LXY$, $\angle MYX$ इत्येतौ अर्धयन्तु। एते अर्धके A बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिन्ताम् {11.8(i) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु}



आकृतिः 11.8(i)

4. AX रेखायाः PQ , AY रेखायाः RS चेति अर्धकद्वयं चित्रयन्तु।
5. PQ रेखा XY रेखां B बिन्दौ, तथा RS रेखा XY रेखां C बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ताम्। AB, AC रेखे योजयन्तु {11.8(ii) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु} आकृतिः 11.8(ii)



आकृतिः11.8(ii)

ABC एव अभीष्टत्रिभुजम् । निर्माणस्य समर्थनार्थं भवन्तः पश्यन्ति यति AX रेखायाः PQ इति समालम्ब-अर्धके B बिन्दुः अस्ति इति ।

अतः XB = AB । तथैव CY = AC

एतेन $BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY$

पुनः $\angle BAX = \angle AXB$ (यथा Δ AXB त्रिभुजे $AB = XB$)

$\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\angle AXB = \angle LXY$

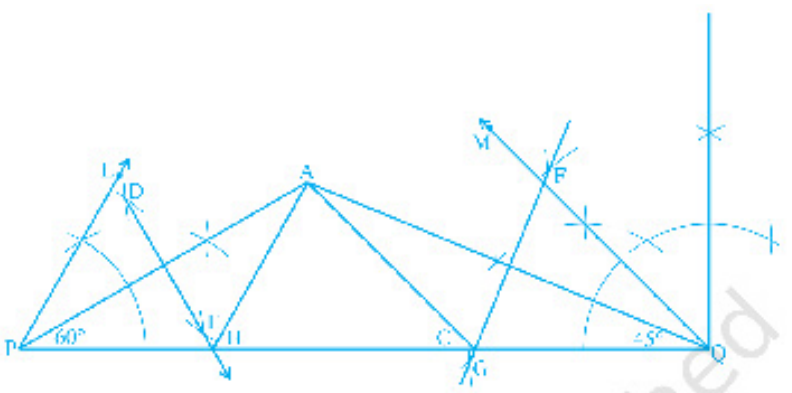
समानतया $\angle ACB = \angle MYX$

इति अभीष्टं सिद्धम् ।

उदाहरणम् 1 : Δ ABC इति त्रिभुजं निर्मान्तु यत्र $\angle B = 60^0$, $\angle C=45^0$, तथा $AB + BC + CA = 11$ सेन्टिमीटर्

निर्माणस्य सोपानानि

1. PQ = 11 cm (= $AB + BC + CA$) इति रेखाखण्डं चित्रयन्तु ।
2. P इति बिन्दौ 60^0 मितं कोणं तथा Q इति बिन्दौ 45^0 मितं कोणं निर्मान्तु ।



आकृतिः 11.9

3. एतौ कोणौ अर्धयन्तु। एतयोः कोणयोः अर्धकद्वयं A इति बिन्दौ परस्परं प्रतिच्छिनत्तु।
4. AP रेखायाः DE इति समालम्ब-अर्धकं चित्रयन्तु यथा सः B बिन्दौ PQ रेखां प्रितछिन्द्यात्। AQ रेखायाः FG इति समालम्ब-अर्धकं चित्रयन्तु यथा सः C इति बिन्दौ PQ रेखां प्रतिछन्द्यात्।
5. AB, AC रेखे योजयन्तु (11.9 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

अतः ABC एव अभीष्टत्रिभुजा

प्रश्नावलिः 11.2

1. ΔABC त्रिभुजं निर्मान्तु यत्र BC = 7cm, $\angle B$ 75^0, $AB + AC$ = 13cm
2. ΔABC त्रिभुजं निर्मान्तु यत्र BC = 8cm, $\angle B$ 45^0, $AB - AC$ = 3.5cm
3. Δ PQR त्रिभुजं निर्मान्तु यत्र QR=6cm, $\angle Q$ 60^0, PR-PQ=2cm
4. XYZ त्रिभुजं निर्मान्तु यत्र $\angle Y = 30^0$, $\angle Z$ 90^0, $XY + YZ + ZX = 11$cm
5. कञ्चन समकोणत्रिभुजं निर्मान्तु यस्य आधारः 12cm मितः तथा अन्यभुजाकर्णयोः योगः 18cm मितः भवति।

11.4 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः मापिकया वृत्तनिर्मात्रा च अधोदत्तरचनानि कृतवन्तः।

1. कस्यचन दत्तकोणस्य अर्धनम्।
2. कस्यचन दत्तरेखाखण्डस्य समालम्ब-अर्धकस्य चित्रणम्।
3. 60^0 इत्यादि-कोणस्य रचनम्।
4. कस्यचन त्रिभुजस्य निर्माणं यस्य आधारभुजा, आधारकोणः तथा अन्यभुजाद्वयस्य योगः दत्तः।
5. कस्यचन त्रिभुजस्य निर्माणं यस्य आधारभुजा, आधारकोणः तथा अन्यभुजाद्वयस्य अन्तरं दत्तम्।
6. कस्यचन त्रिभुजस्य निर्माणं यस्य परिधिः तथा द्वौ आधारकोणौ दत्तौ।

अध्यायः 12

हेरानस्य सूत्रम्

12.1 - प्रस्तावना

पूर्वतनवर्गेषु भवन्तः वर्ग-आयत-त्रिभुज-चतुर्भुजादीनां विविधाकार-विषये अधीतवन्तः। अपि च आयत-वर्गादीनां परिधेः तथा क्षेत्रफलस्य परिकलनं कृतवन्तः। उदाहरणार्थं भवतां वर्गप्रकोष्ठस्य भूतलस्य परिधेः क्षेत्रफलस्य च परिकलनं कर्तुं शक्नुवन्ति।

वयं वर्गप्रकोष्ठं परितः तत्पार्श्वानुदिशं सकृत् चलामः। यावद्दूरं चलामः स एव परिधिः इति। प्रकोष्ठभूतलस्य आमापः एव क्षेत्रफलम् इति उच्यते।

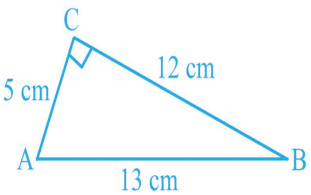
अतः यदि भवतां वर्गप्रकोष्ठः 10 मीटर्-मित-दीर्घः, 8 मीटर्-मित-विशालः आयताकारः तर्हि तस्य परिधिः तु 2(10 मीटर् + 8 मीटर्) 36 मीटर्-मितः। तस्य क्षेत्रफलं 10 मीटर् × 8 मीटर् अर्थात् 80 मीटर् m^2 मितम्।

दीर्घतायाः विशालतायाः वा मापनस्य मात्रकानि मीटर्, cm इत्यादीनि।

कस्याश्चन तलाकृतेः क्षेत्रफलमापनस्य मात्रकं मीटर् m^2, cm^2 इत्यादि। चिन्तयन्तु यत् भवन्तः कस्यांश्चित् त्रिभुजःकार-वाटिकायाम् उपविष्टाः। तस्याः वाटिकायाः क्षेत्रफलं कथम् अन्विषामः ? नवमाध्यायात् तथा पूर्ववर्गेभ्यः च भवन्तः जानन्ति यत् –

$$\textbf{त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं} = \frac{1}{2} \times \textbf{आधारः} \times \textbf{भुजः}$$

त्रिभुजं लम्बकोणत्रिभुजं भवति चेत् एतत् सूत्रं साक्षात् प्रयोक्तुं शक्नुमः। उदाहरणार्थम् – यदि ABC इति लम्बकोणत्रिभुजस्य भुजाः 5 cm, 12 cm, 13 cm च, तदा आधारः 12 cm मितः, औन्नत्यं 5 cm मितम् च इति स्वीकर्तुं शक्यते (12.1 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) ABC त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्



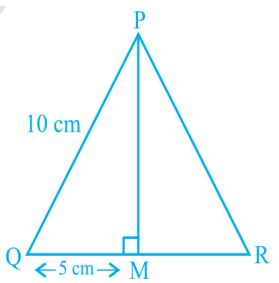
आकृतिः 12.1

$$= \frac{1}{2} \text{ आधारः} \times \text{भुजः} = \frac{1}{2} 12 \times 5\text{cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$$

अवगच्छन्तु यत् 5cm मितम् आधारः इति, 12cm मितं भुजः इत्यपि स्वीकर्तुं शक्नुमः ।

इदानीं यदि PQR इति समत्रिभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुम् इच्छामः, यस्य भुजः 10 cmमितः अस्ति (12.2 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। क्षेत्रफलं ज्ञातुं त्रिभुजस्य औन्नत्यं ज्ञातव्यम् । अस्य त्रिभुजस्य औन्नत्यं ज्ञातुं शक्यते किम् ?

यदि त्रिभुजे भुजाः दीयन्ते चेत् कथं तस्य औन्नत्यम् अन्विष्यामः इत्येतत् स्मरन्तु । एतत् समबाहुत्रिभुजे साध्यम् अस्ति। QR इति रेखायाः M इति मध्यबिन्दुं स्वीकुर्वन्तु, तथा तं बिन्दुं P बिन्दुना योजयन्तु । इदानीं जानीमः यत् PMQ लम्बकोणत्रिभुजम् इति । अतः पैथागोरस्-प्रमेयेन PM इति रेखायाः दीर्घताम् अधोदत्तप्रकारेण ज्ञातुं शक्नुमः।



आकृतिः 12.2

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$

$$(10)^2 = PM^2 + (5)^2 \text{ (QM = MR) इति कारणेन।}$$

अतः $PM^2 = 75$ इति प्राप्तवन्तः।

अर्थात् $PM = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

$$\Delta \text{ PQR त्रिभुजं-क्षेत्रफलम्} = \frac{1}{2} \text{ आधारः} \times \text{औन्नत्यम्} = \frac{1}{2} 10 \times 5\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 25\sqrt{3}\text{cm}^2$$

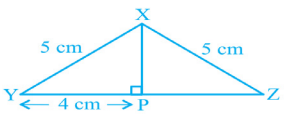
इदानीं **समद्विबाहु-त्रिभुजस्य** क्षेत्रफलस्य परिकलनम् अनेन सूत्रेण कथं करणीयम् इति पश्यामः। उदाहरणार्थम् ΔXYZ त्रिभुजं स्वीकुर्मः। तत्र XY, XZ इति भुजद्वयम् अपि समम् । प्रत्येकम् अपि 5cm तथा असमभुजः YZ - 8cm मितः अस्ति । (12.3 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

अस्यां स्थितौ अपि त्रिभुजस्य औन्नत्यं ज्ञातव्यम् । अतः X इति बिन्दुतः YZ भुजपर्यन्तं XP इति समालम्बं चित्रयामः। भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् XP समालम्बः त्रिभुजस्य YZ आधारं द्विधा विभजति इति ।

अतः $YP = PZ = \frac{1}{2} YZ = 4$cm मितम् । पैथागोरस्-प्रमेयप्रयोगेन

$XP^2 = XY^2 - YP^2$

$= 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$



आकृतिः 12.3

अतः $XP = 3\text{cm}$ मितम्

इदानीं ΔXYZ त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ आधारः $YZ \times$ औन्नत्यम् XP

$= \frac{1}{2} 8 \times 3\text{cm}^2 = 12\text{cm}^2$

इदानीं यदि **विषमबाहुत्रिभुजस्य** भुजःनां दीर्घतां जानीमः किन्तु औन्नत्यं न जानीमः तर्हि अस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं शक्यते किम् ? उदाहरणार्थम् – कस्याश्चन त्रिभुजःकारवाटिकायाः भुजाः तु 40 मीटर्, 32 मीटर्, 24 मीटर् च । अस्याः क्षेत्रफलं कथं परिकलयन्ति ? निश्चयेन यदि सूत्रस्य प्रयोगः करणीयः तर्हि औन्नत्यस्य परिकलनं करणीयं भवत्येव । किन्तु औन्नत्यं गणयितुं सङ्केतः अपि नास्ति । एवं कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु –भवन्तः परिणामम् अन्वेष्टुं न शक्नुवन्ति चेत् अग्रिमपरिच्छेदं प्रति गच्छन्तु ।

12.2 त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् (हेरान्-सूत्रेण)

हेरान् दशमशतके ईजिप्ट्-देशस्य अलेक्सान्ड्रियानगरे लब्धजन्मा स्यात् । सः अन्वयिक-गणिते कार्यं कृतवान् । भौतविज्ञानस्य, गणितस्य च विषयेषु तस्य कृतिवैविध्यं एतावत् अधिकं येन सः एषु क्षेत्रेषु कश्चन कोषपुरुषः इति अभिनन्द्यते । तस्य ज्यामितीय-कृतिषु क्षेत्रगणितीयसमस्याः एव अधिकतया उक्ताः सन्ति । ते विषयाः त्रिषु पुस्तकेषु लिखिताः सन्ति । प्रथमपुस्तके वर्ग-आयत-त्रिभुज-समलम्बचतुर्भुजादीनाम्, अन्येषां विशिष्टाकृतीनां, वेलनाकार-शङ्कु-गोलादीनां तलविषये च उक्तम् अस्ति । अस्मिन् पुस्तके त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं किञ्चन प्रसिद्धं सूत्रं व्युत्पादितम् अस्ति ।


आकृतिः 12.4

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलविषये यत् सूत्रं हेरान् महोदयेन दत्तं तत् हीरो-सूत्रम् इति उच्यते । तदेवमुच्यते –

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$

यत्र a, b, c च त्रिभुजस्य भुजाः,

s = अर्धपरिधिः, अर्थात् – त्रिभुजस्य परिधेः अर्धम् $= \frac{(a + b + c)}{2}$

यत्र त्रिभुजस्य भुजं प्राप्तुं न शक्यते तत्र एतत् सूत्रम् उपयुक्तं भवति। एतेन सूत्रेण उपरिदत्तायाः ABC त्रिभुजःकारवाटिकायाः क्षेत्रफलं परिकलयितुं प्रयोगं कुर्मः (12.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

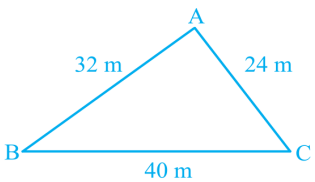
a = 40 m, b = 23 m, c = 34 m इति स्वीकुर्वन्तु। तर्हि

$$s = \frac{(40 + 24 + 32)}{2} \text{ m} = 48 \text{ m मितम्}।$$

$s - a = (48 - 40) = 8$ mमितम्

$s - b = (48 - 24) = 24$ mमितम्

$s - c = (48 - 32) = 16$ mमितम्



आकृतिः 12.5

अतः ABC वाटिकायाः क्षेत्रफलम् $= \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16 \text{m}^2} = 384\text{m}^2$$

वयं पश्यामः यत् $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ अतः वाटिकायाः भुजाः आहत्य कञ्चन लम्बकोणत्रिभुजं निर्मान्ति। दीर्घतमभुजः - अर्थात् BC यः 40 m अस्ति, सः कर्णः भवति। तथा AB, AC भुजयोः मध्ये विद्यमानः कोणः 90^0 मितः भवति।

प्रथमं सूत्रम् उपयुज्य वाटिकायाः क्षेत्रफलं परिशीलयितुं शक्नुमः यत् $\frac{1}{2} \times 32 \times 24 \text{ m}^2$

$$= 384 \text{ m}^2$$

भवतीति। हेरान् सूत्रेण प्राप्तं क्षेत्रफलं तथा उपरिदत्तप्रकारेण प्राप्तं क्षेत्रफलं च समाने एव स्तः।

इदानीं हेरान् सूत्रेण अन्य-त्रिभुजःनाम् अपि क्षेत्रफलपरिकलनद्वारा एतत् तथ्यं सत्यापयितुं शक्नुमः।

(i) 10 cm-भुजयुक्तं किञ्चन समबाहुत्रिभुजम्

(ii) समद्विबाहुत्रिभुजं यस्य असमभुजः 8 cm मितः, प्रत्येकं समभुजः 5 cm मितः च

भवन्तः पश्यन्ति यत्

(i) $s = \frac{10 + 10 + 10}{2}$ cm = 15 cm मितम्।

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \sqrt{15\,(15 - 10)\,(15 - 10)\,(15 - 10)}\ \text{cm}^2$।

$$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}\ \text{cm}^2 = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2।$$

(ii) $s = \frac{8 + 5 + 5}{2}$ cm = 9 cm मितम्

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \sqrt{9\,(9 - 8)\,(9 - 5)\,(9 - 5)}\ \text{cm}^2$

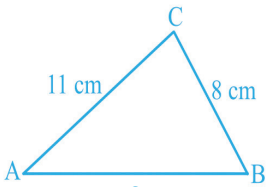
$$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2 \text{ मितम्}$$

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 1 : त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्य भुजद्वयं 8 cm, 11 cm च तथा परिधिः 32 cm मितः च (12.6 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

समाधानम् - त्रिभुजस्य परिधिः = 32 cm, a = 8 cm, b = 11cm

तृतीयं भुजम् c = 32 cm – (8 + 11) cm = 13 cm



आकृतिः 12.6

अतः $2s = 32$ अर्थात् $s = 16$ cm

$s - a = (16 - 8)$ cm = 8 cm

$s - b = (16 - 11)$cm = 5 cm

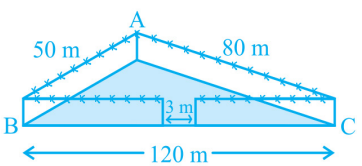
$s - c = (16 - 13)$ cm = 3 cm

अतः त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = $\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$

$$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}\ \text{cm}^2 = 8\sqrt{30}\ \text{cm}^2$$

उदाहरणम् 2 : कस्याश्चन ABC इति त्रिभुजःकार-वाटिकायाः भुजाः 120 m, 80 m, 50 m च (12.7तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। धनिया इति कश्चन मालाकारः वाटिकां परितः वृतिम्, वाटिकायाः अन्तः च सस्यतृणानि स्थापयितुम् इच्छति। सस्यानि आरोपयितुं कियत् क्षेत्रफलम् अपेक्ष्यते? कण्टकित-तन्त्रीद्वारा वाटिकायाः वृतिं कर्तुं कियत् मूल्यं भवति इति अन्विषन्तु। कण्टकिततन्त्रीस्थापनस्य मूल्यं प्रतिमीटर्-कृते रु. 20/- इति। तत्र एकपार्श्वे द्वारनिर्माणार्थं 3 m मितं विशालतां विहाय तत् मूल्यं यच्छन्तु।

समाधानम् - वाटिकायाः क्षेत्रफलं प्राप्तुम्



आकृतिः 12.7

$2s = 50 + 80 + 120 = 250$ m

अर्थात् $s = 125$ m

$s - a = (125 - 120)$ m = 5 m

$s - b = (125 - 80)$ m = 45 m

$s - c = (125 - 50)$ m = 75 m

अतः वाटिकायाः क्षेत्रफलम् = $\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$

$$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}\ \text{m}^2$$

$$= 375\sqrt{15}\ \text{m}^2$$

अपि च वाटिकायाः परिधिः = $AB + BC + CA = 250$ m

अतः वृतिं कर्तुम् अपेक्षिता तन्त्रीदीर्घता = 250 - 3 m (द्वारार्थम्)

= 247 m

वृतिकरणस्य मूल्यम् = रु. 20×247 = रू.4940/-

उदाहरणम् 3 : कस्यचन त्रिभुजःकारक्षेत्रखण्डस्य भुजाः 3 : 5 : 7 इति अनुपाते सन्ति, परिधिः 300 m मितः अस्ति। अस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - भुजाः यदि $3x$, $5x$, $7x$ m मितानि सन्ति (12.8 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

वयं जानीमः यत् $3x + 5x + 7x = 300$ इति (त्रिभुजस्य परिधिः)

अतः $15x = 300$, अर्थात् $x = 20$.

अतः त्रिभुजस्य भुजाः तु 3×20 m, 5×20 m, 7×20 m मिताः इति

अर्थात् 60 m, 100 m, 140 m च

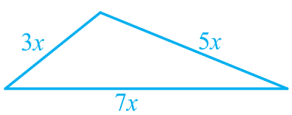
हेरान् सूत्रेण इदानीं क्षेत्रफलं परिकलयितुं शक्नुवन्ति किम् ?

$$s = \frac{60 + 100 + 140}{2} \text{ m} = 150 \text{ m}$$

क्षेत्रफलं तु $= \sqrt{150\,(150 - 60)\,(150 - 100)\,(150 - 140)}$ m^2

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$ m^2

$= 1500\sqrt{3}$ m^2

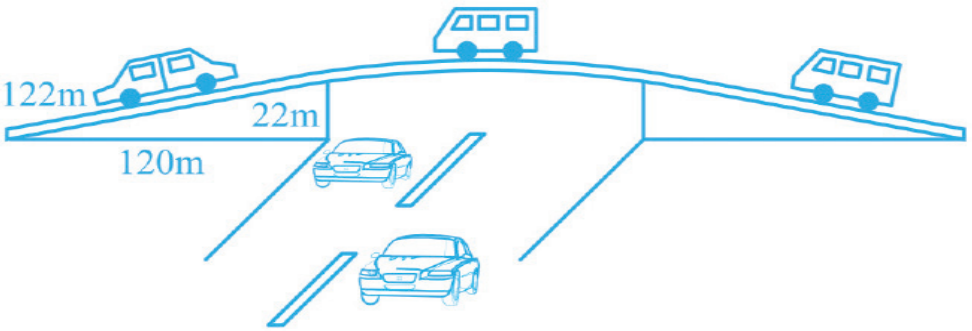


आकृतिः 12.8

प्रश्नावलिः 12.1

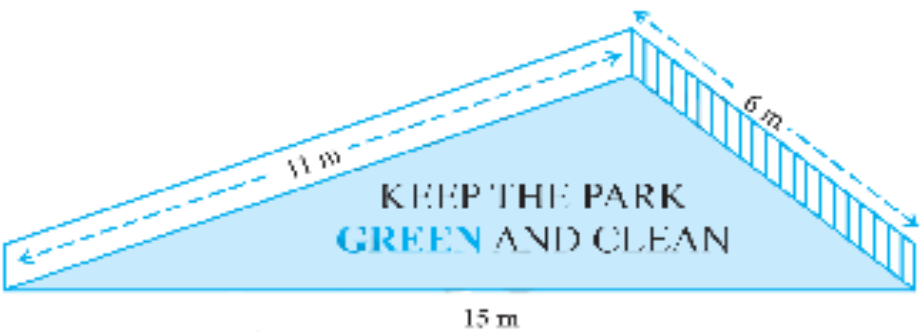
1. किञ्चन यातायातसङ्केतफलकम् – 'अग्रे विद्यालयः' इति सूचयति । तत् कस्मिंश्चित् समबाहुत्रिभुजःकारे अस्ति । अस्य भुजम् a इति । हेरान् सूत्रेण अस्य सूचनाफलकस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। यदि अस्य परिधिः 180cm मितः भवति तर्हि क्षेत्रफलं कियत् भवति ?

2. कस्यचन सेतोः त्रिभुजःकारभित्तिभुजाः विज्ञापनार्थम् उपयुज्यन्ते। भित्तिभुजाः तु 122 m, 22 m, 120 m मितानि सन्ति (12.9 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। प्रतिवर्षं विज्ञापनैः प्रति m^2 मितस्य कृते रू.5000/- आयरूपेण प्राप्यते । काचित् संस्था आसु भित्तिषु अन्यतमां मासत्रयार्थं भाटकेन स्व्यकरोत् । तया संस्थया भाटकरूपेण कियत् दत्तम् ?



आकृतिः 12.9

3. कस्यांचित् वाटिकायां काचित् विसर्पी अस्ति यस्याः भुजभित्तिषु अन्यतमा केनचित् वर्णेन विलिप्ता अस्ति। तत्र काचित् सूचना – 'वाटिकां शुद्धां हरितां च रक्षन्तु' इति अस्ति (12.10 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। यदि भित्तीनां भुजाः 15 m, 11 m, 6 m मिताः इति दत्तं तर्हि वर्णेन विलिप्तं क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। आकृतिः 12.10



आकृतिः 12.9

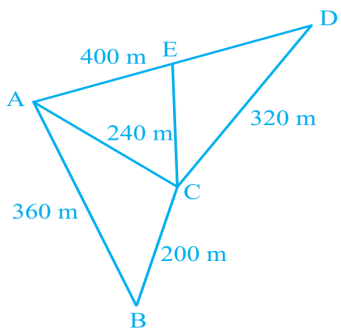
4. कस्यचन त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्य भुजौ 18 cm, 10 cm मितौ, तथा परिधिः 42 cm मितः।
5. त्रिभुजस्य भुजाः 12 : 17 : 25 इति अनुपाते सन्ति, अपि च परिधिः 540 cm मितः अस्ति। अस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
6. कस्यचन समद्विबाहुत्रिभुजस्य परिधिः 30 cm मितः अपि च तस्य प्रत्येकं समभुजः 12 cm मितः अस्ति। त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

12.3 चतुर्भुजानां क्षेत्रफलान्वेषणे हेरान् सूत्रस्य प्रयोगः

कस्याश्चन कृषिकायाः समीपे कश्चित् भूखण्डः अस्ति। सा कांश्चन श्रमिकान् कृषिकार्यार्थं योजयति। प्रति m^2 मितं क्षेत्रफलं परिकलय्य तदाधारेण वेतनस्तरः निर्णीयते। सा एतत् कार्यं कथं कर्तुं शक्नोति ? बहुधा क्षेत्राणि चतुर्भुजाकारेषु भवन्ति। चतुर्भुजं त्रिभुजभागेषु विभज्य त्रिभुजक्षेत्रस्य सूत्रं प्रयोक्तव्यम्। इदानीम् एतां समस्यां पश्यामः।

उदाहरणम् 4 : कमला इति कस्याश्चन समीपे किञ्चन त्रिभुजः कारक्षेत्रम् अस्ति यस्य भुजाः 240 m, 200 m, 360 m मिताः सन्ति। अस्मिन् क्षेत्रे सा गोधूमं वर्धितवती। अन्यस्मिन् त्रिभुजःकारक्षेत्रे यत् पूर्वतनक्षेत्रस्य पार्श्वे अस्ति, यस्य च भुजाः 240 m 320 m 400 m मिताः सन्ति, तत्र सा आलुकम्, पलाण्डुं च वर्धयितुम् इष्टवती (12.11 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। एतत् क्षेत्रं सा द्विधा विभक्तवती - यथा दीर्घतमभुजस्य मध्यबिन्दुः अभिमुखशीर्षेण सह युज्यते। अत्र एकस्मिन् भागे आलुकम्, अपरस्मिन् भागे पलाण्डुं च वर्धितवती। गोधूमं पलाण्डुम् आलुकं च वर्धयितुं कियत् क्षेत्रफलम् (हेक्टेर् मितम्) अपेक्ष्यते? (1 हेक्टेर् = 10000 m^2 मितम्)

समाधानम् - ABC क्षेत्रे सा गोधूमं वर्धयति इति भवतु। ACD इति क्षेत्रं द्विधा विभजति यथा AD रेखायाः E इति मध्यबिन्दुं C बिन्दुना सह युज्यते। ABC इति त्रिभुजे



आकृतिः 12.11

$$a = 200 \text{ m}, b = 240 \text{ m}, c = 360 \text{ m}$$

अतः $s = \frac{200 + 240 + 360}{2} \text{ m} = 400 \text{ m}$

अतः गोधूमवर्धनस्य क्षेत्रफलम् -

$$= \sqrt{400\,(400 - 200)\,(400 - 240)\,(400 - 360)} \text{ m}^2$$

$$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40} \text{ m}^2$$

$$= 16000\sqrt{2} \text{ m}^2 = 1.6 \times \sqrt{2} \text{ हेक्टर् मितम्}$$

$$= 2.26 \text{ हेक्टर् (प्रायशः)}$$

इदानीं ΔACD त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं परिकलयामः।

अतः $s = \frac{240 + 320 + 400}{2} \text{ m} = 480 \text{ m}$

ΔACD त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \sqrt{480\,(480 - 240)\,(480 - 320)\,(480 - 400)} \text{ m}^2$

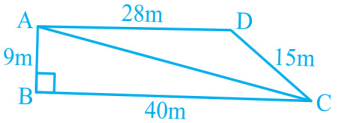
$= \sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80} \text{ m}^2 = 38400 \text{ m}^2 = 3.84$ हेक्टर्।

वयं पश्यामः यत् AD रेखायाः E मध्यबिन्दुं C इति बिन्दुना सह योजनेन ACD त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं द्विधा विभक्तं भवति। अस्य कारणं वक्तुं शक्नुवन्ति वा ? वस्तुतः AE, ED इति आधारौ समौ तथा तयोः समानभुजौ अपि स्तः।

अतः आलुकवर्धनस्य क्षेत्रफलम् = पलाण्डुवर्धनस्य क्षेत्रफलम्

= 3.84 ÷ 2 = 1.92 हेक्टर्-मितम्

उदाहरणम् 5 : स्वच्छता-अभियानार्थं कस्यचन विद्यालयस्य छात्राः काञ्चन अभियात्राम् आयोजितवन्तः। छात्राः वीथिकाद्वारा गणद्वये चलितवन्तः। तेषु एकः गणः AB, BC, CA इति मार्गेषु अचलत्। अपरः गणः AC, CD, DA इति मार्गेषु अचलत् (12.12 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अग्रे ते मार्गैः अन्तर्गतं क्षेत्रफलं शुद्धीकृतवन्तः। यदि AB = 9 m, BC = 40 m, CD = 15 m, DA = 28 m, $\angle$B = 90^0 च, अग्रे कः गणः अधिकतरं क्षेत्रफलं स्वच्छम् अकरोत्, तथा कियत्प्रमाणेन अधिकं कृतवन्तः? छात्रैः स्वच्छीकृतं पूर्णं क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु (मार्गाणां विशालतां विहाय)।



आकृतिः 12.12

समाधानम् - यतो हि AB = 9 m, BC = 40 m, $\angle$B = 90^0,

$$A\text{C} = \sqrt{9^2 + 40^2}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{81 + 1600}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{1681}\ \text{m} = 41\ \text{m}।$$

अतः प्रथमगणेन ABC त्रिभुजस्य क्षेत्रस्य शुद्धता करणीया भवति। ABC त्रिभुजं लम्बकोणत्रिभुजम् अस्ति।

Δ ABC क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ आधारः × औन्नत्यम् = $\frac{1}{2}$ 40 × 9 = 180 m^2

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 9 = 180\ \text{m}^2$$

द्वितीयगणेन विषमबाहुत्रिभुजं Δ ACD क्षेत्रं स्वच्छीकरणीयं भवति। विषमफलत्रिभुजस्य भुजाः 41m, 15m, 28m मिताः।

$$s = \frac{41 + 15 + 28}{2}\ \text{m} = 42\ \text{m}$$

Δ ACD त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = $\sqrt{\text{s (s - a) (s - b) (s - c)}}$

$$= \sqrt{42\ (42 - 41)\ (42 - 15)\ (42 - 28)}\ \text{m}^2$$

$$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14}\ \text{m}^2 = 126\ \text{m}^2 \text{ मितम्}$$

अतः प्रथमगणः द्वितीयगणस्य अपेक्षया (180 - 126 m^2) अर्थात् – 54 m^2 मितम् अधिकं क्षेत्रं शुद्धम् अकरोत्।

छात्रैः शुद्धीकृतं पूर्णक्षेत्रम् = (180 + 126) m = 306 m मितम्

उदाहरणम् 6 : संज्ञा नाम काचित् कस्यचित् भूखण्डस्य स्वामिनी । सः भूखण्डः समचतुर्भुजाकारः (12.13 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। सा स्वस्याः पुत्रेण पुत्र्या च सह क्षेत्रे विविधसस्यानि वर्धयितुम् इच्छति । भूखण्डं सा द्विधा विभक्तवती । यदि भूखण्डस्य परिधिः 400 m मितः तर्हि एकः कर्णः 160 m मितः भवति । तदा कियत् क्षेत्रं एकः प्राप्नुयात्?

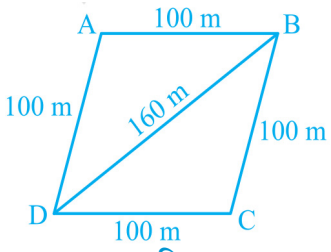
समाधानम् - ABCD इति क्षेत्रं भवतु ।

परिधिः = 400 m

अतः प्रत्येकं भुजः = 400 ÷ 4 = 100 m,

अर्थात् $AB = AD = 100$ m

कर्णः BD = 160 m



आकृतिः 12.13

Δ ABD त्रिभुजस्य अर्धपरिधिः

$$s = \frac{100 + 100 + 160}{2} \text{ m} = 180 \text{ m}$$

Δ ABD त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$

$$= \sqrt{180\,(180 - 100)\,(180 - 100)\,(180 - 160)} \text{ m}^2$$

$$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20} \text{ m}^2$$

$= 4800 \text{ m}^2$ मितम्

अतः तयोः प्रत्येकं व्यक्तिः 4800 m^2 मितं क्षेत्रं प्राप्नोति ।

पर्याय-पद्धतिः - CE रेखां BD रेखायाः समालम्बां चित्रयन्तु (12.14 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

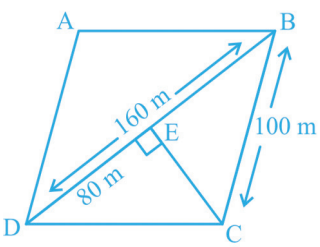
BD = 160 m

DE = 160 ÷ 2 = 80 m

$DE^2 + CE^2 = DC^2$

$CE = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

$CE = \sqrt{100^2 - 80^2}$ m = 60 m

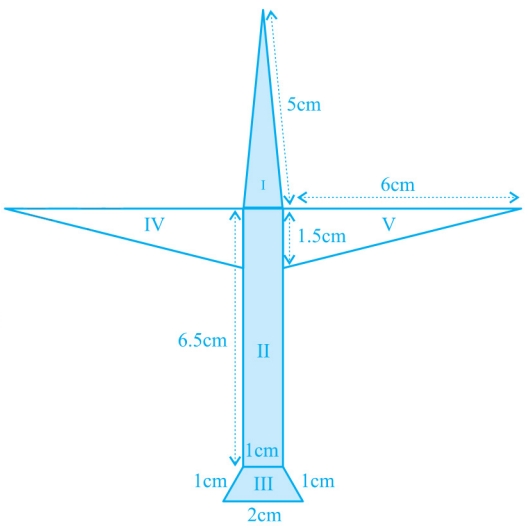


आकृतिः 12.14

अतः BCD त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60 \text{ m}^2 = 4800 \text{ m}^2$ मितम्

प्रश्नावलिः 12.2

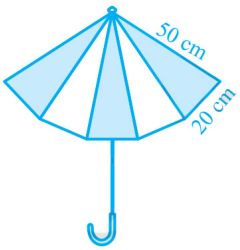
1. ABCD इति कस्यांश्चित् चतुर्भुजाकार-वाटिकायां $\angle C = 90^0$, AB = 9 m, BC = 12 m, CD = 5 m, AD = 8 m च। एषा वाटिका कियत्-क्षेत्रफल-विस्तृतं भवति ?
2. ABCD इति चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु, यत्र AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 4 cm, DA = 5 cm, AC = 5 cm च सन्ति।
3. राधा केनचित् वर्णपत्रेण कस्यचित् विमानस्य आकृतिं निर्मितवती (12.15 चित्रं पश्यन्तु)। उपयुक्तपत्रस्य पूर्णक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।



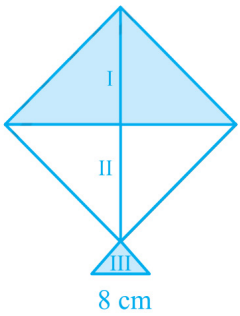
आकृतिः 12.15

4. कयोश्चित् त्रिभुज-चतुर्भुजयोः समानः आधारः, समानं क्षेत्रफलं च स्तः। यदि त्रिभुजस्य भुजाः 26 cm, 28 cm, 30 cm च, तथा चतुर्भुजस्य आधारः 28 cm, चतुर्भुजस्य औन्नत्यम् अन्विषन्तु।
5. समचतुर्भुजाकारक्षेत्रे 18 गाः चारयितुं हरिततृणानि सन्ति। यदि समचतुर्भुजस्य प्रत्येकं भुजः 30 m मितः, दीर्घतरकर्णः च 48 m मितः, तर्हि प्रत्येकं गवा हरितक्षेत्रे कियत्-क्षेत्रफलपरिमितं तृणं प्राप्यते?
6. द्वयोः वर्णयोः 10 त्रिभुजःकारभाग-वस्त्राणां सीवनेन किञ्चन छत्रं निर्मीयते (12.16 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। तस्य प्रत्येकं भागः 20 cm, 50 cm, 50 cm च। प्रत्येकं वर्णस्य कियत्-क्षेत्रमितं वस्त्रं छत्रं निर्मातुम् अपेक्षितं भवति ?

7. कस्यचित् पतङ्गस्य वर्गाकारः 32 cmमित-कर्णयुतः अस्ति । समद्विबाहुत्रिभुजःकारभागस्य आधारः 8 cm, भुजौ च प्रत्येकं 6 cm मितौ च स्तः । पतङ्गः त्रिविधच्छायाभिः निर्मातव्यः भवति (12.17 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। प्रत्येकं छायायाः कियत्-परिमाणकं पत्रं पतङ्गनिर्माणे उपयुक्तं स्यात्?

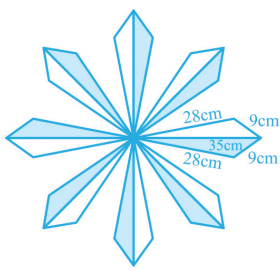


आकृतिः 12.16



आकृतिः 12.17

8. कस्मिंश्चित् पुष्पालङ्कार-युक्त-भूतले 16 त्रिभुजःकार-शिला-विशेषाः स्थापनीयाः सन्ति । अस्य त्रिभुजस्य भुजाः तु 9 cm, 28 cm, 35 cm च (12.18 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। प्रति cm^2 परिष्कारार्थं 50 पैसा-मूल्यं चेत् आहत्य जायमानं व्ययम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 12.18

9. समालम्बचतुर्भुजाकार-क्षेत्रस्य समान्तरभुजौ 25 m, 10 m स्तः। असमान्तरभुजौ 14 cm, 13 cm च । अस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु ।

12.4 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तांशान् अधीतवन्तः।

1. *a*, b, c भुजयुक्त- त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं हेरान्-सूत्रेण परिकलयितुं शक्यते । तच्च सूत्रम् - त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् - $\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ यत्र $s = \frac{a+b+c}{2}$.
2. यस्य चतुर्भुजस्य भुजाः, एकः कर्णः च दत्ताः तस्य चतुर्भुजस्य त्रिभुजद्वयेन विभजनेन हेरान्-सूत्रेण क्षेत्रफलं परिकलयितुं शक्यते ।

अध्यायः 13

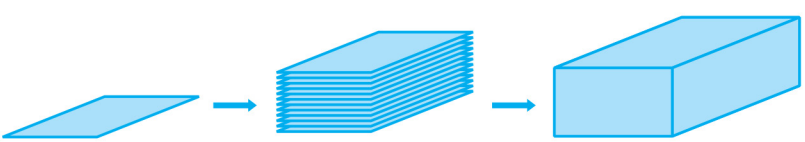
पृष्ठक्षेत्रफलं, घनफलं च

13.1 प्रस्तावना

यत्र यत्र पश्यामः तत्र सामान्तया घनपदार्थाः दृश्यन्ते । एतावत्पर्यन्तम्, अस्माकम् अध्ययने तादृशीः एव आकृतीः दृष्टवन्तः याः सरलतया कृष्णफलकेषु तथा टिप्पणीपुस्तकेषु चित्रयितुं शक्नुमः । एताः आकृतयः समतल-आकृतयः इति उच्यन्ते । वयम् आयतानि, वर्गाः तथा वर्तुलानि इत्यादीनाम् अर्थम् अवगतवन्तः, तेषां परिधिः, क्षेत्रफलं च किम् इति ज्ञातवन्तः तथा तेषाम् अन्वेषणं कथम् इत्यपि अवगतवन्तः । पूर्वतन-वर्गेषु एतान् विषयान् पठितवन्तः । समान-आमाप-आकारयुत-समतल-आकृतीः स्थूलकार्पास-पत्रकात् कर्तयित्वा पृथक् एकस्य उपरि अन्यः इति ऊर्ध्वाधर-क्रमेण स्थापयामः चेत् किं भवति इति ज्ञातुम् उत्सुकता भवति । अनया प्रक्रियया काश्चन समतल-आकृतयः प्राप्यन्ते यथा - आयतघनः दण्डगोलाकारः इत्याद्याः । पूर्वतन-वर्गेषु भवन्तः आयतघनानां, वेलनकाराणां पृष्ठक्षेत्रफलं तथा घनफलं च अन्वेष्टुं अवगतवन्तः । इदानीं आयतघनानां तथा वेलनकाराणां पृष्ठक्षेत्रफलस्य, घनफलस्य च अन्वेषणम् अवगच्छामः तथा तत् ज्ञानम् घनगोलान् प्रति विस्तारयामः ।

13.2 आयतघन-घनयोः पृष्ठक्षेत्रफलम्

भवन्तः पत्राणां सङ्ग्रहं दृष्टवन्तः वा ? तत् कथम् दृश्यते ? 13.1 आकृत्यां दर्शितप्रकारेण दृश्यते वा ?



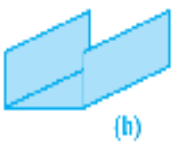
आकृतिः 13.1

अनेन कश्चन आयतघनः निर्मीयते । एतं आयतघनम् आच्छादयितुं कति पिङ्गल-वर्ण-पत्राणाम् अपेक्षा भवति ? पश्यामः –

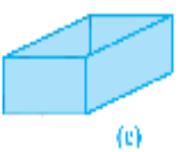
आदौ पत्र-सङ्ग्रहस्य अधोभागम् आच्छादयितुम् आयताकारस्य भागस्य अपेक्षा भवति । तत्तु 13.2 (*a*) आकृत्यां दर्शितप्रकारेण भवति ।



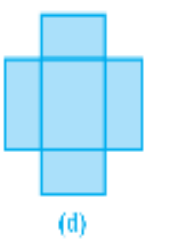
अग्रे पत्र-सङ्ग्रहस्य पार्श्व-भागद्वयम् आच्छादयितुम् आयताकारभागद्वयस्य अपेक्षा भवति । तत्तु 13.2 (b) आकृत्यां दर्शितप्रकारेण भवति ।



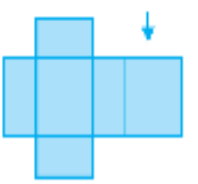
इदानीं पूर्वभागं तथा पृष्ठभागम् आच्छादयितुम् इतोऽपि आयताकार-भागद्वयस्य अपेक्षा भवति । तत्तु 13.2 (c) आकृत्यां दर्शितप्रकारेण भवति ।



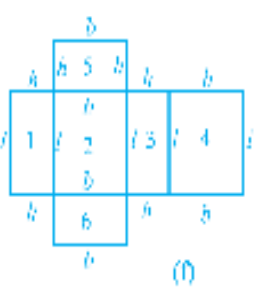
इदानीं एताम् आकृतिं उद्घाटयामः चेत् तत्13.2 (d) आकृत्यां दर्शितप्रकारेण भवति ।



अन्तिम-घट्टे पत्र-सङ्ग्रहस्य ऊर्ध्वभागम् आच्छादयितुम् अन्यस्य कस्यचित् आयताकारस्य भागस्य अपेक्षा भवति । तत्तु 13.2 (e) आकृत्यां दर्शितप्रकारेण भवति ।



अतः षड्भिः आयताकार-भागैः आयतघनस्य पूर्णं बाह्य-तलम् आच्छादितवन्तः ।



आकृतिः 13.2

अनेन ज्ञायते यत् आयतघनस्य बाह्यभागः षड्-आयतैः निर्मितः अस्ति इति (वस्तुतः आयताकारः आयतघनस्य मुखानि इति कथ्यन्ते), येषां क्षेत्रफलम् स्वस्य दीर्घता-विस्तारयोः गुणनेन पृथक् पृथक् ज्ञात्वा तेषां षण्णां योगेन प्राप्तुं शक्नुमः ।

इदानीं आयतघनस्य दीर्घता l, विस्तारः b, तथा औन्नत्यम् h इति स्वीकुर्मः । तदा एताभिः विमाभिः युक्ता आकृतिः 13.2 (f) आकृत्यां दर्शितप्रकारेण भवति ।

अतः षण्णाम् आयतानां क्षेत्रफलानां योगः

$$\text{प्रथमस्य आयतस्य क्षेत्रफलम्} (= l \times h)$$

$$+$$

$$\text{द्वितीयस्य आयतस्य क्षेत्रफलम्} (= l \times \text{b})$$

$$+$$

$$\text{तृतीयस्य आयतस्य क्षेत्रफलम्} (= l \times h)$$

$$+$$

$$\text{चतुर्थस्य आयतस्य क्षेत्रफलम्} (= l \times \text{b})$$

$$+$$

$$\text{पञ्चमस्य आयतस्य क्षेत्रफलम्} (= \text{b} \times h)$$

$$+$$

$$\text{षष्ठस्य आयतस्य क्षेत्रफलम्} (= \text{b} \times h)$$

$$= 2\,(l \times \text{b}) + 2\,(\text{b} \times h) + 2\,(l \times h)$$

$$= 2\,(l\text{b} + \text{b}h + \text{h}l)$$

अनेन प्राप्नुमः यत्

आयतघनस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् = 2 (lb + bh + $h l$)

यत्र l, b, h क्रमशः आयतघनस्य तिस्रः धाराः सन्ति ।

टिप्पणी क्षेत्रफलस्य मानकं वर्ग-मानकम् इति स्वीक्रियते, यतः एक-मानक दीर्घतायुतवर्गाणां पूरणेन क्षेत्रस्य परिमाणं मापयामः ।

उदाहरणार्थम् यदि 15 cm मित-दीर्घतायुतः, 10 cm मित-विस्तारयुतः, 20 cm मित-औन्नत्य-युतः आयतघनः अस्ति, तस्य क्षेत्रफलं तु -

$= 2[\ (15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)\ ]\ cm^2$

$= 2(150 + 200 + 300)\ cm^2$

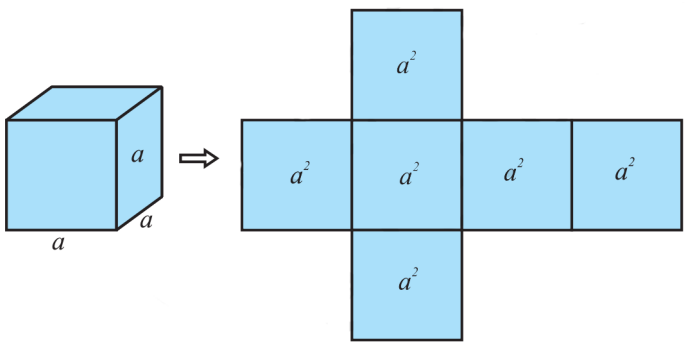
$= 2 \times 650\ cm^2$

$= 1300\ cm^2$

अत्र स्मरन्तु यत् यस्य आयतघनस्य दीर्घता, विस्तारः, औन्नत्यं च समानानि सन्ति, सः आयतघनः घनः इति उच्यते। घनस्य प्रत्येकं धारा a इति स्वीक्रियते चेत्, अस्य घनस्य पृष्ठक्षेत्रफलं तु -$2(a \times a + a \times a + a \times a)$ अर्थात् $2(a^2 + a^2 + a^2)$ अर्थात् $6a^2$ (13.3 आकृतिं पश्यन्तु)

घनस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् = $6a^2$

यत्र a घनस्य धारा।

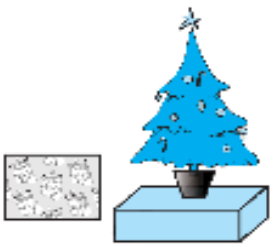


आकृतिः 13.3

आयतघनस्य षट्सु मुखेषु चत्वारि एव मुखानि पश्यामः, ऊर्वाधर-भागौ त्यक्तं चेत् चतुर्णां मुखानां क्षेत्रफलं आयतघनस्य **पार्श्वपृष्ठक्षेत्रफलम्** इति उच्यते। अतः l दीर्घतायुतस्य, b विस्तारयुतस्य h उन्नतायुतआयतघनस्य पार्श्वपृष्ठक्षेत्रफलं तु $2lh + 2bh$, अथवा $2(l + b)h$. तथैव a धारायुतघनस्य पार्श्वपृष्टीयक्षेत्रफलं तु $4a^2$। उपरितनान् अंशान् मनसि निधाय , आयतघनस्य (घनस्य वा) पृष्ठक्षेत्रफलं तु **पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम्** इत्यपि उच्यते। इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 1 : मेरी स्वस्य क्रिस्मस्-वृक्षम् अलङ्कर्तुम् इच्छति। सा वृक्षं वर्ण-पत्रैः आच्छादित-काष्ठमय-पेटिकायां सान्ता-क्लासस्य चित्रसहितं स्थापयितुम् इच्छति (13.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। एतदर्थं तया कियता प्रमाणेन पत्राणि स्वीकरणीयानि इति ज्ञातव्यम्। यदि पेटिकायाः दीर्घता, विस्तारः, औन्नत्यं च क्रमशः 80 cm, 40 cm, 20 cm मितं च, तर्हि 40 cmमित-भुजायुतानां कति पत्रास्तराः अपेक्षिताः भवन्ति ?

समाधानम् - यतः मेरी पत्रं पेटिकायाः बाह्यतले लेपयितुम् इच्छति, अपेक्षितानि पत्राणि तु आयतघनायाः पेटिकायाः पृष्ठक्षेत्रफलतुल्यं पत्राणि अपेक्षितानि भवन्ति।



आकृतिः 13.4

पेटिकायाः विमा तु दीर्घता = 80 cm, विस्तारः= 40 cm, औन्नत्यम् = 20 cm

पेटिकायाः पृष्ठक्षेत्रफलम् = $2(lb + bh + hl)$

$= 2[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]\ cm^2$

$= 2\ (3200 + 800 + 1600)\ cm^2$

$= 2 \times 5600\ cm^2 = 11200\ cm^2$

प्रति पत्रस्य क्षेत्रफलम् = $40 \times 40\ cm^2 = 1600\ cm^2$

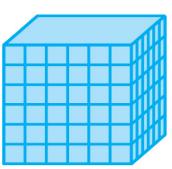
अतः अपेक्षितास्तराणसङ्ख्या = $\frac{\text{पेटिकायाः पृष्ठक्षेत्रफलम्}}{\text{एकस्य आस्तरस्य क्षेत्रफलम्}}$

$= \frac{11200}{1600} = 7$

अतः सा 7 पत्राणि अपेक्षते।

उदाहरणम् 2 : हमीदः पिधानिकायुतं कञ्चन घनाकार-जलसञ्चयपात्रं निर्मितवान् - यत्र प्रत्येकं बाह्यधारा 1.5 m दीर्घतायुता अस्ति। सः भूतलं विहाय पात्रस्य बाह्यतलं 25 cm भुजायुतवर्गाकार टैल्-विशेषैः आच्छादितवान् अस्ति। (13.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। तेन टैल्-विशेषार्थं कियत् व्ययीकरणीयम् इति अन्विषन्तु, यदि टैल्-विशेषस्य मूल्यं प्रति-द्वादशकं(डजन्) रु.360 इति।

समाधानम् - यतः हमीदः सञ्चयपात्रस्य पञ्च-बाह्य-तलानि आच्छादयितुम् इच्छति, तेन, टैल्-विशेषाणां सङ्ख्यां ज्ञातुं पात्रस्य पृष्ठक्षेत्रफलं ज्ञातव्यं भवति।



आकृतिः 13.5

घनाकारस्य सञ्चयपात्रस्य धारा = 1.5 m = 150 cm

पात्रस्य पृष्ठक्षेत्रफलं = $5 \times 150 \times 150\ cm^2$

'टैल्-वर्गस्य क्षेत्रफलम् = भुजा × भुजा = $25 \times 25\ cm^2$

अतः अपेक्षिताः टैल्-विशेषाः = $\frac{\text{पात्रस्य पृष्ठक्षेत्रफलम्}}{\text{एकस्य टैल्-विशेषस्य क्षेत्रफलम्}}$

$= \frac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$

एकस्य द्वादशकस्य टैल्-विशेषः अर्थात् 12 टैल्-विशेषस्य मूल्यम् = रु.360

अतः एकस्य टैल्-विशेषस्य मूल्यम् = रु. $\frac{360}{12}$ = रु.30

अतः 180 टैल्-विशेषाणां मूल्यम् = 180 × रु.30 = रु.5400

प्रश्नावलिः 13.1

1. 1.5 m मित-दीर्घतायुता 1.25 m मित-विस्तारयुता तथा 65 cm मित-गभीरतायुता काचन कृत्रिमा पेटिका निर्मातव्या अस्ति। सा उपरि उद्घाटिता अस्ति। कृत्रिम-आस्तरस्य गाढता उपेक्षणीया। एतानि अन्विषन्तु

   (i) पेटिकानिर्माणाय अपेक्षितम् आस्तरस्य क्षेत्रफलम्

   (ii) आस्तरस्य मूल्यं यदि $1m^2$ आस्तरस्य मूल्यम् रु.20/-अस्ति।

2. कस्यचन प्रकोष्ठस्य दीर्घता, विस्तारः, औन्नत्यं च क्रमशः 5 m, 4 m, 3 m मितानि सन्ति। भित्तीनां तथा छदस्य श्वेतवर्णेलेपनस्य मूल्यम् अन्विषन्तु - यदि स्तरः प्रति m^2 रु.7.50 अस्ति।

3. आयताकारस्य प्रधान-प्रकोष्ठस्य भूतलस्य परिधिः 250 m मितः। यदि चतुर्णां भित्तीनां कृते श्वेतवर्णं लेपयितुम् प्रति m^2 रु.10 इति स्तरे, आहत्य रु.15000 भवति, तर्हि प्रधान-प्रकोष्ठस्य औन्नत्यं किं स्यात् इति अवगच्छन्तु।

   टिप्पणी चतुर्णानां भित्तीनां क्षेत्रफलम् = पार्श्वपृष्ठक्षेत्रफलम्

4. कस्मिंश्चित् पात्रे विद्यमानः प्राञ्जनम् 9375 m^2 परिमितस्य क्षेत्रफलस्य वर्णलेपनं कर्तुं पर्याप्तम् अस्ति। 22.5 cm × 10 cm × 7.5 cm विमायुतानां कति इष्टिकानां वर्णलेपनम् अस्मात् पात्रात् कर्तुं शक्यते ?

5. कस्याश्चित् घनाकार-पेटिकायाः धारा 10 cm अस्ति तथा अन्या आयतघनाकार-पेटिका तु 12.5 cm मितं दीर्घा, 10 cm विस्तृता, 8 cm उन्नता च अस्ति।

   (i) कस्याः पेटिकायाः पार्श्वपृष्ठफलं बृहत्तरम् अस्ति तथा कियता प्रमाणेन ?

   (ii) कस्याः पेटिकायाः पार्श्वपृष्ठफलं लघुतरम् अस्ति तथा कियता प्रमाणेन ?

6. लघु-अन्तर्गृहस्य कस्यचित् शुष्क-वनस्पति-सङ्ग्रहालयः पूर्णतया कर्तितैः काचैः (आधारं अपि अन्तर्भूय) निर्मितः अस्ति (काचाः लेपनपट्टिकाभिः योजिताः सन्ति)। सः 30 cm दीर्घः 25 cm विस्तृतः 25 cm उन्नतः अस्ति।

   (i) काचस्य क्षेत्रफलं किम् ?

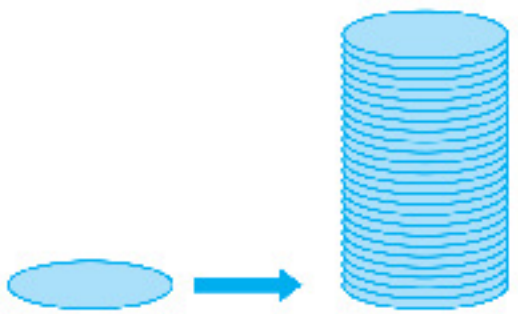
(ii) 12 धाराणां कृते कियती लेपनपट्टिका अपेक्षिता भवति ?

7. शान्ति-मधुरापणेन मधुराणां परिवेष्टनार्थं स्थूलकार्पस-पेटिकानां कृते ग्राहकादेशः कृतः । परिमाणद्वयस्य पेटिकाः अपेक्षिताः । तेषु बृहत्तर-पेटिकायाः विमाः 25 cms × 20cms × 5cms तथा लघुतर-पेटिकायाः विमाः - 15cms × 12cms × 5cms । सर्वेषाम् अपि अतिव्याप्तीनां निमित्तं पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलस्य 5 प्रतिशतं यावत् अधिकम् अपेक्षितं भवति । स्थूलकार्पस-पेटिकायाः मूल्य-स्तरः प्रति 1000 cm^2 निमित्तम् रु.4, प्रकारद्वयेऽपि 250 पेटिकानाम् आपूर्त्यर्थम् स्थूलकार्पस-मूल्यम् अन्विषन्तु ।

8. पर्वीन् स्वस्याः कार्-यानस्य तात्कालिक-आवासं निर्मातुम् इष्टवती । तत् टार्पालिन् उपयुज्य पेटिकावत् संरचनां निर्माय, यथा सा यानस्य चतुरः अपि पार्श्वान्, उपरितनभागं च आच्छादयितुं शक्नुयात्, तथा कर्तुम् इष्टवती (पुरोभागं वर्तुलीकृत्य यथा उपरि स्वीकर्तुं शक्यते तथा) । सीवनसीमा लघुतमा, अतः उपेक्षार्हा इति परिकल्प्य, 2.5 m उन्नतं, 4 m × 3 m आधारविमायुतम् आवासं निर्मातुं कियत् टार्पालिन् अपेक्षितं भवति ?

13.3 लम्बवृत्तीय-दण्डगोलाकारस्य पृष्ठक्षेत्रफलम्

यदि अनेकानि वर्तुलाकार-पत्राणि स्वीकृत्य तानि पूर्ववत् एकस्य उपरि एकं क्रमशः स्थापयामः तर्हि (यथा पूर्वम् आयताकारं स्थापितवन्तः तथा) किं प्राप्नुमः ?

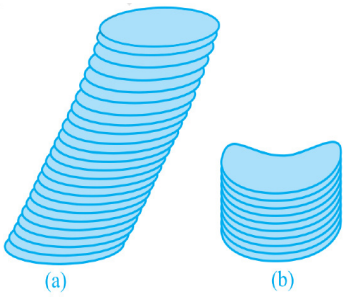


आकृतिः 13.6

तानि वर्तुलपत्राणि दण्डाकारेण स्थापयामः चेत् समलम्ब-वृत्तीय-दण्डगोलाकारं प्राप्नुमः यतः पत्राणि आधारस्य लम्बकोणे स्थापितानि, आधारः च वर्तुलाकारे अस्ति । इदानीं कीदृशः दण्डगोलाकारः लम्बवृत्तीय-दण्डगोलाकारः नास्ति इति पश्यामः ।

13.7 (*a*) आकृत्यां भवन्तः दण्डगोलाकारं पश्यन्ति यः वर्तुलाकारे अस्ति किन्तु सः आधारस्य समकोणे नास्ति। अतः अयं लम्ब-वृत्तीय-दण्डगोलाकारः इति वक्तुं न शक्नुमः।

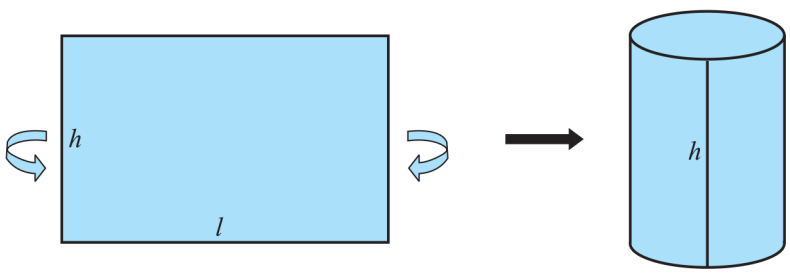
सत्यम्, अवृत्तीय - आधारयुत - दण्डगोलाकारः अस्ति चेत् (यथा 13.7 (b) दत्तप्रकारेण) तर्हि सः अपि लम्बवृत्तीयदण्डगोलाकारः न भवति।



आकृतिः 13.7

टिप्पणी - अत्र लम्बवृत्तीयदण्डगोलाकाराणां विषये केवलं पश्यामः । अतः यावत् न सूचितं तावत्, दण्डगोलाकारः इत्युक्ते लम्बवृत्तीयदण्डगोलाकारः एव।

दण्डगोलाकारः वर्ण-पत्रेण आच्छादनीयः चेत् तत् कथं न्यूनतमपत्रैः एव साधयितुं शक्यते? आदौ किञ्चन आयताकार-पत्रं स्वीकुर्वन्तु यस्य दीर्घता दण्डगोलाकारम् आच्छादयितुं पर्याप्तं, तथा यस्य विस्तारः दण्डगोलाकारस्य औन्नत्य-तुल्यः च अस्ति (यथा १३.८तमे चित्रे दर्शितम्)।



आकृतिः 13.8

आस्तरस्य क्षेत्रफलं दण्डगोलाकारस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलतुल्यम् अस्ति। अत्र अवगच्छन्तु यत् आस्तरस्य दीर्घता वर्तुलाकारस्य आधारस्य परिधि-तुल्यम् अस्ति यत् $2\pi r$ अस्ति।

अतः दण्डगोलाकारस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं तु = यताकारस्य आस्तरस्य क्षेत्रफलम् = दीर्घता × विस्तारः

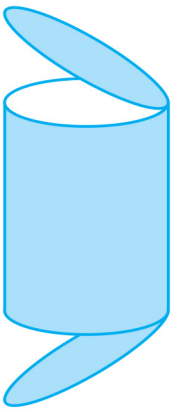
= दण्डगोलाकारस्य आधारस्य परिधिः × h

= $2\pi r \times h$

अतः, **दण्डगोलाकारस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं तु $2\pi rh$**

यत्र r दण्डगोलाकारस्य आधारस्य त्रिज्या अस्ति तथा h दण्डगोलाकारस्य औन्नत्यम् अस्ति।

टिप्पणी - दण्डगोलाकारस्य स्थित्याम् - यावत् न उच्यते, तावत् दण्डगोलाकारस्य त्रिज्या इत्युक्ते दण्डगोलाकारस्य आधारस्य त्रिज्या इत्येव अर्थः ।



आकृतिः 13.9

यदि दण्डगोलाकारस्य ऊर्ध्वाधो-भागौ अपि आच्छादनीयौ तर्हि तत् साधयितुं r इति त्रिज्यायुतस्य तथा πr^2 इति क्षेत्रफलयुतवर्तुलद्वयस्य आवश्यकता अस्ति । (वस्तुतः वर्तुलाकार प्रदेशौ) । (13.9 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । अनेन $(2\pi rh + 2\pi r^2)$ $=2\pi(r + h)$ इति पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलं प्राप्नुमः ।

अतः **दण्डगोलाकारस्य पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलं तु $2\pi r(r + h)$**

यत्र h- दण्डगोलाकारस्य औन्नत्यं, तथा r -दण्डगोलाकारस्य त्रिज्या अस्ति ।

टिप्पणी - भवन्तः प्रथमाध्यायतः अवगन्तुं शक्नुन्ति यत् π अपरिमेयसङ्ख्या अस्ति इति । अतः π इत्यस्य मानम् असान्तः अनावर्ती दशमलवः च अस्ति इति । किन्तु यदा अन्येषु परिकलनेषु अस्य मानस्य उपयोगं कुर्मः, तदा अस्य मानं $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 इत्यस्य आसन्नम् इति स्वीकुर्मः।

उदाहरणम् 3 : सावित्र्या स्वस्याः वैज्ञानिक-परियोजनायाः कृते कस्यचित् दण्डगोलाकारस्य बहुमूर्तिदर्शिनः (k*a*leidoscope) प्रतिदर्शः निर्मातव्यः आसीत् । सा बहुमूर्तिदर्शिनः वक्रपृष्ठभागं निर्मातुं स्फोरक-पत्राणि उपयोक्तुम् इष्टवती । (13.10 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । यदि तया 25 cm मिता दीर्घतायुतः, तथा 3.5 cm मित-त्रिज्यायुतः बहुमूर्तिदर्शी निर्मातव्यः तर्हि स्फोरक-पत्रस्य क्षेत्रफलं कियता प्रमाणेन अपेक्षितं भवति ?

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ इति स्वीकुर्वन्तु ।

समाधानम् - दण्डगोलाकारस्य बहुमूर्तिदर्शिनः आधारस्य त्रिज्या $(r) = 3.5$ cm

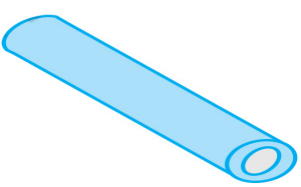
बहुमूर्तिदर्शिनः औन्नत्यम् अथवा दीर्घता $(h) = 25$ cms

अपेक्षितं स्फोरकपत्रस्य क्षेत्रफलम् = बहुमूर्तिदर्शिनः वक्रपृष्ठ-क्षेत्रफलम्

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25 \text{ cm}^2$

$= 550 \text{ cm}^2$



आकृतिः 13.10

प्रश्नावलिः 13.2

(यावत् न उक्तम्) $\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु

1. 14 cm-उन्नतस्य लम्बवृत्तीयदण्डगोलाकारस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् 88 cm^2। अस्य दण्डगोलाकारस्य आधारस्य व्यासम् अन्विषन्तु।
2. धातु-आस्तरेण 1 m उन्नतम् 140 cm मित-आधार-व्यासयुतं कञ्चन आवृत-दण्डगोलाकार-जलसञ्चिका निर्मातव्या अस्ति। एतदर्थम् कियता प्रमाणेन वर्ग-मीटर्-युतस्य आस्तरस्य आवश्यकता भवति ?
3. कश्चन धातु - नाली 77 cm मितं दीर्घा अस्ति। अस्य एकस्य अनुप्रस्थ-अनुच्छेदस्य अन्तर्व्यासः 4 cmमितः तथा बाह्यव्यासः 4.4 cmमितः अस्ति। (13.11 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अस्य



आकृतिः 13.11

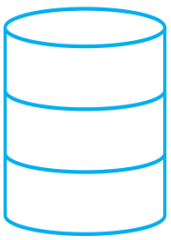
   (i) अन्तर्वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
   (ii) बाह्यवक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
   (ii) पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
4. कस्यचित् रोलर्- यन्त्रस्य व्यासः 84 cm मितः, दीर्घता 120 cm मिता च भवति। क्रीडाङ्गणं समस्थलीकर्तुम् एकवारं गन्तुं 500 परिभ्रमणमानि भवन्ति। अस्य क्रीडाङ्गणस्य क्षेत्रफलं m^2 इत्यस्मिन् अन्विषन्तु।
5. कस्यचन दण्डगोलाकारस्य स्तम्भस्य व्यासः 50 cm मितः, औन्नत्यं 3.5cm मितं च अस्ति। स्तम्भस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं वर्णलेपनं कर्तुं कियत् मूल्यं भवति - यदि प्रति m^2 रु.12.50/-भवन्ति ?
6. लम्ब-वृत्तीय-दण्डगोलाकारस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं 4.4 m^2 अस्ति। यदि दण्डगोलाकारस्य आधारस्य त्रिज्या 0.7 m भवति, तस्य औन्नत्यम् अन्विषन्तु।
7. वर्तुलाकारस्य वाप्याः अन्तर्व्यासः 3.5 m अस्ति। अस्य अगाधता 10 m अस्ति।
   (i) अस्य अन्तःपृष्ठीयक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
   (ii) प्रति m^2 रु.40 इत्यस्मिन् स्तरे पृष्ठक्षेत्रस्य आलेपनस्य मूल्यम्।
8. जल-उष्णीकरण-यन्त्रे 28 m दीर्घतायुता तथा 5 cmव्यासयुता काचन दण्डगोलाकार-नाली अस्ति। अस्य तन्त्रस्य विकिरणनिस्सारक-तलम् अन्विषन्तु।

9. अन्विषन्तु यत्

(i) 4.2m व्यासयुतस्य तथा 4.5 m उन्नतस्य कस्यचन आवृत्त-दण्डगोलाकार-इन्धन-रक्षण-नाल्याः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम्।

(ii) यदि नाल्याः निर्माणसमये अयसः द्वादशांशः भागः ($\frac{1}{12}$) व्यर्थः अभवत् , तर्हि अयः कियता प्रमाणेन उपयुक्तम्?

10. 13.12 तमायाम् आकृत्यां भवन्तः दीपच्छायायाः आबन्धं पश्यन्ति। अयम् अलङ्कारिक-वस्त्रेण आच्छादनीयः अस्ति। आबन्धस्य आधारव्यासः 20cm मितः तथा औन्नत्यं 30cm मितम् अस्ति। आबन्धस्य उपरि तथा अधः पुटीकरणार्म् 2.5 cm मिता सीमा दातव्या अस्ति । आबन्धम् आच्छादयितुं कियत् वस्त्रम् अपेक्षितं भवति ?



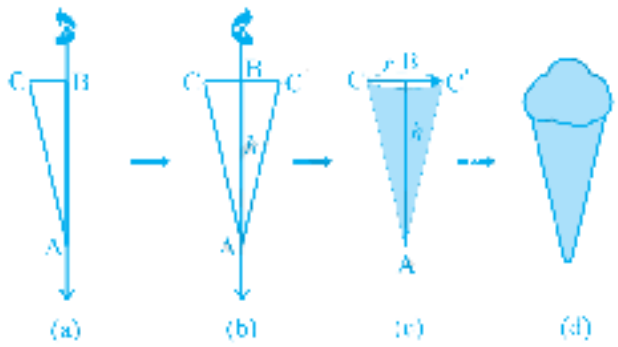
आकृतिः 13.12

11. स्थूलपत्रम् उपयुज्य दण्डगोलाकारेण लेखनीधराणाम् निर्माणस्य, तेषम् अलङ्कारस्य च स्पर्धायां कस्यचन विद्यालयलयस्य छात्राः भागं गृहीतवन्तः । प्रतिलेखनीधरस्यापि त्रिज्या 3cm मिता, तथा 10.5 cm मिता उन्नता अस्ति। विद्यालयेन प्रतिस्पर्धीभ्यः स्थूलपत्राणि दीयन्ते। यदि तत्र 35 प्रतिस्पर्धिनः सन्ति, स्पर्धायै कति स्थूलपत्राणि आनेतव्यानि भवन्ति ?

13.4 लम्ब-वृत्तीय-शङ्कोः पृष्ठक्षेत्रफलम्

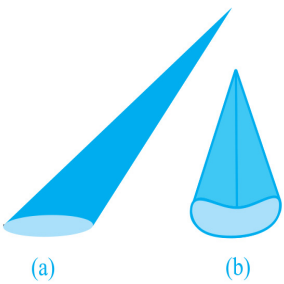
एतावत् पर्यन्तं सर्वाङ्गसमाकृतीनां क्रमबद्ध-प्रकारेण स्थापनेन घनपदार्थानां निर्माणं कुर्वन्तः आस्म । एतान् समपार्श्वान् वदामः । इदानीम् अन्यप्रकारकं घनपदार्थं पश्यामः यः समपार्श्वः नास्ति । (ईदृशाः घनपदार्थाः सूच्याकारस्तम्भाः इति उच्यन्ते। तान् कथम् प्राप्नुमः इति पश्यामः।

क्रियाकलापः - ABC इति समकोण-त्रिभुजं कर्तयन्तु यस्य B बिन्दौ समकोणः अस्ति। समकोणभुजयोः अन्यतमे भुजे(AB भवतु) दीर्घां, स्थूलां च तन्त्रीं लेपयन्तु। त्रिभुजस्य पार्श्वे अपि तन्त्रीं हस्तेन गृहीत्वा त्रिभुजं तन्त्र्यनुगुणं बहुवारं भ्रमयन्तु।किं भवति ? यदा तन्त्र्यनुगुणं त्रिभुजं भ्रमति तदा निर्मीयमाणम् आकारम् अभिजानन्ति वा ? (13.13 (b) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । एषः आकारः पूर्वंखादितं पयोहिमस्य पात्रस्य स्मारयति वा ? (13.13 (c) (d) आकृती पश्यन्तु)



आकृतिः 13.13

एषा आकृतिः लम्ब-वृत्तीय-शङ्कुः इति उच्यते। लम्बवृत्तीयशङ्कोः 13.3 (c) तमायाम् आकृत्यां A बिन्दुः- शीर्षः, AB औन्नत्यम्, BC त्रिज्या तथा AC तिर्यक् औन्नत्यम् इति उच्यन्ते। अत्र B वर्तुलाकारस्य आधारस्य मध्यबिन्दुः भवति । औन्नत्यम्, त्रिज्या तथा तिर्यक् औन्नत्यम् क्रमशः h, r, l इति सूच्यन्ते। पुनरेकवारं के शङ्कवः लम्बवृत्तीयशङ्कवः न इति पश्यामः । 13.14 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु। अस्यां आकृत्यां दृष्टाः सर्वेऽपि लम्बवृत्तीयशङ्कवः न सन्ति।

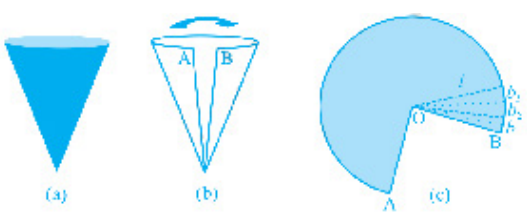


आकृतिः 13.14

यतः (a) आकृत्यां आधारस्य मध्यभागात् शीर्षपर्यन्तं योज्यमाना रेखा, आधारस्य समलम्बा नास्ति । (b) आकृत्याम् आधारः वर्कुलाकारे नास्ति। यथा दण्डगोलाकारे, तथा अत्रापि लम्ब-वृत्तीय-शङ्कोः विषये एव पठामः। अतः अस्मिन् अध्याये यावत् न उक्तं तावत् शङ्कुः चेत् लम्बवृत्तीयशङ्कुः एव।

क्रियाकलापः (i) यथा पत्रम् अतिव्याप्तं न स्यात्, तथा सम्यक् कृतं पत्रशङ्कुं कर्तयित्वा पत्रम् उद्घाटयन्तु। तदा यः पत्राकारः लभ्यते, सः शङ्कोः बाह्यपृष्ठभागः। (यस्याः रेखायाः अनुगुणं शङ्कुं कर्तितवान्, सा रेखा शङ्कोः तिर्यक्-औन्नत्यम् इति उच्यते।एतत् l इति सूच्यते। इदं वर्तुलाकार-मधुरपिष्टकभागवत् दृश्यते।

(ii) A, B इति अङ्कितभागौ अग्रभागं प्रति आनीतौ चेत् 13.5 (c) आकृतेः वक्रभागः शङ्कोः वर्तुलाकार-आधारः भवति इति पश्यामः।



आकृतिः 13.15

(iii) 13.5 (c) चित्रे दर्शितप्रकारेण, पत्रम् O बिन्दुतः चित्रित-रेखाभिः, शतशः भागैः कर्तितं चेत् , प्रत्येकं कर्तितखण्डः अपि प्रायः किञ्चित् त्रिभुजं भवति, यस्य औन्नत्यं शङ्कोः तिर्यक्-औन्नत्यम् एव।

(IV) इदानीं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = $(\frac{1}{2})$ × त्रिभुजस्य आधारः × l

अतः पत्रस्य पूर्णभागस्य क्षेत्रफलम्

= सर्वेषां अपि त्रिभुजानां योगः

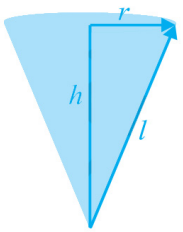
$$= \frac{1}{2} b_1 l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + \ldots = \frac{1}{2} l (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots..)$$

$$= \frac{1}{2} \times l \times [13.5 \text{ (c) आकृतेः पूर्ण-वक्र-सीमायाः दीर्घता}]$$

(यतः $b_1 + b_2 + b_3$ .....आकृतेः वक्रभागः भवति।)

किन्तु आकृतेः वक्रभागः शङ्कोः आधारस्य परिधिं परिनिर्माति, तथा शङ्कोः आधारस्य परिधिः तु = $2\pi r$ यत्र r शङ्कोः आधारस्य त्रिज्या अस्ति।

अतः **शङ्कोः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं तु $\frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$**



आकृतिः 13.16

यत्र r शङ्कोः आधारस्य त्रिज्या, l तिर्यक् औन्नत्यम् अस्ति।

अत्र अवलोकयन्तु यत् $l^2 = r^2 + h^2$ (13.16 आकृत्यां दर्शितप्रकारेण)

(पैथागोरस् प्रमेयस्य प्रयोगेन) ।अत्र h शङ्कोः औन्नत्यम् अस्ति।

अतः $l = \sqrt{(r^2 + h^2)}$

इदानीं शङ्कोः आधारः अपि आवरणीयः चेत् r इति त्रिज्यायुतं वर्तुलाकारं पत्रम् अपेक्षितं भवति यस्य क्षेत्रफलं πr^2।

अतः **शङ्कोः पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलं तु = $\pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$**

उदाहरणम् 4 : लम्बवृत्तीयशङ्कोः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु-यस्याः तिर्यक्-औन्नत्यम् 10 cm मितं तथा आधारत्रिज्या 7 cm मिता अस्ति।

समाधानम् - वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् = πrl

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ cm}^2$$

$$= 220 \text{ cm}^2$$

उदाहरणम् 5 : लम्बवृत्तीयशङ्कोः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् तथा पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्याः औन्नत्यम् 16 cm मितं तथा आधार-त्रिज्या 12 cm मिता च अस्ति। (π =3.14 इति उपयुज्य)

समाधानम् - अत्र h = 16 cm तथा r = 12cm

अतः $l^2 = h^2 + r^2$)

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ cm = 20 cm

अतः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् = πrl

$= 3.14 \times 12 \times 20$ cm^2

$= 753.6$ cm^2

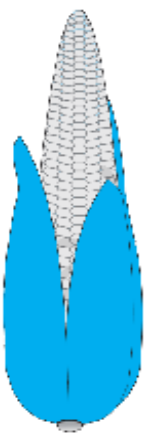
अग्रे पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम् = $\pi rl + \pi r^2$

$= 753.6 + 3.14 \times 12 \times 12$ cm^2

$= 753.6 + 452.16$ cm^2

$= 1205.76$ cm^2

उदाहरणम् 6 : कश्चित् धान्य-सङ्ग्रहः प्रायः शङ्क्वाकारः अस्ति यस्य विस्तारतमस्य अन्तस्य त्रिज्या 2.1 cmमिता , तथा दैर्घ्यम् (औन्नत्यम्) 20 cm मितम्। यदि 1 cm^2 इति क्षेत्रे प्रायः 4 धान्यानि सन्ति, तर्हि पूर्णधान्य-सङ्ग्रहे कति धान्यानि भवन्ति इति अन्विषन्तु।



आकृतिः 13.17

समाधानम् - यतः धान्यानि सङ्ग्रहस्य वक्रपृष्ठ क्षेत्रे मात्रं दृश्यते, अस्माभिः सङ्ग्रहस्य वक्रपृष्ठ क्षेत्रफलं ज्ञातव्यम् यस्मात् तत्र विद्यमाना पूर्णधान्यसंख्या ज्ञातुं शक्या। अस्मिन् प्रश्ने शङ्कोः औन्नत्यं दत्तम् अस्ति, अतः अस्माभिः तिर्यक्-औन्नत्यं ज्ञातव्यम्।

अतः $l = \sqrt{(r^2 + h^2)} = \sqrt{(2.1^2) + 20^2}$ cm

$= \sqrt{404.41}$ cm = 20.11cm

अतः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् = πrl

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ cm^2 = 132.726 cm^2 = 132.73 cm^2 (आसन्नम्)

1 cm^2 इति क्षेत्रे प्रायः विद्यमानानां धान्यानां सङ्ख्या = 4

अतः सङ्ग्रहस्य पूर्णपृष्ठक्षेत्रफले धान्यानां सङ्ख्या = 132.73 × 4 = 530.92 = 531 (आसन्नम्)

अतः सङ्ग्रहे आहत्य प्रायः 531 धान्यानि सन्ति।

प्रश्नावलिः 13.3

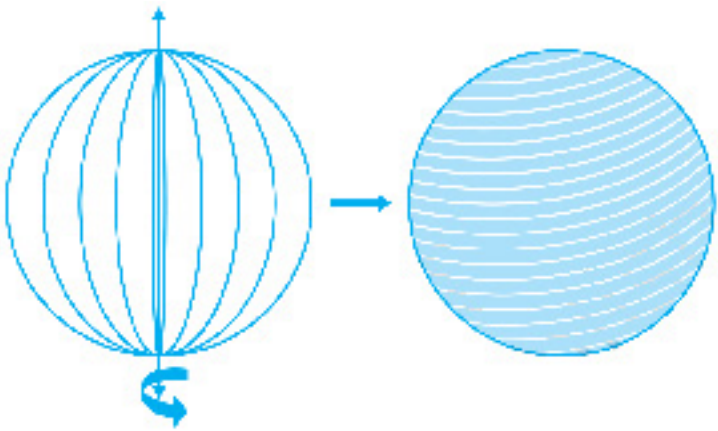
यावत् अन्यथा न उच्यते, $\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु

1. शङ्कोः आधारस्य व्यासः 10.5 cm मितः, तस्य तिर्यक्-औन्नत्यम् 10 cm मितम् । अस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु ।
2. शङ्कोः आधारस्य व्यासः 24 m मितः तथा तस्य तिर्यक्-औन्नत्यम् 21 m मितम् । अस्य पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु ।
3. शङ्कोः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं तु 308 cm^2 तथा तिर्यक्-औन्नत्यम् 14 cm.
   (i) आधारस्य त्रिज्याम् (ii) शङ्कोः पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलं च अन्विषन्तु ।
4. शङ्क्वाकार-पटगृहस्य 10 m औन्नत्यम् अस्ति, तथा आधार-त्रिज्या 24 m .
   (i) पटगृहस्य तिर्यक्-औन्नत्यम् अन्विषन्तु ।
   (ii) पटगृहं निर्मातुम् अपेक्षितस्य स्थूलपटस्य परिमाणम् अन्विष्न्तु - यदि 1 m^2 स्थूलपटस्य मूल्यम् रु.70/-
5. 3 m विस्तृतं टार्पालिन् उपयुज्य, 8 m उन्नतं, 6 m आधार-त्रिज्यायुतं शङ्क्वाकार-पटगृहं निर्मातुं टार्पालिन् कियता प्रमाणेन दीर्घं भवेत्? सीमां सीवयितुं तथा कर्तने व्यर्थं गतस्य प्राकृतिक-वस्तुनः दीर्घता प्रायः 20 cm इति कल्पयन्तु । ($\pi = 3.14$)
6. समाधि-शिलायाः तिर्यक्-औन्नत्यम् तथा आधार-व्यासः क्रमशः 25 m तथा 14 m स्तः । प्रति 100 m^2 रु.210 इति स्तरे अस्य वक्रपृष्ठफलस्य वर्ण-लेपनस्य मूल्यम् अन्विषन्तु ।
7. विदूषकस्य शिरस्त्राणं लम्ब-वृत्त-शङ्क्वाकारम् अस्ति यस्य आधार-त्रिज्या 7 cm मितम् तथा औन्नत्यम् 24 cm अस्ति । ईदृशं दश-शिरस्त्राणि कर्तुम् आस्तरस्य क्षेत्रफलं कियत् आवश्यकम् ?
8. कस्यचित् लोकयानस्य स्थानकं मार्गस्य अवशिष्ट-भागेभ्यः मार्गावरोधेन विभक्तम् अस्ति । सः मार्गावरोधः, पुनरुपयुक्त-स्थूलपत्र-निर्मितैः पञ्चाशत्(50) विवर-शङ्कुभिः निर्मितः अस्ति । प्रति-शङ्कोः आधार-व्यासः 40 cm मितः अस्ति तथा औन्नत्यम् 1 m । यदि प्रतिशङ्कोः बाह्य-भागे वर्णः लेपनीयः तथा वर्ण-लेपनस्य मूल्यम् प्रति m^2 रु.12, सर्वेषां शङ्कूनाम् वर्ण-लेपनम्य मूल्यं किं भवति ? ($\pi = 3.14$ तथा $\sqrt{1.04} = 1.02$) ।

13.5 गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलम्

गोलः नाम कः ? सः किं वर्तुलसमः वा ? वर्तुलं पत्रे चित्रयितुं शक्नुवन्ति ? आम् शक्यते, यतः वर्तुलं नाम काचन समतल-आवृत-आकृतिः यस्याः प्रत्येकं बिन्दुः कस्माच्चन नियत-बिन्दोः अचर-दूरे तिष्ठति । एषः अचर-दूरः

त्रिज्या इति उच्यते तथा नियत-बिन्दुः वर्तुलस्य मध्य-बिन्दुः अस्ति। इदानीं काञ्चन तन्त्रीं वर्तुल-चक्रिकायाः व्यासानुदिशं, पूर्वानुच्छेदे यथा, तथा भ्रामयन्ति चेत् एकं नूतनं घनपदार्थं पश्यन्ति। (13.18 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। सः कीदृशः अस्ति ? कन्दुकवत् एषः गोलः अस्ति।



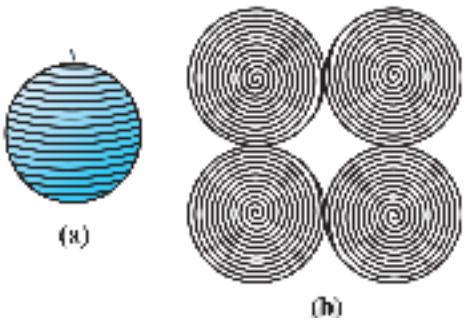
आकृतिः 13.18

भ्रमणेन यदा गोलः निर्मीयते वर्तुलस्य मध्यभागः किं भवति ? आम् सत्यम्, सः गोलस्य मध्यभागः भवति। अतः गोलः काचन त्रिविमीय-आकृतिः अस्ति या कस्माच्चित् नियतबिन्दोः अचरदूरे अवकाशे विद्यमानैः सर्वैः बिन्दुभिः निर्मितः अस्ति। तत् **अचर**-दूरं त्रिज्या इति उच्यते, नियतबिन्दुः च गोलस्य मध्यबिन्दुः इति उच्यते।

टिप्पणी - गोलः कन्दुकस्य तलवत् अस्ति। घनगोलः इति पदं तत्र प्रयुज्यते यत्र घनपदार्थस्य तलः गोलाकारे अस्ति।

क्रियाकलापः - भवन्तः परिभ्रमन्त्या भ्रामिकया सह क्रीडितवन्तः वा अथवा तस्याः क्रीडनं दृष्टवन्तः वा ? कथं तत्र तन्त्री बध्यते इति भवन्तः जानन्ति एव। इदानीम् रब्बर्-कन्दुकं स्वीकृत्य तत्र आणिं योजयाम। आणेः आधारेण कन्दुकं परितः तन्त्रीं योजयामः। सूचीनां साहाय्येन यथा तन्त्री स्वस्थानात् यथा न च्यवेत, तथा कन्दुकस्य पूर्णभागं तन्त्र्या आच्छादयाम। (13.19 (*a*) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) तन्त्र्याः आदिम् अन्त्यबिन्दुं च अङ्कयित्वा कन्दुकस्य तलात् तन्त्रीं मन्दं निर्वेष्टयन्तु।

इदानीं कन्दुकस्य व्यासं मापयितुम् अध्यापकस्य साहाय्यं पृच्छन्तु यस्मात् भवन्तः सरलतया त्रिज्यां ज्ञातुं शक्नुवन्ति। अग्रे, कन्दुकस्य त्रिज्यातुल्य-त्रिज्यायुक्तानि चत्वारि वर्तुलानि पत्रे चित्रयन्तु। यया तन्त्र्या भवन्तः कन्दुकं बद्धवन्तः तया एव तन्त्र्या एकैकम् अपि वर्तुलं मन्दं पूरयन्तु (13.19 (*a*) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 13.19

अनेन भवन्तः किं प्राप्तवन्तः?

या तन्त्री गोलस्य पूर्णं पृष्ठक्षेत्रफलम् आच्छादयत्, तया चतुर्णाम् अपि वर्तुलानां प्रदेशाः पूरिताः येषां सर्वेषां त्रिज्या गोलतुल्या आसीत्। अस्य कः अर्थः ? अनेन ज्ञायते यत् r इति त्रिज्यायुतस्य गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलम्

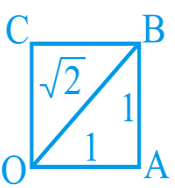
$= r$ इति त्रिज्यायुतस्य गोलस्य क्षेत्रफलस्य चतुर्गुणितम् $= 4 \times \pi r^2$

अतः **गोलस्यपृष्ठक्षेत्रफलं तु $= 4\ \pi\ r^2$**

यत्र r = गोलस्य त्रिज्या अस्ति।

गोलस्य तले कति मुखानि सन्ति ? एकम् एव मुखम् अस्ति यत् वक्रम् अस्ति।

इदानीं घनाकार-गोलं स्वीकृत्य साक्षात् मध्यभागद्वारा कर्तयामः, यथा मध्यबिन्दुः समतले स्यात्। गोलस्य किं भवति ?



आकृतिः 13.20

आम्, सः समभागद्वयेन विभज्यते। (13.20 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

प्रत्यर्धभागं किम् इति उच्यते ? सः **अर्धगोलः** इति उच्यते।

अर्धगोलस्य तलः किं भवति ? तस्य कति मूखानि सन्ति ?

द्वयम्। एकं तु वक्रमुखम् अन्यत् ऋजुमुखम्।

अर्धगोलस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलस्य अर्धं अस्ति। यत् $\frac{1}{2}(4\pi r^2$

अतः **अर्धगोलस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं तु $= 2\pi r^2$**

यत्र r तस्य गोलस्य त्रिज्या अस्ति, यस्य अर्धगोलः एकः भागः।

अर्धगोलस्य मुखद्वयं अपि स्वीकुर्मः चेत्, तस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् $2\pi r^2 + \pi r^2$

अतः **अर्धगोलस्य पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलं तु $= 3\pi r^2$**

उदाहरणम् 7 : 7 cm त्रिज्यायुतस्य गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु

समाधानम् - 7 cm त्रिज्यायुतस्य गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलं तु

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 616 \text{ cm}^2$$

उदाहरणम् 8 : 21 cm त्रिज्यायुतस्य अर्धगोलस्य

(i) वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु (ii) पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु

समाधानम् - (i) 21 cm त्रिज्यायुतस्य गोलस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं तु

$$2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

(ii) अर्धगोलस्य पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलं तु

$$3\pi r^2 = 3\ \pi \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$$

उदाहरणम् 9 : कश्चन विवर-गोलः, यत्र क्रीडाचक्र-द्विचक्र-चालकः स्वक्रीडां दर्शयति, अस्य व्यासः 7 m । द्विचक्र-चालनाय कियता प्रमाणेन क्षेत्रफलम् उपलभ्यम् अस्ति इति अन्विषन्तु ।

समाधानम् - गोलस्य व्यासः7 m । अतः त्रिज्या 3.5 m । अतः द्विचक्र-चालनाय उपलब्धः अवकाशः तु गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलतुल्यम् अस्ति । तत्तु

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$$

उदाहरणम् 10 : कस्यचन भवनस्य अर्धगोलीय-ऊर्ध्वभागः वर्णलेपनीयः अस्ति । (13.21 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । यदि अर्धगोलस्य आधार-परिधिः 17.6 m, तस्य वर्णलेपनस्य मूल्यम् अन्विषन्तु, यदि वर्ण-लेपन-मूल्यस्तरः प्रति 100 cm^2 रू.5 इति ।

समाधानम् - यतः अर्धगोलस्य वर्तुलाकार-तलः एव लेपनीयः अस्ति, अस्माभिः अर्धगोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलं ज्ञातव्यम् अस्ति येन कियत् पर्यन्तं वर्णः लेपनीयः इति अवगच्छामः । इदानीम् अर्धगोलस्य परिधिः 17.6 m ।

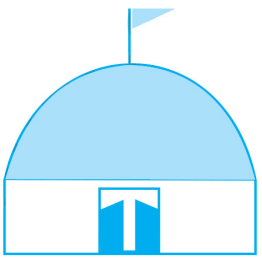
अतः $17.6 = 2\pi r$ ।

अतः अर्धगोलस्य त्रिज्या $r = \frac{17.6 \times 7}{2 \times 22}$ m = 2.8 m

अतः अर्धगोलस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$$

$$= 49.28 \text{ m}^2$$



आकृतिः 13.21

इदानीं वर्ण-लेपनस्तरः प्रति 100 cm^2 र. 5 इति

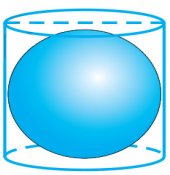
अतः 1 m^2 वर्णलेपनस्य मूल्यम् = रु.500

अतः समग्रस्य अर्धगोलस्य वर्णलेपनं कर्तुं रु. 500 × 49.28 = रु.24640

प्रश्नावलिः 13.4

$\pi = \frac{22}{7}$ यावत् अन्यथा न उक्तम्

1. अधोदत्ताभ्यः त्रिज्याभ्यः गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
   (i) 10.5 cms (ii) 5.6 cms (iii) 14 cms
2. अधोदत्तेभ्यः व्यासेभ्यः सन्ति गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
   (i) 14 cms (ii) 21 cms (iii) 3.5 m
3. 10 cm त्रिज्यायुतस्य अर्धगोलस्य पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। ($\pi = 3.14$ इति भवतु)
4. वायुगोले(बलून्) यदा वायुः पूर्यते, तदा तस्य त्रिज्या 7cm तः 14cmपर्यन्तं वर्धते। स्थितिद्वये अपि वायुगोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलस्य अनुपातं पश्यन्तु।
5. कांस्यनिर्मितस्य अर्धगोलीय-पात्रस्य व्यासः 10.5 cm। तस्य अन्तर्भागं त्रपुद्वारा आच्छादयितुं, प्रति-100 cm^2 रु.16 इति स्तरे मूल्यम् अन्विषन्तु।
6. 154 cm^2 पृष्ठक्षेत्रफलयुतस्य गोलस्य त्रिज्याम् अन्विषन्तु।
7. चन्द्रस्य व्यासः प्रायः पृथिव्याः व्यासस्य चतुर्थांशः अस्ति। तयोः पृष्ठक्षेत्रफलस्य अनुपातम् अन्विषन्तु।
8. अयसा निर्मितस्य अर्धगोलीय-पात्रस्य घनता 0.25 cm। तस्य अन्तस्त्रिज्या 5 cm अस्ति। तस्य पात्रस्य बाह्य-वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
9. लम्ब-वृत्त-दण्डगोलाकारे कश्चन गोलः अस्ति यस्य त्रिज्या r
   (13.22 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)
   (i) गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
   (ii) दण्डगोलाकारस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।
   (iii) उपरितने प्रश्नद्वये प्राप्तस्य क्षेत्रफलस्य अनुपातम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 13.22

13.6 आयतघनस्य घनफलम्

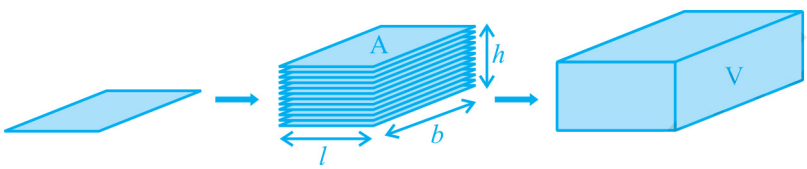
भवन्तः पूर्वतनवर्गेषु एव कासाञ्चन आकृतीनां घनफलान्वेषणं ज्ञातवन्तः सन्ति। स्मरन्तु यत् दृढपदार्थाः अवकाशं समाविशन्ति। अस्य समाविष्टस्य अवकाशस्य मापनम् एव वस्तुनः घनफलम् इति।

टिप्पणी - यदि वस्तु दृढम् अस्ति, तेन वस्तुना समाविष्टः अवकाशः माप्यते, तस्य नाम घनफलम इति उच्यते। अपर-स्थित्यां यदि वस्तु विवरभूतम् अस्ति तर्हि अन्तर्भागः रिक्तः भवति। तत्र वायुः अन्यद्रवं वा पूर्यते चेत् तत् तस्य पात्रस्य आकारं स्वीकरोति। अस्यां स्थित्यां वस्तुनः घनपलं यत् पात्रस्य अन्तर्भागं

पूरयितुं शक्नोति, तत् **पात्रस्य क्षमता** इत्युच्यते। सारांशेन, वस्तुनः घनफलम्, तेन समाविष्टः अवकाशः तथा वस्तुनः सङ्ग्रहणक्षमता एव तस्य अन्तर्भागेन पूर्यमाणः वस्तुनः घनफलम्। अतः उभयस्य अपि मापनस्य मात्रकं **घनमात्रकम्** एव।

अतः यदि आयतघनस्य घनफलस्य विषये वक्तुम् इच्छामः तर्हि तेन आयतघनेन समाविष्टस्य अवकाशस्य विषये चिन्तयामः।

अग्रे क्षेत्रपलम् अथवा घनफलम् कस्यचित् क्षेत्रस्य परिमाणस्य मापनम् अस्ति । अतः समीचीनपरिभाषया वक्तव्यं, चेत् वर्तुलक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम्, अथवा आयतघनक्षेत्रस्य घनफलम् अथवा गोलक्षेत्रस्य घनफलम् वा अन्विषामः इति वक्तव्यम्। किन्तु, सरलतायै वर्तुलस्य क्षेत्रफलम्, अथवा आयतघनस्य घनफलम् अथवा गोलस्य घनफलम् वा अन्विषन्तु इति वदामः यद्यपि एते, स्वेषां सीमाः एव सूचयन्ति।



आकृतिः 13.23

13.23 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु। प्रत्येकम् आयतस्य क्षेत्रफलम् A इति वदामः, यावदौन्नत्यपर्यन्तं आयतानि स्थापितानि तत् औन्नत्यं h इति स्वीकुर्मः, तथा आयतघनस्य घनफलम् V इति। V, A, h इत्येषां मध्ये सम्बन्धः कः इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा ?

प्रति आयतेन समाविष्टस्य तलक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् × औन्नत्यम्

= घनाभेन समाविष्टस्य अवकाशस्य मापनम्

अतः $A \times h = V$

अर्थात् **आयतघनस्य घनफलम् = आधारक्षेत्रफलम् × औन्नत्यम् = दीर्घता × विस्तारः × औन्नत्यम्**

$= l \times b \times h$

अथवा $l \times b \times h$, यत्र l, b , h क्रमशः आयतघनस्य दीर्घता, विस्तारः, औन्नत्यं च।

टिप्पणी - यदा कस्यचित् (घनपदार्थेन समाविष्टस्य) अवकाशस्य घनपरिमाणं मापयामः, तस्य मापनं एकमात्रकदीर्घधारायुतानां घनाकाराणां गणनेन, साधयामः। ते घनाकाराः तस्मिन् अवकाशे सम्यक्

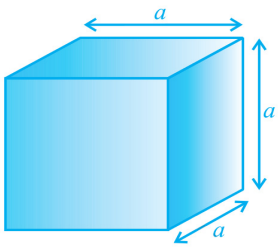
समाविशेयुः । अतः घनफलस्य मापनस्य मात्रकं तु घनमात्रकम् ।

पुनः, यत्र a घनस्य धारा अस्ति, (13.24 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

अतः **घनाकारस्य घनफलम् = धारा × धारा × धारा = a^3**

अतः घनाकारस्य धारा 12 cm मिता चेत्

घनाकारस्य घनफलम् = $12 \times 12 \times 12 = 1728$ cm^3



आकृतिः 13.24

स्मरन्तु यत् भवन्तः एतानि सूत्राणि पूर्वतनवर्गेषु एव अधीतवन्तः । एतेषां सूत्राणाम् उपयोगं ज्ञापयितुं कानिचन उदाहरणानि स्वीकुर्मः ।

उदाहरणम् 11 : कस्मिंञ्चित् उद्घाटिते क्षेत्रे 10 m युता भित्तिः निर्मातव्या । भित्तेः औन्नत्यम् 4 m तथा भित्तेः गाढता 24 cm । 24 cm × 12 cm × 8 cm विमायुताभिः इष्टिकाभिः भित्तिः निर्मीयते चेत् कति इष्टिकाः अपेक्षिताः भवन्ति ?

समाधानम् - यतः भित्तिः इष्टिकाभिः स्वेन समाविष्टम् अवकाशं पूरयति, अस्माभिः आयतघनायाः भित्तेः घनफलं ज्ञातव्यं भवति।

अत्र दीर्घता = 10 m = 1000 cm

गाढता = 24 cm

औन्नत्यम् = 4 m = 400 cm

अतः भित्तेः घनफलम् = दीर्घता × गाढता × औन्नत्यम्

$= 1000 \times 24 \times 400$ cm^3

इदानीं प्रति-इष्टिका अपि कश्चन आयतघनः यस्य दीर्घता = 12 cm, विस्तारः = 12 cm, औन्नत्यम् = 8 cm

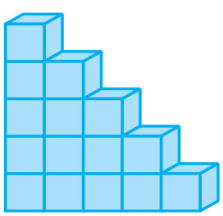
अतः इष्टिकायाः घनफलम् = दीर्घता × विस्तारः × औन्नत्यम्

$= 24 \times 12 \times 8$ cm^3

$$\text{अतः अपेक्षितानाम् इष्टिकानां सङ्ख्या} = \frac{\text{भित्तेः घनफलम्}}{\text{प्रत्येकम् इष्टिकायाः घनफलम्}}$$

$$= \frac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8} = 4166.6$$

अतः भित्तिः 4167 इष्टिकाः अपेक्षते ।


आकृतिः 13.25

उदाहरणम् 11 : कश्चन बालकः घनाकारैः भवन-निर्माण-सामग्रीभिः क्रीडति । सः 13.25 आकृत्यां दत्तप्रकारेण संरचनां निर्मितवान् अस्ति

।यदि प्रत्येकं घनाकारस्य धारा 3 cm, बालकेन निर्मितायाः संरचनायाः

घनफलम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - प्रत्येकस्य घनाकारस्य घनफलम् = धारा × धारा × धारा

$= 3 \times 3 \times 3\ cm^3 = 27cm^3$

संरचनायां विद्यमानानां घनाकाराणां सङ्ख्या = 15

अतः संरचनायाः घनफलम् = $27 \times 15\ cm^3 = 405$ cm3

प्रश्नावलिः 13.5

1. अग्निपेटिकायाः मापनं तु 4 cm × 2.5 cm × 1.5 cm। 12 पेटिकायुतस्य पोटलस्य घनफलम् किं भवति ?
2. आयतघनाकार-जल-सञ्चिका 6 m दीर्घा, 5 m विस्तृता, 4.5 m अगाधा च। तस्यां कति लिटर्-मितं जलम् समाविशति ?
3. आयतघनाकार-पात्रम् 10 m दीर्घं, 8 m विस्तृतं च। तस्मिन् 380 m^3 द्रवं संस्थापयितुं तत् कियत् अगाधं भवेत् ?
4. 8m दीर्घः, 6 m विस्तृतः तथा 3 m अगाधः आयतघनाकार-गर्तः खननीयः। तदर्थं प्रति m^3 रु.30 इति स्तरे मूल्यम् अन्विषन्तु।
5. कस्याश्चित् आयतघनाकार-जल-सञ्चिकायाः सामर्थ्यं 50000 लिटर्-मितम् अस्ति। यदि अस्याः दीर्घता, अगाधता च क्रमशः 2.5 m, 10 m च, तस्याः जल-सञ्चिकायाः विस्तारम् अवगच्छन्तु।
6. 4000 जन-सङ्ख्यायुतस्य ग्रामस्य प्रतिदिनम्, प्रतिजनस्यापि 150 लिटर्मितस्य जलस्य आवश्यकता अस्ति। 20 m × 15 m × 6 m मितं जल-सङ्ग्राहकं तत्र अस्ति। अस्य जल-सङ्ग्राहकस्य जलं कति दिनानि जलम् आपूरयति ?
7. कस्यचित् भाण्डागारस्य मापनम् 40 m × 25 m × 10 m। भाण्डागारे रक्षणयोग्यानां 1.5 m × 1.25 m × 0.5 m मापयुत-अधिकतमानां काष्ठपेटिकानां सङ्ख्याम् अन्विषन्तु।
8. 12 cm धारायुतः दृढघनाकारः समानघनफलयुतैः अष्टभिः भागैः विभक्तः अस्ति। नूतनस्य घनाकारस्य धारा का ? अपि च, तेषां पृष्ठक्षेत्रफलानां मध्ये अनुपातम् अन्विषन्तु।
9. 3 m अगाधा, 40 m विस्तृता नदी प्रतिघण्टां 2 kms वहति। समुद्रे प्रतिनिमेषं कियत् जलं निपतति ?

13.7 दण्डगोलाकारस्य घनफलम्

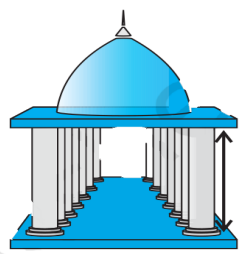
यथा आयतघनः समानाकारयुतैः आयतैः निर्मितः अस्ति तथैव लम्ब-वृत्त-दण्डगोलाकारः समानाकारयुतैः वर्तुलैः निर्मितः अस्ति इति दृष्टवन्तः । आयतघने प्रयुक्तया एव युक्त्या दण्डगोलाकारस्य घनफलम् अपि प्राप्तुं शक्नुमः । दण्डगोलाकारस्य घनफलम् = आधारक्षेत्रफलम् × औन्नत्यम्

= वर्तुलाकार-आधारक्षेत्रफलम् × औन्नत्यम् = $\pi r^2 h$

अतः **दण्डगोलाकारस्य घनफलम् = $\pi r^2 h$**

यत्र r =आधारक्षेत्रफलम्, h = औन्नत्यम् अस्ति ।

उदाहरणम् 13 : कस्यचित् मन्दिरस्य स्तम्भाः दण्डगोलाकारेण निर्मिताः । (13.26 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । यदि प्रत्येकं स्तम्भस्य वर्तुलाधारस्य त्रिज्या 20 cm, तथा औन्नत्यम् 10 m, तर्हि 14 स्तम्भान् निर्मातुं कियता प्रमाणेन काङ्क्रीट्-मिश्रणस्य अपेक्षा भवति ?



आकृतिः 13.26

समाधानम् - येन कांक्रीट्-मिश्रणेन स्तम्भ-निर्माणं कुर्मः, तत् एव स्तम्भस्य पूर्णावकाशं समाविशति । अत्र दण्डगोलाकाराणां घनफलम् अवगन्तव्यम् ।

दण्डगोलाकारस्य आधार-त्रिज्या = 20 cm

दण्डगोलाकार-स्तम्भस्य औन्नत्यम् = 10 m = 1000 cm

दण्डगोलाकारस्य घनफलम् = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ cm}^3$$

$$= \frac{8800000}{7} \text{ cm}^3$$

$$= \frac{8.8}{7} \text{ m}^3 \text{ (यतः } 1000000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ m}^3\text{)}$$

अतः 14 स्तम्भानां घनफलम् = प्रतिदण्डगोलाकारस्य घनफलम् × 14 = $\frac{8.8}{7} \times 14 \text{ m}^3$

= 17.6 m3

अतः 14 स्तम्भानां कृते 17.6 m^3 कांक्रीट् मिश्रणस्य आवश्यकता भवति ।

उदारणम् 14 : रम्जान् मेलायाम् भोजन-आपणेषु कस्यचन आपणिकस्य समीपे 15 cm आधार-त्रिज्यायुतं तथा 32 cm उन्नतं नारङ्ग-फलरस-पूरितं बृहत्-दण्डगोलाकार-पात्रम् अस्ति। तत् फलरसं लघु-दण्डगोलाकार-काचक-पात्रेषु पूरितम् अस्ति । (13.27 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । लघुपात्रं प्रत्येकं 3 cm त्रिज्यायुतं तथा 8 cm उन्नतम् अस्ति तथा प्रतिपात्रम् रु.3/ इति मूल्ये विक्रीयते । फलरसस्य पूर्णविक्रयणेन आपणिकः कियत् धनं प्राप्नोति ?



आकृतिः 13.27

समाधानम् - पात्रे विद्यमानस्य फलरसस्य घनफलम् = दण्डगोलाकारस्य पात्रस्य घनफलम्

$$= \pi R^2 H$$

(यत्र R तथा H क्रमशः पात्रस्य त्रिज्या तथा औन्नत्यम्)

$$= \pi \times 15 \times 15 \times 32 \text{ cm}^3$$

तथैव प्रतिपात्रेण पूर्यमाणं फलरसस्य घनफलम् = $\pi r^2 h$

(यत्र r तथा h क्रमशः पात्रस्य त्रिज्या तथा औन्नत्यम्)

$$= \pi \times 3 \times 3 \times 8 \text{ cm}^3$$

अतः विक्रीतानां फलरसपात्राणां सङ्ख्या

$$= \frac{\text{पात्रस्य घनफलम्}}{\text{प्रतिलघुपात्रस्य घनफलम्}}$$

$$= \frac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$$

$$= 100$$

आपणिकेन प्राप्तं धनम् = रु.3 × 100

= रु.300 /-

प्रश्नावलिः 13.6

$\pi = \frac{22}{7}$ यावत् अन्यथा न उक्तम्

1. दण्डगोलाकार-पात्रस्य आधार-परिधिः132 cm तथा औन्नत्यम् 25 cm । तत् कति लिटर्मितम् जलम् धरति ? (1000 cm^3 = 1l)

2. दण्डगोलाकार-काष्ठ-नाल्याः अन्तर्व्यासः 24 cm मितः तथा बाह्यव्यासः 28 cm मितः । नाल्याः दीर्घता 35 cm मिता ।नाल्याः द्रव्यमानम् अन्विषन्तु यदि 1 cm^3 काष्ठस्य 0.6g द्रव्यमानः अस्ति ।

3. मृदुपेयं पोटलद्वये उपलब्धम् अस्ति । (i) लोह-पात्रं यस्य दैर्घ्यं 5 cm, विस्तारः 4 cm, औन्नत्यं 15 cm च अस्ति । आधारः आयताकारः । (ii) कृत्रिम-दण्डगोलाकारः, यस्य वर्तुलाकारः आधारव्यासः 7 cm तथा औन्नत्यम् 10 cm । कस्य पात्रस्य अधिका धारिता, कियता प्रमाणेन?

4. दण्डगोलाकारस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् 94.2 cm^2 तथा औन्नत्यं 5 cm, तर्हि तस्य
   (i) आधार-त्रिज्याम् (ii) घनफलम् अन्विषन्तु ।

5. 10 m अगाधस्य दण्डगोलाकार-पात्रस्य अन्तर्वक्रपृष्ठक्षेत्रम् वर्णेन लेपयितुम् रु.2200 भवति । यदि वर्ण-लेपन-मूल्यस्य स्तरः प्रति m^2 रु.20, तर्हि एतानि अन्विषन्तु -
   (i) पात्रस्य अन्तर्वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम्
   (ii) आधार-त्रिज्या
   (iii) पात्रस्य सामर्थ्यम्

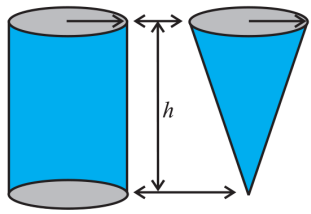
6. 1 m उन्नतस्य आवृतस्य दण्डगोलाकार-पात्रस्य सामर्थ्यं 15.4 लिटर्-मितम् । एतत् निर्मातुं धातु-आस्तरस्य कियत् m^2 प्रमाणम् अपेक्षितं भवति ?

7. काष्ठ-दण्डगोलेन निर्मितायाः अङ्कन्याः अन्तर्भागे लिखिजेन(gr*a*phite) निर्मितः घन-दण्डगोलाकारः अस्ति । अङ्कन्याः व्यासः 7 mm तथा लिखिजस्य व्यासः1 mm । यदि अङ्कन्याः दीर्घता 14 cm, तर्हि काष्ठलिखिजयोः घनफलम् अन्विषन्तु ।

8. कस्मिञ्चित् चिकित्सालये कस्मैचित् रुग्णाय 7 cm व्यासयुते दण्डगोलाकारे पात्रे सूपः दीयते । पात्रे यदि 4 cm उन्नतं सूपः पूरितः अस्ति, तर्हि 250 रुग्णेभ्यः दातुं चिकित्सालयेन कियता परिमाणेन सूपः निर्मातव्यः अस्ति ।

13.8 लम्ब-वृत-शङ्कुः

13.28 आकृत्यां भवन्तः समान-आधार-त्रिज्यायुतं तथा उन्नतं लम्ब-वृत-दण्डगोलाकारं तथा लम्ब-वृत-शङ्कुं च द्रष्टुं शक्नुवन्ति।



आकृतिः 13.28

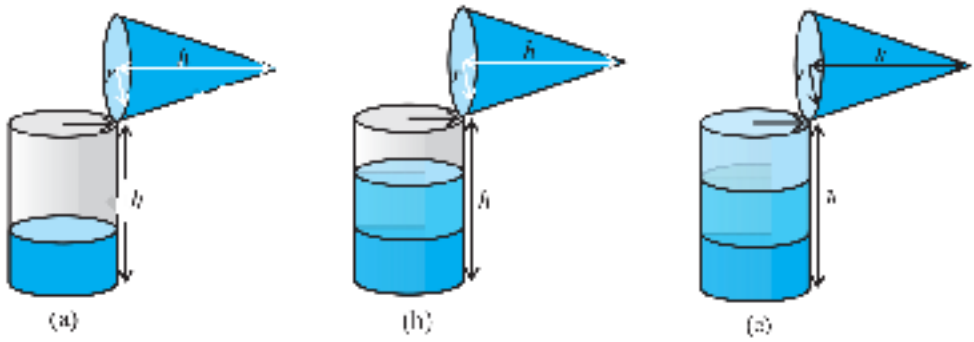
क्रियाकलापः - समान-आधार-त्रिज्यायुतं, समान-औन्नत्ययुतं विवर-दण्डगोलाकारं तथा विवर-शङ्कुं च कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु। 13.28 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु। लम्ब-वृत-शङ्कोः घनफलम् ज्ञातुं कञ्चन प्रयोगं कर्तुं प्रयत्नं कुर्मः।

इदानीम् एवम् आरम्भं कुर्मः।

शङ्कुं सिकताभिः एकवारं समतीर्थकं पूरयित्वा, ततः दण्डगोलाकारे पूरयतु। पश्यामः यत् दण्डगोलाकारस्य एकः भागः एव पूरितः अभवत्।

पुनरेकवारं समतीर्थकं शङ्कुं पूरयित्वा ततः दण्डगोलाकारे सम्पूरयतु, अवलोकयामः यत् दण्डगोलाकारः इतोऽपि पूरितः नास्ति। (13.29 (b) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

तृतीयवारं यदा शङ्कुं सम्पूर्य, ततःदण्डगोलाकारे पूर्यते तदा एव दण्डगोलाकारः अपि समतीर्थकं पूरितम् अभवत्। (13.29 (b) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 13.29

इतः दृढतया, एतं निष्कर्षं प्रति प्राप्नुमः यत् दण्डगोलाकारस्य घनफलम्, शङ्कोः घनफलस्य त्रिगुणितम् अस्ति, यदा द्वयोः अपि आधार-त्रिज्या तथा औन्नत्यं च समाने स्तः, अर्थात् शङ्कोः घनफलम् दण्डगोलाकारस्य घनफले तृतीयांशः अस्ति।

अतः **शङ्कोः घनफलम्** $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

यत्र r इति शङ्कोः आधार-त्रिज्या तथा h शङ्कोः औन्नत्यम्।

उदाहरणम् 15 : शङ्कोः औन्नत्यं तथा तिर्यक्-औन्नत्यं क्रमशः 21 cm मितं तथा 28 cm मितं। शङ्कोः घनफलम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - $l^2 = r^2 + h^2$ इत्यस्मात्

$$r = \sqrt{(l^2 - h^2)} = \sqrt{28^2 - 21^2)} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

अतः शङ्कोः घनफलम् $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^3$

$= 7546 \text{ cm}^3$

उदाहरणम् 16 : मोनिकायाः समीपे स्थूलपटस्य कश्चन भागः अस्ति यस्य क्षेत्रफलम् 551 m^2। सा तं पटं 7 m आधारत्रिज्यायुतं शङ्क्वाकारं-पटगृहं निर्मातुम् उपयुङ्क्ते। सीवन-सीमा तथा कर्तनसमये विद्यमाना व्यर्थता प्रायः 1 m^2 इति परिकल्प्य, अनया निर्मीयमाणस्य पटगृहस्य घनफलम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - यतः स्थूलपटस्य क्षेत्रफलम् = 551 m^2 तथा व्यर्थतां गतं स्थूलपटस्य क्षेत्रफलम् 1 m^2। अतः पटगृहं निर्मातुं विद्यमानः स्थूलपटः (551 - 1) m^2 = 550 m^2

पटगृहस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् = 550 m^2

शङ्क्वाकारस्य पटगृहस्य आधार-त्रिज्या = 7 m

अत्र अवगच्छन्तु यत् पटगृहस्य वक्रक्षेत्रम् एव भवति (पटगृहस्य भूतलम् स्थलपटेन आच्छादितं नास्ति।

अतः पटगृहस्य वक्रपृष्ठीयक्षेत्रफलम् = 550 m^2

अर्थात् $\pi rl = 550$

$$\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

अथवा $l = \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$

इदानीं $l^2 = r^2 + h^2$

अतः $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}$ m $= \sqrt{625 - 49)}$ m $= \sqrt{576}$ m

अतः शङ्क्वाकारस्य पटगृहस्य घनफलम् $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ m^3 = 1232 m^3

प्रश्नावलिः 13.7

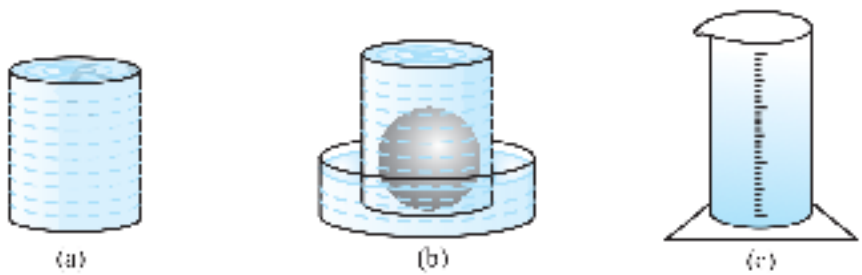
$\pi = \frac{22}{7}$ यावत् अन्यथा न उक्तम्

1. लम्ब-वृत्त-शङ्कोः घनफलम् अन्विषन्तु।
   (i) त्रिज्या 6 cm, औन्नत्यम् 7 cm (ii) त्रिज्या 3.5 cm, औन्नत्यम्12 cm
2. शङ्क्वाकारस्य पात्रस्य सामर्थ्यं लिटर्मात्रके अन्विषन्तु।
   (i) त्रिज्या 7 cm, तिर्यक्-औन्नत्यम् 25 cm
   (ii) तिर्यक्-औन्नत्यम् 13 cm, औन्नत्यम् 12 cm
3. शङ्कोः औन्नत्यम् 15 cm। यदि तस्य घनफलम् 1570 cm^3, आधार-त्रिज्याम् अन्विषन्तु।
4. 9 cm उन्नतस्य शङ्कोः घनफलम् 48 π cm3, तस्य आधार-व्यासम् अन्विषन्तु।
5. 12 m अगाधस्य शङ्क्वाकारस्य गर्तस्य उपरितनः व्यासः 3.5 m ।किलोलिटर्-माने तस्य सामर्थ्यं किम् ?
6. लम्ब-वृत्त-शङ्कोः घनफलम् 9856 cm^3, । तस्य आधार-व्यासः तु 28 cm। अन्विषन्तु-
   (i) शङ्कोः औन्नत्यम् (ii) शङ्कोः तिर्यक्-औन्नत्यम्
   (iii) शङ्कोः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम्
7. 5 cm, 12 cm तथा 13 cm भुजयुतं ABC समकोण-त्रिभुजं, 12 cm भुजानुदिशं परिभ्राम्यते। एवं प्राप्तस्य दृढपदार्थस्य घनफलम् अन्विषन्तु।
8. सप्तमे प्रश्ने ABC समकोण-त्रिभुजं, 5 cm भुजानुदिशं परिभ्राम्यते। एवं प्राप्तस्य दृढपदार्थस्य घनफलम् अन्विषन्तु। अपि च, सप्तमे अष्टमे प्रश्ने प्राप्तयोः दृढपदार्थयोः घनफलस्य अनुपातम् अन्विषन्तु।
9. गोधूमः शङ्क्वाकारे सञ्चितः अस्ति यस्य व्यासः 10.5 m तथा औन्नत्यम् 3 m .अस्य घनफलम् अन्विषन्तु। अयं सञ्चयः वृष्टेः रक्षणार्थम् स्थूलपटेन आच्छादितः भवेत्। अपेक्षितस्य स्थूलपटस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

13.9 गोलस्य घनफलम्

इदानीं गोलस्य घनफलम् कथं माप्यते इति पश्यामः। आदौ विविध-त्रिज्यायुक्तान् द्वित्रान् गोलान् स्वीकृत्य, तान् एकैकशः स्थापयितुं पर्याप्तं बृहत्पात्रं स्वीकुर्वन्तु। अपि च महतीं द्रोणीं स्वीकुर्वन्तु यत्र तत् पात्रं स्थापयितुं शक्यं स्यात्। अग्रे तत् पात्रे समतीर्थकं जलं पूरयन्तु। (13.30 (*a*) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

इदानीं जागरूकतया एकं गोलं पात्रस्य अन्तः स्थापयन्तु। पात्रात् किञ्चित् जलम् द्रोण्यां निपतति। (13.30 (b) तमाम् आकृतिं पशयन्तु)। जागरूकतया द्रोणीतः जलम् मापन-दण्डगोलाकारे पातयन्तु (अर्थात् अङ्कितः मापन-कुम्भः) तथा तत् निपतितं जलम् मापयन्तु। निमग्नस्य गोलस्य त्रिज्या r इति स्वीकुर्मः (व्यासस्य मापनात् त्रिज्यां ज्ञातुं शक्नुवन्ति)। अग्रे $\frac{4}{3}\pi r^3$ परिकलयन्तु। किम् एतत् मानं निपतित-जलस्य घनफलासन्नं दृश्यते वा ?



आकृतिः 13.30

पुनरेकवारम् एतां सद्यःकृतां प्रक्रियाम् आवर्तयन्तु। अस्य गोलस्य त्रिज्याम् R अन्विषन्तु तथा $\frac{4}{3}\pi R^3$ परिकलयन्तु। पुनरेकवारम् एतत् मानं गोलेन निसारितस्य जलस्य घनफलतुल्यम् अस्ति। (गोलेन आप्लुतं जलम्)। अनेन किं ज्ञायते ? गोलेन निरस्तस्य जलस्य घनफलम् तस्य गोलस्य घनफलतुल्यम् अस्ति। एतं प्रयोगं विविधैः त्रिज्यायुतैः गोलैः आवृत्तिं कुर्मः चेत् समानं परिणामं प्राप्नुमः अर्थात् गोलस्य घनफलम् तत् त्रिज्यायाः घनस्य $\frac{4}{3}\pi$ गुणितम् अस्ति।

अनेन ज्ञायते यत्

$$\text{गोलस्य घनफलम्} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

यत्र r इति गोलस्य त्रिज्या अस्ति।

अग्रे, उच्चकक्ष्यासु अस्य निरूपणम् अपि कर्तुं शक्नुमः। किन्तु इदानीम् एतत् सत्यम् इत्येव

भावयामः ।

यतः अर्धगोलः गोलस्य अर्धभागः अस्ति, अर्धगोलस्य घनफलं किम् इति भवन्तः परिकल्पयितुं शक्नुवन्ति ? आम् $\frac{4}{3}\pi r^3$ इत्यस्य अर्धम् अस्ति अर्थात् $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$

अतः **अर्धगोलस्य घनफलम्** $= \frac{2}{3}\pi r^3$

यत्र r इति अर्धगोलस्य त्रिज्या अस्ति ।

इदानीम् एतानि सूत्राणि विवरीतुम् उदाहरणानि स्वीकुर्मः ।

उदाहरणम् 17 : 11.2 cm त्रिज्यायुतस्य गोलस्य घनफलम् अन्विषन्तु ।

समाधानम् - अपेक्षितं घनफलम् $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ cm}^3 = 5887.32 \text{ cm}^3$$

उदाहरणम् 18 : धातुना कृतः कन्दुकविशेषः गोलाकारे अस्ति यस्य त्रिज्या 4.9 cm अस्ति । यदि धातोः घनता प्रति cm^3 7.8 g भवति, अस्य कन्दुक-विशेषस्य द्रव्यमानम् अन्विषन्तु ।

समाधानम् - यतः कन्दुकविशेषः धातुना कृतः दृढः गोलः, तथा अस्य द्रव्यमानं तत् घनफलघनतयोः गुणनफलम् अस्ति, अस्माभिः गोलस्य घनफलम् अन्वेष्टव्यम् ।

गोलस्य घनफलम् $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$$

$$= 493 \text{ cm}^3 \text{ (प्रायः)}$$

धातोः घनता प्रति cm^3 7.8 g भवति,

अतः कन्दुक-विशेषः $= 7.8 \times 493$ g

$$= 3845.44\text{g} = 3.85 \text{ kg (प्रायः)}$$

उदाहरणम् 19 : अर्धगोलाकारस्य पात्रस्य 3.5 cm त्रिज्या अस्ति । अनेन धर्तुं शक्यस्य जलस्य घनफलम् किम् ? ।

समाधानम् - पात्रेण धर्तुं शक्यस्य जलस्य घनफलम्

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3 = 89.8 \text{ cm}^3$$

प्रश्नावलिः 13.8

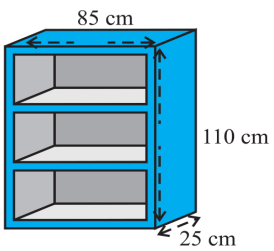
$$\pi = \frac{22}{7} \text{ यावत् अन्यथा न उक्तम्}$$

1. गोलस्य घनफलम् अन्विषन्तु यस्य त्रिज्या तु
   (i) 7 cm (ii) 0.63 m
2. दृढ-गोलाकार-कन्दुकेन निरस्थस्य जलस्य परिमाणम् अन्विषन्तु यदि अस्य व्यासः
   (i) 28 cm (ii) 0.21 m
3. धातुना कृतस्य कन्दुकस्य व्यासः 4.2 cm मितः । यदि धातोः घनता प्रति cm^3 8.9 g, तर्हि कन्दुकस्य द्रवमानम् अन्विषन्तु ।
4. चन्द्रस्य व्यासः पृथिव्याः व्यासस्य चतुर्थांशः अस्ति । चन्द्रस्य घनफलं पृथिव्याः घनफलस्य कस्मिन् अनुपाते अस्ति ?
5. 10.5 cm व्यासयुतम् अर्धगोलाकारं पात्रम् कियत् लिटर्परिमितं दुग्धं धर्तुं शक्नोति ?
6. कश्चन अर्धगोलाकारं विचक्रं 1 cm गाढः लोह-आस्तरेण निर्मितम् अस्ति । यदि अस्य अन्तर्त्रिज्या 1 m, विचक्रं निर्मातुम् उपयुज्यमानस्य लोहस्य घनफलम् अवगच्छन्तु ।
7. 154 cm^2 पृष्ठक्षेत्रफलयुतस्य गोलस्य घनफलम् अन्विषन्तु ।
8. कस्यचित् भवनस्य ऊर्ध्वभागः अर्धगोलाकारे अस्ति । रु. 498.96 इति मूल्ये अन्ततः सः वर्णलेपितः अभवत् । यदि वर्णलेपनस्य मूल्य-स्तरः प्रति m^2 रु. 2, अन्विषन्तु यत्
   (i) ऊर्ध्वभागस्य अन्तःपृष्ठक्षेत्रफलम् (ii) ऊर्ध्वभागस्य अन्तर्वायोः घनफलम्
9. *r* इति त्रिज्यायुतान् तथा S इति पृष्ठक्षेत्रफलयुतान् सप्तविंशतिं दृढ-लोह-गोलान् विद्राव्य S' इति पृष्ठक्षेत्रफलयुतः गोलः निर्मातव्यः । अन्विषन्तु यत्
   (i) नूतनस्य गोलस्य r' इति त्रिज्या (ii) S तथा S' इत्यनयोः अनुपातः

10. कस्यचित् औषधस्य बीजकोषः 3.5 mm मिते व्यासयुते गोलाकारे अस्ति । एतं बीजकोषं पूरयितुं कियत् औषधम् (mm^3) आवश्यकं भवति ?

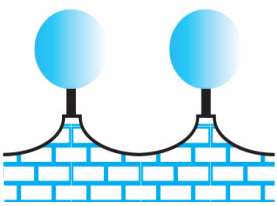
प्रश्नावलिः 13.9 (विकल्पेन)

1. कस्याश्चन पुस्तक-कपाटिकायाः बाह्य-विमाः अधोदत्ताः सन्ति औन्नत्यम् 110 cm, अगाधता 25 cm, विस्तारः 85 cm (13.31 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । सर्वत्र फलकस्य गाढता 5 cm एव । बाह्यमुखानि उन्मार्जनीयानि, अन्तर्मुखानि वर्णेन लेपनीयानि । यदि उन्मार्जनस्य मूल्य-स्तरः प्रति cm^2 20 पैसाः तथा वर्णलेपनस्य मूल्य-स्तरः प्रति cm^2 10 पैसाः, तर्हि पुस्तक-निधानिकायाः पृष्ठक्षेत्रम् उन्मार्जयितुं तथा वर्ण-लेपयितुं पूर्णमूल्यम् अन्विषन्तु ।



आकृतिः 13.31

2. कस्यचित् गृहस्य पुरतः विद्यमाना भवन-भित्तिः 21 cm व्यासयुतैः लोहमयैः गोलैः अलङ्कृता अस्ति । एते गोलाः 13.32 आकृत्यां दर्शितप्रकारेण लघु-आधारेषु स्थापिताः सन्ति । ईदृशाः अष्ट-गोलाः एतदर्थम् उपयुक्ताः, तथा ते रजत-वर्णेन लेपनीयाः । प्रति-आधारः अपि दण्डगोलाकारः 1.5 cm आधारयुतः, 7 cm उन्नतः तथा कृष्ण-वर्णेन लेपनीयः । प्राञ्जनस्य मूल्यम् अन्विषन्तु यदि रजत-प्राञ्जनस्य मूल्य-स्तरः प्रति cm^2 25 पैसाः तथा कृष्ण-प्राञ्जनस्य मूल्य-स्तरः प्रति cm^2 5 पैसाः ।


आकृतिः 13.32

3. गोलस्य व्यासः 25 प्रतिशतम् ह्रासः अभवत् । तस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलं कियता प्रतिशतेन न्यूनं भवति ?

13.10 सारांशः

1. **आयतघनस्य पृष्ठक्षेत्रफलम्** = $2(lb + bh + hl)$
2. **घनाकारस्य पृष्ठक्षेत्रफलम्** = $6a^2$
3. **दण्डगोलाकारस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम्** = $2\pi rh$
4. **दण्डगोलाकारस्य पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम्** = $2\pi r(r + h)$
5. **शङ्कोः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम्** = πrl

6. **लम्ब-वृत्त-शङ्कोः वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम्** = $\pi rl + \pi r^2 = \pi r\,(l + r)$
7. ***r* त्रिज्यायुतस्य गोलस्य पृष्ठक्षेत्रफलम्** = $4\pi r^2$
8. **अर्धगोलस्य वक्रपृष्ठक्षेत्रफलम्** = $2\pi r^2$
9. **अर्धगोलस्य पूर्णपृष्ठक्षेत्रफलम्** = $3\pi r^2$
10. **आयतघनस्य घनफलम्** = $l \times b \times h$
11. **घनाकारस्य घनफलम्** = a^3
12. **दण्डगोलाकारस्य घनफलम्** = $\pi r^2 h$
13. **शङ्कोः घनफलम्** = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
14. **r त्रिज्यायुतस्य गोलस्य घनफलम्** = $\frac{4}{3}\pi r^3$
15. **अर्धगोलस्य घनफलम्** = $\frac{2}{3}\pi r^3$

[अत्र *l, b, h, a, r* इत्यादीनि अक्षराणि सन्दर्भानुगुणं सामान्यार्थे एव प्रयुक्ताः सन्ति]

अध्यायः 14

सङ्ख्याशास्त्रम्

14.1 प्रस्तावना

प्रतिदिनम् वयं अनेकाः वार्ताः पठामः याः तथ्यरूपेण,सङ्ख्यारूपेण,कोष्ठकरुपेण आलेखरूपेण वा वर्तन्ते । एताः वार्ताः दिनपत्रिकाभिः वा दूरदर्शनैः वा सञ्चिकाभिः वा अन्य सञ्चारमाध्यमैः वा प्राप्यन्ते । एताः वार्ताः क्रिकेट्-क्रीडायां कन्दुकताडनस्य, कन्दुकक्षेपणस्य वा माध्यकविषये ,कस्याश्चित् संस्थायाः लाभानां विषये, नगराणां तापमानस्य विषये पञ्चवर्षीय योजनायां विविध-विभागेषु कृतः व्ययः, निर्वाचन परिणामाः च भवितुम् अर्हन्ति । एते तथ्यरूपेण वा अंशरूपेण वा सङ्ख्यारूपेण वा अन्यथा वा, निश्चितप्रयोजनार्थम् सङ्गृहीतः अंशः दत्तांशः (D*ata*) इति उच्यते । D*ata* (दत्तांशः) इति पदम् ल्याटिन्-भाषायाः निष्पादितं पदम् । सत्यम्, दत्तांशः इति पदम् भवतां कृते नूतनं नास्ति । भवन्तः पूर्वतनवर्गेषु एव दत्तांशविषये, तत् उपयुज्य कार्यकरणं च पठितवन्तः ।

अस्माकं लोकः अधिकाधिकतया वार्ताकेन्द्रितः जायमानः अस्ति । अस्माकं जीवनस्य प्रत्येकं भागः दत्तांशं एकस्मिन् वा अन्यरूपे वा उपयोगं कुर्वन् अस्ति । अतः अस्माभिः दत्तांशात् अर्थपूर्णा वार्ता कथं निष्पादनीया इति ज्ञानं बहु-महत्वपूर्णम् अस्ति । अर्थपूर्ण-वार्तायाः निष्पादनं तु गणितस्य पृथक् विभागे अधीयते, सः विभागः सङ्ख्याशास्त्रम्(St*a*tistics) इति उत्यते ।

St*a*tistics(सङ्ख्याशास्त्रम्) इति पदम् ल्याटिन्-पदम् St*a*tus इत्यस्मात् निष्पन्नम् अस्ति । अस्य मूलार्थः "(politic*a*l)st*a*te" अर्थात् (राजकीय) राज्यम् । आदौ, सङ्ख्याशास्त्रं नाम राज्योपयोगीनां जनानां

जीवन-सम्बद्धानां विविधांशानां सङ्ग्रहः इति आसीत् । कालक्रमेण अस्य व्याप्तिः विस्तृता इति कारणेन सङ्ख्याशास्त्रस्य प्रयोगः न केवलं दत्तांशानां सङ्ग्रहे तथा प्रस्तुतौ, अपि तु तेषां अर्थव्याख्याने तथा तेभ्यः अनुमानप्राप्तौ अपि आसीत् । सङ्ख्याशास्त्रम् नाम दत्तांशानां सङ्ग्रहः, सङ्घटीकरणम्, विश्लेषणम् तथा तेषां व्याख्यानम् । सङ्ख्याशास्त्रम् इति पदस्य विविधेषु सन्दर्भेषु विविधाः अर्थाः सन्ति । अधोदत्तानि वाक्यानि अवलोकयामः ।

1.'भारतीय-शैक्षणिक-दत्तांशः' इत्यस्य नूतनाम्-प्रतिकृतिं प्राप्तुं शक्नोमि वा ?

2.अहं सङ्ख्याशास्त्रं पठितुं इच्छामि यतो हि तस्य उपयोगः दैनन्दिन जीवने अस्ति ।

प्रथमे वाक्ये सङ्ख्याशास्त्रम् बहुवचनार्थे उपयुक्तः अस्ति यस्य अर्थः सङ्खयात्मकः दत्तांशः इति । अत्र भारते विद्यमानाः बह्व्यः शैक्षणिक-संस्थाः, बहूनां राज्यानां साक्षरता-स्तरः इत्यादयः अन्तर्भवन्ति । द्वितीये वाक्ये सङ्ख्याशास्त्रम् पदम् एकवचने उपयुक्तः अस्ति । अस्य अर्थः तु दत्तांशानां सङ्ग्रहः, प्रस्तुतिः, विश्लेषणम् , दत्तांशेभ्यः अर्थ-निष्कर्षः ।

अस्मिन् अध्याये दत्तांश-सम्बद्धान् सर्वान् अंशान् चर्चयामः ।

14.2 दत्तांशानां सङ्ग्रहः

दत्तांशानां सङ्ग्रहविषये अधोदत्तं क्रियाकलापं कृत्वा अभ्यस्यामः ।

प्रथमः क्रियाकलापः - भवतां कक्ष्यायाः छात्रान् चतुर्षु गणेषु विभजन्तु । प्रतिगणाय अधोदत्तेषु कार्येषु किमपि एकं प्रकारकं दत्तांश-सङ्ग्रह-कार्यम् ददतु –

(i) भवतां कक्ष्यायाः विंशति-छात्राणां औन्नत्यम् ।

(ii) भवतां वर्गे एकस्य मासस्य कृते प्रतिदिनं अनुपस्थितानां सङ्ख्या ।

(iii) भवतां सह-पाठीनां कुटुम्बे विद्यमानानां सदस्यानां सङ्ख्या ।

(iv) भवतां विद्यालयं परितः विद्यमानानां 15 सस्यानां उन्नतता ।

छात्रैः सङ्गृहीतान् परिणामान् प्रति गच्छामः । प्रतिगणे अपि कथम् दत्तांश-सङ्ग्रहणं कृतवन्तः ?

(i) ते किं वार्तानिमित्तं तत्सम्बद्धात् प्रत्येकं अपि छात्रात् वा गृहात् वा व्यक्तेः वा वार्तां सङ्गृहीतवन्तः ?

(ii) ते किं वार्ताः सर्वाः अपि उपलब्धेभ्यः विद्यालय-अभिलेखेभ्यः स्वीकृतवन्तः ?

प्रथम स्थित्यां यदा वार्ता स्वयं गवेषकेन केनचित् स्वमनसि निश्चित-उद्देशेन सङ्गृह्यते तादृशः दत्तांशः प्राथमिकः दत्तांशः इति उच्यते ।

द्वितीयायां स्थित्यां यदा दत्तांशः तादृशात् स्रोतात् सङ्गृहीतः यत्र पूर्वमेव वार्ताः रक्षिताः सन्ति,

सः दत्तांशः गौणः दत्तांशः इति उच्यते । ईदृशाः दत्तांशाः ये अन्यैः कैश्चित् भिन्नेषु सन्दर्भेषु सङ्गृहीताः ते जागरूकतया, तेषां नैजतां परिशील्य उपयोक्तव्याः ।

एतावता भवन्तः कथम् दतांशाः सङ्गृहीतव्याः इति, प्राथमिक-गौण-दत्तांशानां मध्ये विद्यमानान् भेदान् च अवगतवन्तः स्युः ।

प्रश्नावलिः 14.1

1. भवतां दैनन्दिन-जीवनात् सङ्ग्रहीतुं शक्यानां दत्तांशानां पञ्च उदाहरणानि यच्छन्तु ।
2. प्रथमे प्रश्ने विद्यमानान् दत्तांशान् प्राथमिकः वा गौणः वा इति वर्गीकुर्वन्तु ।

14.3 दत्तांशस्य प्रस्तावना

यदा दत्तांशानां सङ्ग्रहः समाप्यते, तदा गवेषकेण यथा ते अर्थपूर्णाः, सरलतया अवगन्तुं शक्याः, मुख्यांशाः च अवलोकनमात्रेण दृष्टिगोचराः यथा भवेयुः तथा प्रस्तावना करणीया । इदानीं कैश्चित् उदाहरणैः विविध-प्रकारेण दत्तांशानां प्रस्तावना-प्रकारं स्मरामः ।

उदाहरणम् 1 : गणित-परीक्षायां 10 छात्रैः प्राप्तान् अङ्कान् अधोदत्तप्रकारेण स्वीकुर्मः ।

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

एतद्रूपाः दत्तांशाः असंस्कृत-दत्तांशाः इति उच्यन्ते ।

ईदृशं दृष्ट्वा भवन्तः उच्चतमं, न्यूनतमं वा अङ्कम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ?

उच्चतमन्यूनतम-अङ्कान् अन्वेष्टुं किञ्चित्-समयं स्वीकृतवन्तः वा ? एते अङ्काः आरोहणक्रमेण वा अवरोहणक्रमेण वा स्थाप्यन्ते चेत् अङ्कान् अन्वेष्टुं न्यूनतरः समयः भवति किल ? इदानीं वयं आरोहणक्रमेण अङ्कान् लिखामः

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

इदानीं वयं स्पष्टतया पश्यामः यत् न्यूनतमः अङ्कः 25, उच्चतमः अङ्कः च 95 इति । दत्तांशेषु उच्चतमस्य, न्यूनतमस्य मानस्य च मध्ये विद्यमानः अन्तरः दत्तांशस्य व्याप्तिः इति उच्यते । अतः अस्यां स्थित्यां व्याप्तिः 95 - 25 = 70 इति ।

आरोहणक्रमेण वा अवरोहणक्रमेण वा दत्तांशानां प्रस्तुतिः कञ्चित् समयं स्वीकुर्यात्, विशेषतया यदा अवलोकनानां सङ्ख्या अधिका जायते तदा - यथा अग्रिमे उदाहरणे पश्यामः ।

उदाहरणम् 2 : नवमी कक्ष्यायां 30 छात्रैः प्राप्तान् अङ्कान् (शताङ्कानां कृते) वयं स्वीकुर्मः ।

10 20 36 92 95 40 50 56 60 70
92 88 80 70 72 70 36 40 36 40

92 40 50 50 56 60 70 60 60 88

अत्र स्मरन्तु यत् ये छात्राः निर्दिष्ट-संख्याकम् अङ्कं प्राप्तवन्तः, तेषां छात्राणां सङ्ख्या तदङ्कानां आवृत्तिः इति उच्यते । उदा. चत्वारः छात्राः 70 अङ्कान् प्राप्तवन्तः ।अतः 70 अङ्कानां आवृत्तिः 4 अस्ति । एतं दत्तांशं इतोऽपि स्पष्टीकर्तुं अधोदत्त-कोष्ठक-रूपेण लिखामः ।

कोष्ठकम् 14.1

अङ्काः	**छात्राणां सङ्ख्या (अर्थात् आवृत्तिः)**
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
पूर्णसङ्ख्या	**30**

14.1 तमं कोष्ठकम् अवर्गीकृत-आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकम् अथवा आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकम् इति उच्यते । अत्र अवगच्छन्तु यत् भवन्तः अग्रिमे उदाहरणे दत्तप्रकारेण कोष्ठक-निर्माणसमये परीक्षणचिह्नान् अपि उपयोक्तुं शक्नुवन्ति ।

उदाहरणम् 3 : वनमहेत्सवे 100 विद्यालयेषु,प्रति विद्यालयम् 100 सस्यानि आरोपितानि । एक-मासात् परं इतोऽपि जीवतां सस्यानां सङ्ख्या एवं प्रकारेण अभिलिखिता -

95 67 28 32 65 65 69 33 98 96

76 42 32 38 42 40 40 69 95 92

75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

ईदृशं अधिक-सङ्ख्यायुतं दत्तांशं यथा वाचकः सरलतया अवगन्तुं शक्नुयात् तथा प्रस्तौतुम्, वयं एतान् अंशान् लघुगणेषु 20-29, 30-39, ..., 90-99 इति विभज्य दर्शयामः (यतः अस्माकं दत्तांशः 23 इत्यस्मात् 98 पर्यन्तम् अस्ति) एतान् लघु गणान् वर्गः अथवा वर्ग-अन्तरालः इति कथयामः तथा एतेषां वर्गाणां मापं वर्ग-व्याप्तिः अथवा वर्ग-विस्तारः इति कथयामः । अस्यां स्थित्याम् वर्गव्याप्तिः तु 10 अस्ति । प्रत्येकस्मिन् अपि वर्गे न्यूनतमा सङ्ख्या अधोमितिः इति उच्यते तथा उच्चतमा सङ्ख्या उच्चमितिः इति उच्यते । उदा. 20-29 अन्तराले 20 इति अधोमितिः अस्ति तथा 29 इति उच्चमितिः चास्ति ।

अपि च ,स्मरन्तु यत् परीक्षणचिह्नानि उपयुज्य उपरितनं दत्तांशं कोष्ठकरूपेण लेखितुं शक्नुमः ।

कोष्ठकम् 14.2

अतिजीवितानां सस्यानां सङ्ख्या	अङ्क गणना	विद्यालयानां सङ्ख्या (आवृत्तिः)
20 - 29	𝍸	3
30 - 39	𝍸 𝍸 𝍸	14
40 - 49	𝍸 𝍸 𝍷	12
50 - 59	𝍸 𝍸	8
60 - 69	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	18
70 - 79	𝍸 𝍸	10
80 - 89	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	23
90 - 99	𝍸 𝍸 𝍷	12
पूर्णसङ्ख्या		**100**

एवंप्रकारेण दत्तांशानां प्रस्तावनेन सः सरलीकृतः, संक्षिप्तः च दृश्यते येन मुख्यांशाः अवलोकनेन एव ज्ञातुं शक्याः भवन्ति । अस्य नाम वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकम् इति । अत्र वयं सरलतया पश्यामः यत् 50% अथवा अधिकानि सस्यानि 8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71 विद्यालयेषु जीवन्ति इति ।

वयं अवलोकयामः यत् उपरितने कोष्ठके वर्गाः अनतिव्यापिनः सन्ति । अत्र अवगच्छन्तु यत् न्यूनमापयुतान् अधिकान् वर्गान् अथवा अधिकमापयुतान् न्यूनान् वर्गान् कर्तुं शक्तवन्तः स्याम ।उदा.अन्तरालाः तु 22-26, 27-31, इत्यादयः अपि भवितुम् अशक्ष्यन् ।अत्र नियमः एकः एव यत् वर्गाः अन्तर्व्यापिनः न स्युः(वर्गान्ताः न पुनरावर्तेयुः) ।

उदाहरणम् 4 : वयम् इदानीं अधोदत्तं आवृति-वितरण-कोष्ठकम् स्वीकुर्मः यस्मिन् कस्यचित् वर्गस्य 38 छात्राणां भाराः दत्ताः सन्ति ।

कोष्ठकम् 14.3

भारः (kg मिते)	छात्राणां सङ्ख्या
31-35	9
36-40	5
41-45	14
46-50	3
51-55	1
56-60	2
61-65	2
66-70	1
71-75	1
पूर्णसङ्ख्या	38

इदानीं यदि 35.5 kg मितम् एकं, 40.5 kg मितं च एकं छात्रम् अस्यां कक्ष्यायां योजयामः चेत् तर्हि एतौ कस्मिन् अन्तराले योजयामः । 35 अथवा 40 इति अन्तयुक्ते गणे योजयितुं न शक्नुमः । यतः क्रमागत-वर्गद्वयस्य उच्च तथा अधोमितिःनां मध्ये रिक्यस्थानम् अस्ति । अतः अस्माभिः एवम् अन्तरालाः विभज्याः यथा क्रमागत-अन्तरालयोः उच्चमितिः, अधोमितिः च समाना स्यात् । एतदर्थम् वर्गस्य उच्चमितेः तथा तदनन्तरम् विद्यमानस्य वर्गस्य अधोमितेः मध्ये विद्यमानम् अन्तरम् अन्विषामः । अग्रे, अस्य अन्तरस्य अर्धं भागं उच्चमित्या सह योजयित्वा,प्राप्तं फलं प्रत्येकं अपि अधोमितेः व्यवकलनं कुर्मः ।

उदाहरणार्थम् 31 - 35 तथा 36 - 40 इति वर्गौ स्वीकुर्वन्तु।

36 - 40 इत्यस्य अधोमितिः = 36

31 - 35 इत्यस्य उच्चमितिः = 35

अन्तरः = 36 - 35 = 1

अन्तरस्य अर्धभागः $= \frac{1}{2} = 0.5$

अतः 31 - 35 इत्यनयोः मध्ये निर्मितः नूतनः वर्ग-अन्तरालः (31 - 0.5) – (35 + 0.5) अर्थात् (30.5 - 35.5)। तथैव 36 - 40 इत्यनयोः मध्ये निर्मितः नूतनः वर्गः तु

= (36 - 0.5) – (40 + 0.5)

अर्थात् = 35.5 – 40.5।

अनेन क्रमेण एव अनुवर्त्य निम्न-लिखितः सन्ततः वर्गः निर्मितः अस्ति।

30.5 - 35.5, 35.5 - 40.5, 40.5 - 41.5, 45.5 - 50.5, 50.5 - 55.5, 55.5 - 60.5, 60.5 - 65.5, 65.5 - 70.5, 70.5 - 75.5

इदानीं वयं एतेषु वर्गेषु नूतनानां छात्राणां भारान् योजयितुं शक्नुमः। अन्या काचित् समस्या उत्पद्यते यत् 35.5 वर्गद्वये अपि दृश्यते - अर्थात् 30.5-35.5 इत्यत्र तथा 35.5-40.5 इत्यत्रापि। कस्मिन् वर्गे 35.5 इत्येषः भारः स्वीकरणीयः ?

यदि वर्गद्वये अपि स्वीक्रियते तर्हि तत् द्विवारम् परिगण्यते।

रूढ्या वयं 35.5 भारं 35.5-40.5 इत्यत्र परिगणयामः न तु 305.-35.5 इत्यत्र। तथैव,40.5 इति भारं 40.5-45.5 इत्यत्र परिगणयामः न तु 35.5-40.5 इत्यत्र।

अतः नूतनभारौ 35.5kg, तथा 40.5 kg च क्रमशः 35.5-40.5 तथा 40.5-45.5 इत्यत्र योजयामः। एताभिः परिकल्पनाभिः सहितम् नूतन-आवृत्तिः-वितरण-कोष्ठकम् अधोदत्तम् अस्ति।

कोष्ठकम् 14.4

भाराः(kg मिते)	छात्राणां सङ्ख्या
30.5-35.5	9
35.5-40.5	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
60.5-65.5	2
65.5-70.5	1
70.5-75.5	1
पूर्णसङ्ख्या	**40**

क्रियाकलापे भवद्भिः सङ्गृहीतं दत्तांशं प्रति गच्छामः। इदानीं वयम् एतान् दत्तांशान् आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकेषु प्रस्तावनां कुर्वन्तु इति वदामः।

द्वितीयः क्रियाकलापः - एतान् गणान् एव अनुवर्त्य दत्ताशं आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकरूपेण परिवर्तयन्तु। दत्तांशस्य प्रकारं मनसि निधाय, व्याप्तिं च स्मरन्तः यथा-सौकर्यम् वर्गान्, उचितान् वर्गान्तरान् च चिन्वन्तु।

प्रश्नावलिः 14.2

1. अष्टमकक्ष्यायाः 30 छात्राणां रक्त-गणःअधोदत्त प्रकारेण अभिलिखितः अस्ति।

   A, B, O, O, *A*B, O, *A*, O, B, *A*, O, B, *A*, O, O

   A, *A*B, O, *A*, *A*, O, O, *A*B, B, *A*, O, B, *A*, B, O

   एतान् दत्तांशान् आवृत्ति-वितरण-कोष्ठक-रूपेण लिखन्तु।एतेषु रक्त-गणेषु अतिसामान्यः, अतिदुर्लभः च रक्तगणः कः?

2. 40 तन्त्रज्ञानां स्ववासस्थानतः स्वकार्यस्थानपर्यन्तं विद्यमानं दूरं (km मिते) अधोदत्तप्रकारेण अस्ति।

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

   उपरिदतांशस्य कृते वर्गान्तरः 5 यथा स्यात्, प्रथमवर्गः च 0-5 इति स्यात् तथा स्वीकृत्य एकां वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकं निर्मान्तु । एतादृशे कोष्ठकप्रातिनिध्ये भवन्तः कान् मुख्यांशान् पश्यन्ति ?

3. 30 दिनात्मके मासे कस्यचत् महानगरस्य सापेक्षार्द्रता(प्रतिशते) अधोदत्त प्रकारेण अस्ति।

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

   (i) 84-86, 86-88 इत्येवं वर्गान्तरान् स्वीकृत्य वर्गीकृत- आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकम् निर्मान्तु ।

   (ii) एषः दत्तांशः कस्य मासस्य अथवा ऋतोः सम्बद्धः इति भवन्तः चिन्तयन्ति ?

   (iii) अस्य दत्तांशस्य व्याप्तिः का?

4. 50 छात्राणाम् औन्नत्यम् (समीपतम cms पर्यन्तं मापितम्) अधोदत्त प्रकारेण अस्ति।

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

   (i) उपरि-दत्तांशान् 160-165,165-170 इत्यादि-वर्गान्तरालयुक्तेन वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरण-कोष्ठक-रूपेण लिखन्तु।

   (ii) कोष्ठकात् तेषां औन्नत्यस्य विषये कं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति ?

5. कस्मिञ्चित् नगरे वायौ सल्फर्-डै-आक्सैड् इत्यस्य सान्द्रतां(प्रतिभागं दशलक्षम्) ज्ञातुं कश्चित् प्रयोगः कृतः। 30 दिनार्थं प्राप्तः दत्तांशः अधोदत्तः अस्ति।

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) 0.00-0.04, 0.04-0.08 इत्यादि-वर्गान्तरालयुतस्य एतस्य दत्तांशस्य कृते वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरण कोष्ठकम् निर्मान्तु।

(ii) कति दिन-पर्यन्तम् सल्फर्-डै-आक्सैड् इत्यस्य सान्द्रता 0.11 प्रति-भागं-दशलक्षम् इत्यस्य अधिकम् आसीत्?

6. त्रीणि नाणकानि 30 वारं युगपद् उत्क्षिप्तानि। प्रतिवारम् प्राप्यमाणानां शिरसां सङ्ख्या अधोदत्त-प्रकारेण अभिलिखिता अस्ति

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

उपरितनस्य दत्तांशस्य कृते आवृत्ति-वितरण कोष्ठकम् निर्मान्तु।

7. π इत्यस्य मानं 50 दशमलवपर्यन्तम् अधोदत्तम् अस्ति।

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) दशमलवबिन्दोः अनन्तरम् 0 तः 9 पर्यन्तम् विद्यमानानां अङ्कानां आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकं निर्मान्तु।

(ii) अधिकावृत्तिमन्तः, न्यूनावृत्तिमन्तः च अङ्काः के ?

8. पूर्वतने सप्ताहे बालैः कियतीः घण्टाः यावत् दूरदर्शन-कार्यक्रमाः दृष्टाः इति ते पृष्टाः। परिणामाः अदोदत्त-प्रकारेण सन्ति।

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) वर्ग-विस्तारं 5 तथा वर्ग-अन्तरालः 5-10 च यथा स्यात्, तथा एतस्य दत्तांशस्य कृते वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकम् निर्मान्तु।

(ii) कति बालाः प्रति-सप्ताहं 15 अथवा ततोऽपि अधिककालं दूरदर्शनं दृष्टवन्तः ?

9. काचित् संस्था अमुक-प्रकारकं कार-यानस्य विशिष्टं विद्युत्कोषम् उत्पादयति । 40 विद्युत्कोषाणां जीवनम् (वर्षेषु) अधोदत्त-प्रकारेण अभिलिखितम् अस्ति ।

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

वर्ग-अन्तरालः 0.5 मापयुतः यथा स्यात्, 2-2.5 अन्तरालतः आरभ्य एतस्य दत्तांशस्य कृते वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकम् निर्मान्तु ।

14.4 दत्तांशस्य आलेखीय-निरूपणम्

दत्तांशस्य कोष्ठकरूपेण निरूपणं पूर्वमेव चर्चितवन्तः । इदानीं वयं अन्य-मार्गेण दत्तांशस्य निरूपणं प्रति- अर्थात् आलेखीय-निरूपणं प्रति अस्माकं अवधानं दद्मः । "एकं चित्रम्, सहस्रशब्देभ्यः समर्थतरं भवति" इत् काचित् सूक्तिः कथयति । सामान्तया, प्रत्येकं दत्तांशानां मध्ये तोलनम् आलेखैः सम्यक् ज्ञाप्यते । ईदृशं निरूपणम् मूलदत्तांशस्य अपेक्षया अवगमनं सरलीकरोति । वयं अधोदत्तान् आलेखीय-निरूपणान् अस्मिन् परिच्छेदे पशयामः ।

(*A*) दण्ड-आलेखः

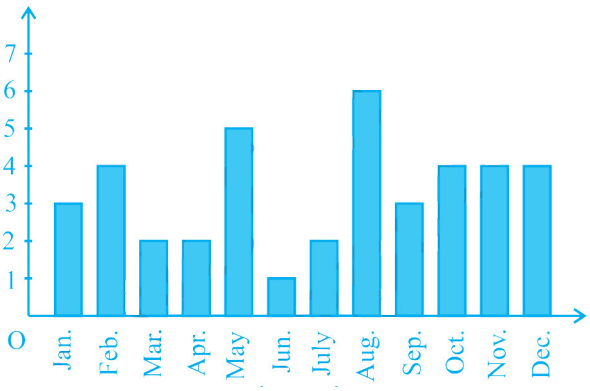
(B) चर-स्थिर-विस्तारयुतानि आयतचित्राणि (हिस्टोग्राम्स्)

(C) आवृत्ति-बहुभुजानि

(A) दण्ड-आलेखः

पूर्वतन-वर्गेषु भवन्तः दण्ड-आलेखानां विषये अधीतवन्तः, तथा तान् निर्मितवन्तः च । अत्र वयं तान् इतोऽपि औपचारिकदृष्ट्या पश्यामः । स्मरन्तु यत् दण्ड-आलेखाः तादृशम् चित्रीयनिरूपणम् यत्र एकस्मिन् अक्षे(x-अक्षः) समान-अवकाशयुताः, समान-विस्तारयुताः च चर-मानयुताः दण्डाः चित्र्यन्ते । चराणां मानम् अन्यस्मिन् अक्षे(y-अक्षः) दर्श्यते । दण्डानां औन्नत्यं चराणां मानानि अवलम्ब्य भवति ।

उदाहरणम् 5 : नवमकक्ष्यायाः कस्मिञ्चित् अनुच्छेदे 40 छात्राः स्व-जन्ममासविषये पृष्टाः । प्राप्त-दत्तांशानुगुणम् अधोदत्तः आलेखः निर्मितः अस्ति ।



आकृतिः 14.1

उपरिदत्तं दण्ड-आलेखं दृष्ट्वा अधोदत्तान् प्रश्नानानां उत्तरं वदामः ।

(i) नवम्बर् मासे कति छात्राणां जन्म अभवत् ?

(ii) कस्मिन् मासे अधिकानां छात्राणां जन्म अभवत् ?

समाधानम् - अत्र पश्यन्तु यत् 'जन्म-मासः' एव चरः तथा चरस्य मानं तु 'जात-छात्राणां सङ्ख्या'

(i) नवम्बर् मासे 4 छात्राः जाताः ।

(ii) आगस्ट् मासे अधिकाः छात्राः जाताः ।

उदाहरणम् 6 : रु.20,000 मासिक-आययुक्तः कश्चित् कुटुम्बः विविधेषु अंशेषु अधोदत्तान् व्ययान् चिन्तितवन्तः ।

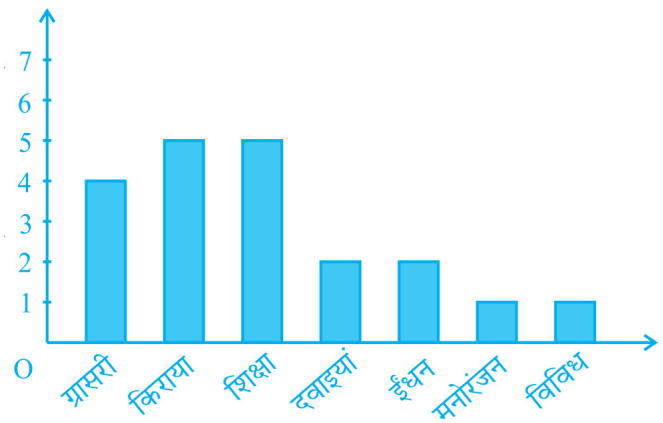
कोष्ठकम् 14.5

अंशाः	**व्ययाः (सहस्ररुप्यकेषु)**
दैनन्दिन-भोजनम्	4
भाटकम्	5
अपत्यानां शिक्षणम्	5
औषधम्	2
इन्धनम्	2
मनोरञ्जनम्	1
अन्ये विषयाः	1

उपरितनस्य दत्तांशस्य कृते दण्ड-आलेखं लिखन्तु ।

समाधानम् - वयम् अस्य दत्तांशस्य दण्ड-आलेखं अधोदत्तेषु सोपानेषु लेखितुं शक्निमः । कोष्ठकस्य द्वितीये स्तम्भे मात्रकम् तु सहस्रं रूप्यकाणि ।

1. कमपि एकं मापदण्डम् चित्वा तिर्यक्-अक्षे(x-अक्षे) विद्यमानं चरं निरूपयन्तु यतः दण्डस्य विस्तारः महत्त्वपूर्णः नास्ति । किन्तु स्पष्टता निमित्तम्,वयं सर्वेषां दण्डानां समान-विस्तारं, तथा दण्डयोः मध्ये समानं-अवकाशं च दद्मः । एकम् अंशं एकस्मिन् मात्रके निरूपयामः ।
2. ऊर्ध्वाधर अक्षे(y-अक्षे) व्ययान् निरूपयामः। यतः अधिकतमं मानम् रु.5000/- वयं 1 मात्रकम् = रु.1000 इति चेतुं शक्निमः ।
3. प्रथमं अंशम् अर्थात् दैनन्दिनभोजनं निरूपयितुम् एकमात्रक-विस्तृतं, तथा 4 मात्रक-औन्नत्ययुतं आयताकारकं दण्डम् आलिखामः ।
4. तथैव अन्यांशान् द्वयोः क्रमागत दण्डानां मध्ये एक-मात्रक-मितम् अवकाशं दत्त्वा निरूपयामः । 14.2 आकृत्यां दण्ड-आलेखः लिख्यते ।



आकृतिः 14.2

अत्र भवन्तः दत्तांशानां सापेक्ष-गुणधर्मान् अवलोकनेन एव अवगन्तुं शक्नुवन्ति । उदा.वैद्यकीय-व्ययस्य अपेक्षया शिक्षण-व्ययः द्विगुणितः अस्ति । अतः केषुचित् सन्दर्भेषु ईदृशं दत्तांश-निरूपणम् कोष्ठक-रूपेण निरूपणस्य अपेक्षया स्पष्टतरः अस्ति ।

तृतीयः क्रियाकलापः - प्रथमस्य क्रियाकलापस्य अनुवर्तनेन, तान् एव चतुरः गणान् उपयुज्य, दत्तांशान् उचितैः दण्ड-आलेखैः निरूपयन्तु ।

इदानीं वयं सन्तत-वर्ग-अन्तरालयुतम् आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकं कथम् आलेखे निरूप्यते इति पश्यामः ।

(B) आयतचित्रम्

एतत् अपि दण्ड-आलेखीय निरूपणवत् अस्ति अस्य उपयोगः सन्तत-वर्ग-अन्तरालस्य कृते अस्ति। उदा. 14.6 कोष्ठके दत्तम् आवृत्ति-वितरणम् स्वीकुर्वन्तु ,यत्र कस्याश्चित् कक्ष्यायाः 36 छात्राणां भाराः दत्ताः सन्ति।

कोष्ठकम् 14.6

भाराः(kg मिते)	छात्राणां सङ्ख्या
30.5-35.5	9
35.5-40.5	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
पूर्णसङ्ख्या	**36**

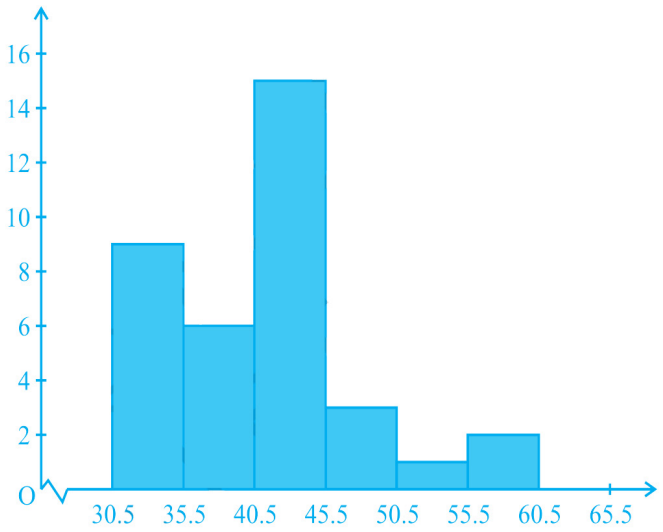
इदानीं वयम् उपरितनं दत्तांशम् आलेखीयरूपेण एवं निरूपयामः।

(i) वयं भारान् तिर्यक्-अक्षे उचितेन मापदण्डेन निरूपयामः। 1 cm = 5kg इति मापदण्डं चेतुं शक्नुमः। अपि च, प्रथमः वर्गान्तरालः 30.5 तः आरभते न तु 0 तः, वयं अक्षे 'अवरोध'द्वारा तत् निरूपयामः।

(ii) वयं छात्राणां सङ्ख्यां (आवृत्तिं) ऊर्ध्वाधर-अक्षे उचितेन मापदण्डेन निरूपयामः ।यतः अधिकतमा-आवृत्तिः 15, अस्माभिः मापदणडः तथा चेतव्यः यथा एषा अधिकतमा आवृत्तिः तस्मिन् अन्तर्भवेत्।

(iii) इदानीं वयं वर्ग-व्याप्ति-तुल्य-विस्तारयुतानि तथा तत्सङ्गत वर्गान्तराल-तुल्य-औन्नत्ययुतानि च आयतानि चित्रयामः। उदा.30.5-35.5 इति वर्गान्तरालस्य आयतस्य विस्तारः 1cm, औन्नत्यं च 4.5cm भवति।

(iv) एवंप्रकारेण 14.3 तमायाम् आकृत्यां दत्त-प्रकारेण आलेख-चित्रं प्राप्नुमः।



आकृतिः 14.3

अत्र अवलोकयन्तु यत् क्रमागत-आयतानां मध्ये अवकाशः नास्ति इत्यतः, परिणतः आलेखः दृढाकृतिवत् दृश्यते । इदं आयत चित्रम् इति उच्यते यत् सन्तत-अन्तरालयुत-वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरणस्य आलेखीय निरूपणम् अस्ति। अपि च, दण्ड-आलेखस्य विपरीतत्वेन आयतचित्राणां निर्माणे तस्य विस्तारस्य महत्वपूर्णः भागः अस्ति।

अत्र वस्तुतः, आयतानां क्षेत्रफलानि तत्सङ्गत-आवृत्तीनाम् अनुपाते भवन्ति । यतः आयतानां विस्तारः समानः, तेषाम् औन्नत्यम् आवृत्तीनां अनुपाते भवति ।अतः वयं औन्नत्यानि (iii)इत्यत्र दत्तप्रकारेण चित्रयामः।

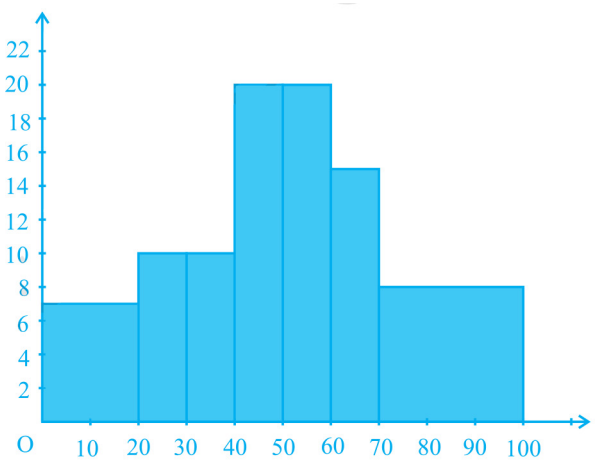
इदानीं उपरितनायाः स्थित्याः भिन्नां काञ्चित् स्थितिं पश्यामः।

उदाहरणम् 7 : कश्चित् अध्यापकः 100 अङ्कयुतायां गणित-परीक्षायां विभागद्वयस्य छात्राणां कार्यनिर्वहणस्य विश्लेषणं कर्तुम् इच्छति । तेषां कार्यनिर्वहणं दृष्टवा सः ज्ञातवान् यत् केचन छात्राः 20 अङ्केभ्यः न्यूनं स्वीकृतवन्तः तथा केचन 70 अङ्केभ्यः अधिकम्। सः तान् छात्रान् विविध-मापयुतेषु अन्तरालेषु गणरूपेण विभक्तुम् इष्टवान् यथा 0-20, 20-30, ..., 60-70, 70-100। अग्रे सः अधोदत्तं कोष्ठकम् निर्मितवान्।

कोष्ठकम् 14.7

अङ्काः	छात्राणां सङ्ख्या
0-20	7
20-30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - तदुपरि	8
पूर्णसङ्ख्या	**90**

14.4 आकृत्यां दत्तप्रकारेण केनचित् छात्रेण अस्य कोष्ठकस्य आयतचित्रं निर्मितम्।



आकृतिः 14.4

एतत् आलेखीयनिरूपणम् एकवारं परिशीलयन्तु। एतत् सम्यक् दत्ताशं निरूपयति इति भवन्तः चिन्तयन्ति वा ? न, तत् आलेख-चित्रम् किञ्चित् दोषपूर्णचित्रं प्रस्तौति। यथा, वयं पूर्वं एव उक्तवन्तः, आयतानां क्षेत्रफलं आयत-चित्राणां आवृत्तीनां अनुगुणं(अनुपाते) भवति। पूर्वम् एषा समस्या न आसीत्, यतः सर्वेषां आयतानां विस्तारः समानः आसीत्। किन्तु अत्र आयतानां विस्तारः परिवर्तमानः अस्ति इत्यतः उपरितनम् आयत-चित्रम् साधु-चित्रणं न प्रदर्शयति। उदा. 70-100 अन्तराले, 60-70 अन्तरालस्य अपेक्षया अधिकतरां आवृत्तिं (अधिकं क्षेत्रफलं) दर्शयति किन्तु तत् वास्तविकं नास्ति।

अतः अस्माभिः आयतानां दीर्घतायां कानिचन परिवर्तनानि करणीयानि यथा तेषां क्षेत्रफलानि पुनः आवृत्तीनां अनुपातानि भवेयुः।

अधोदत्त प्रकारेण सोपानानि परिपालनीयानि

1. न्यूनतम-वर्ग-मापयुतं वर्ग-अन्तरालं चिन्वन्तु। उपरितने उदाहरणे न्यूनतम-वर्ग-मापः 10 इति।
2. अग्रे आयतानां औन्नत्यानि 10 इति वर्ग-मापस्य अनुगुणं परिवर्तयाम।

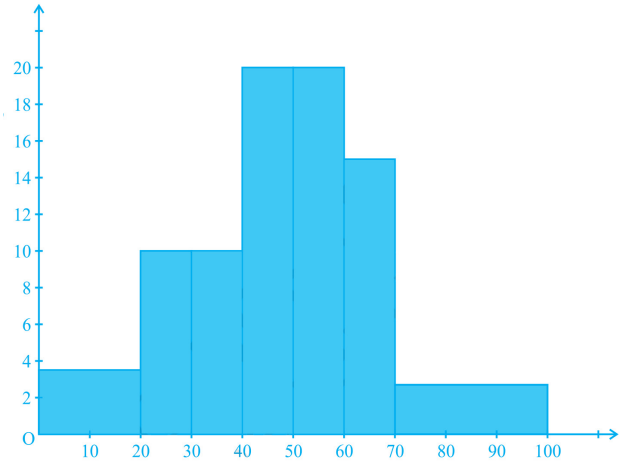
उदाहरणार्थम्, यदा वर्गान्तरालस्य मापः 20, आयतस्य औन्नत्यं 7। अतः, यदा वर्गान्तरालमापः 10, आयतस्य औन्नत्यं $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ भवेत्।

तथैव, अनया दिश्या गम्यते चेत् अधोदत्तं कोष्ठकम् प्राप्नुमः।

कोष्ठकम् 14.8

अङ्काः	आवृत्तिः	वर्ग-विस्तारः	आयतानाम् औन्नत्यम्
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 - 100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

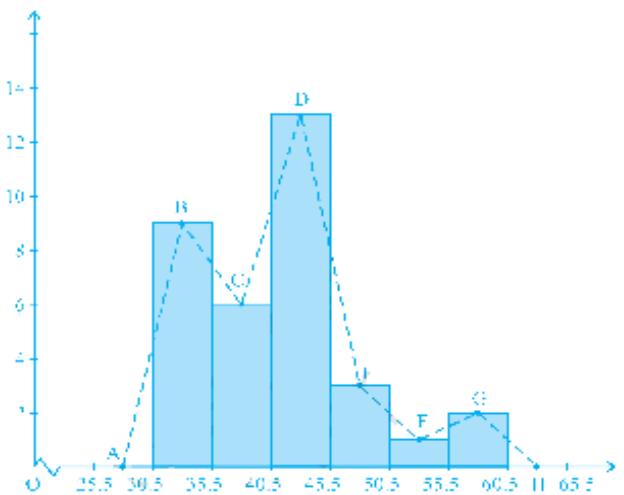
यतः प्रत्येकं अपि स्थित्यां वयं 10 अङ्क-दीर्घतायुतस्य अन्तरालस्य कृते एव परिकलितवन्तः, एताः दीर्घताः वयं "१०अङ्क-व्याप्तेः छात्राणां अनुपातः" इत् वक्तुं शक्नुमः।



आकृतिः 14.5

(C) आवृत्ति-बहुभुजम्

मात्रात्मक-दत्तांशानां तथा आवृत्तीनां निरूपणार्थम् अन्यः एकः दर्शनात्मकः मार्गः अस्ति । एतत् एकं बहुभुजम् । 14.3 तमाम् आकृतिं पश्यन्ति चेत् किम् उच्यते इत् स्पष्टम् अवगम्यते । रेखा-खण्डैः अस्य आयत-चित्रस्य आयतानां ऊर्ध्वभागानां मध्यबिन्धून् योजयामः । एतान् मध्य-बिन्धून् (B, C, D, E, F, G च) रेखाखण्डैः योजयित्वा BCDEFG इति आकृतिं प्राप्नुमः । एतत् बहुभुजं पूरयितुं वयं 30.5-35.5 वर्ग-अन्तरालस्य पूर्वं 0 इति एकं अन्तरालं, तथा 55.5-60.5 अन्तरालात् परं एकम् अन्तरालं योजयामः - तेषां मध्यबिन्दू क्रमशः *A* तथा H । *A*BCDEFGH इति आवृत्ति-बहुभुजं 14.3 तमायाम् आकृत्यां दर्शितदत्तांशानुगुणम् अस्ति । एतत् वयं 14.6 तमायाम् आकृत्यां दर्शितवन्तः ।



आकृतिः 14.6

यद्यपि न्यूनतम-वर्गस्य अपेक्षया अन्यः कोऽपि वर्गः नास्ति तथा अधिकतमस्य वर्गस्य अग्रे कोऽपि वर्गः नास्ति, शून्य-आवृत्तियुक्तस्य वर्ग-अन्तरालद्वयस्य योजनेन आवृत्ति-बहुभुजस्य क्षेत्रफलम् आवृत्ति-चित्राणां क्षेत्रफल-तुल्यम् अस्ति। किमर्थम् एवम् अस्ति ? (**टिप्पणी**- सर्वाङ्गसम-त्रिभुजानां गुणधर्मान् उपयुञ्जन्ताम्)

इदानीं प्रश्नः एषः - यदा प्रथम-वर्गस्य पूर्वं कोऽपि वर्गः नास्ति चेत् तदा कथम् बहुभजस्य पूरणम् कुर्मः ? तादृशीं स्थितिं पश्यामः।

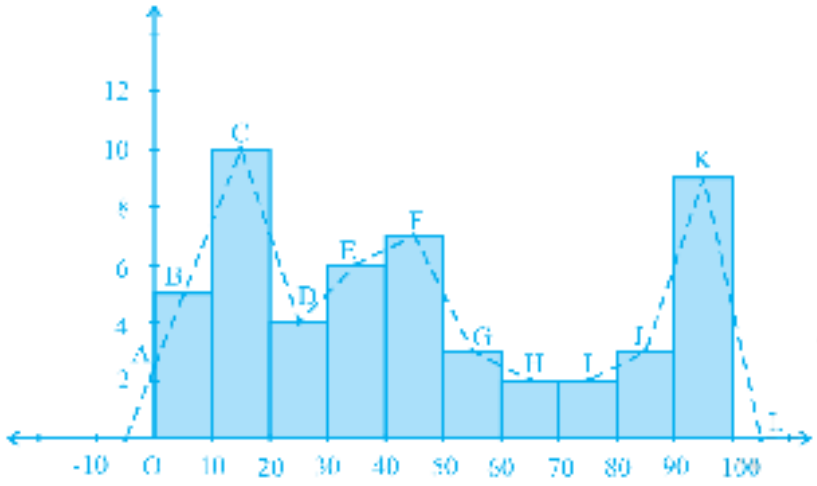
उदाहरणम् 8 : 14.9 तमे कोष्ठके 51 छात्रैः कस्याञ्चित् परीक्षायां प्राप्ताः प्रतिशतम् अङ्काः दत्ताः सन्ति।

कोष्ठकम् 14.9

अङ्काः	छात्राणां सङ्ख्या
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
पूर्णसङ्ख्या	**51**

अस्य आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकस्य सङ्गतम् आवृत्तिः बहुभुजं लिखन्तु।

समाधानम् - अस्य दत्तांशस्य कृते प्रथमम् आयतचित्रं चित्रयित्वा, आवृत्तीनाम् ऊर्ध्वभागस्य मध्य-बिन्दून् क्रमशः B, C, D, E, F, G, H, I, J, K इति अङ्कयामः।अत्र प्रथमः वर्गः 0-10। अतः 0-10 इत्यस्य पूर्वतनं वर्गं ज्ञातुं वयं तिर्यक्-अक्षम् ऋणात्मकदिशि विस्तारयामः। तथा (-10)-0 इत्यस्य काल्पनिकस्य वर्ग-अन्तरालस्य मध्य-बिन्दुम् अन्विषामः। प्रथमं शून्यावृत्तिमन्तं अन्त-बिन्दुं B मध्यबिन्दुना सह योजयामः। यस्मिन् बिन्दौ एषः रेखा-खण्डः, ऊर्ध्वाधर-अक्षं मिलति(कर्तयति) तं बिन्दुं *A* इति अङ्कयामः।दत्तांशस्य अन्तिमात् वर्गात् परम् विद्यमानस्य वर्गस्य मध्य-बिन्दुः L इति। तदा O*A*BCDEFGHIJKL इति आवृत्ति-बहुभुजं 14.7 तमायाम् आकृत्यां दर्शितप्रकारेण प्राप्नुमः।



आकृतिः 14.7

आवृत्ति-बहुभुजानि आयत-चित्रैः विना स्वतन्त्रतया अपि चित्रयितुं शक्नुमः । एतदर्थम् दत्तांशे विद्यमानानां वर्ग-अन्तरालानां मध्य-बिन्दवः अपेक्षिताः । एते वर्ग-अन्तरालानां मध्य-बिन्दवः **वर्ग-अङ्काः** इति उच्यन्ते ।

वर्ग-अन्तरालस्य वर्ग-अङ्कं ज्ञातुं, वर्गस्य उच्च-अधो-मित्योः योगं परिकलय्य 2 द्वारा विभजनं कुर्मः । अतः

$$\textbf{वर्ग-अङ्कः} = \frac{\textbf{उच्चमितिः} + \textbf{अधोमितिः}}{\mathbf{2}}$$

एकम् उदाहरणम् स्वीकुर्मः ।

उदाहरणम् 9 : महानगरे कस्मिञ्चित्, जीविका-निर्वहण-विषये साप्ताहिक-अध्ययनानि कृतानि । तस्य अवलोकनानि अधोदत्ते कोष्ठके सन्ति ।

कोष्ठकम् 14.10

जीविका-व्यय-सूच्यङ्कः	सप्ताहानां सङ्ख्या
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
पूर्णसङ्ख्या	**52**

उपरितनस्य दत्तांशस्य कृते आवृत्ति-बहुभुजं चित्रयन्तु । (आयत-चित्रं विना)

समाधानम् - यतः वयम् आयत-चित्रं विना आवृत्ति-बहुभुजं चित्रयितुम् इच्छामः, उपरिदत्तानां वर्गाणां वर्ग-अङ्कान् परिकलयामः अर्थात् 140 - 150, 150 - 160,....

140 - 150 अन्तरालस्य कृते, उच्चमितिः = 150 तथा अधोमितिः = 140.

अतः वर्ग-अङ्कः $= \frac{150 + 140}{2} = \frac{290}{2} = 145$

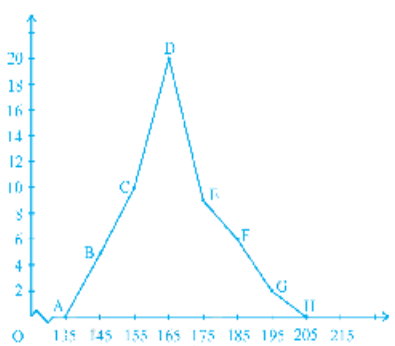
अनेन प्रकारेण अनुवर्तयामः चेत् अन्य-वर्गाणां वर्ग-अङ्कान् अपि अन्विषामः ।

अतः नूतनं कोष्ठकम् अधोदत्त- प्रकारेण अस्ति ।

कोष्ठकम् 14.11

वर्गाः	वर्ग-अङ्काः	आवृत्तिः
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
पूर्णसङ्ख्या		**52**

इदानीं वयं तिर्यक्-अक्षे वर्ग-अङ्कान् अङ्कयित्वा, आवृत्तीः ऊर्ध्वाधर-अक्षे अङ्कयित्वा आवृत्ति-बहुभुजं निर्मामः । तथा B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) तथा G(195, 2) इति बिन्दून् अङ्कयित्वा रेखा-खण्डैः योजयामः ।अस्माभिः शून्य-आवृत्ति-युतम् 130-140 इति वर्गसङ्गतं वर्ग-अङ्कम् अङ्कयितुं न विस्मर्तव्यम् (140-150 इत्यस्य कनिष्ठ-तमात् वर्गात् पूर्वम्) अर्थात् $A(135, 0)$ । तथा H(205, 0) इति बिन्दुः G(195, 2) इति बिन्दोः समनन्तरम् भवति । अतः परिणत-आवृत्ति-बहुभुजं तु ABCDEFGH ।



आकृतिः 14.8

आवृत्ति-बहुभुजं तदा उपयुज्यते यदा दत्तांशः सन्ततः, अत्यधिकः च स्यात्। एतत्तु समान-प्रकारकयोः विभिन्न-दत्तांशयोः तोलनाय उपयोगि अस्ति। उदा.समानकक्ष्यायाः विभागद्वयस्य कार्यनिर्वहणस्य तोलनम्।

प्रश्नावलिः 14.3

1. कयाचित् संस्थया 15-44 वर्षाणां मध्ये विद्यमानानां प्रपञ्चस्य महिलानां अनारोग्यस्य, मरणस्य च कारणस्य विषये सर्वेक्षणं कृतम्। सः अवलोकनांशः (प्रतिशतं) अधोदत्तः अस्ति।

क्रम-सङ्ख्या	कारणानि	महिला-मरण-स्तरः(प्रतिशतं)
1	सन्तानोत्पत्तिसम्बद्धा आरोग्य-परिस्थितिः	31.8
2	नाडीसम्बद्धाः-मनोविकाराः	25.4
3.	व्रणाः	12.4
4	हृदयसम्बद्धा परिस्थितिः	4.3
5.	श्वाससम्बद्धा परिस्थितिः	4.1
6	अन्य-कारणानि	22.0

(i) उपरिदत्तां सूचनां आलेखीय-रूपेण निरूपयन्तु।

(ii) वैश्विक-स्तरे महिलानां अनारोगस्य मरणस्य च का परिस्थितिः मूलभूतं कारणम् अस्ति ?

(iii) स्वस्य अध्यापकस्य साहाय्येन द्वितीये (ii) प्रश्ने दत्तप्रकारेण मरणस्य अधिकांशेन कारणीभूतं कारकद्वयम् अन्विषन्तु।

2. भारतीय-समाजस्य विविधेषु भागेषु प्रति-सहस्रं बालकेभ्यः विद्यमानानां बालिकानां सङ्ख्या (समीपतम-दश-पर्यन्तम्) अधोदत्ता अस्ति।

अनुच्छेदः	प्रति-सहस्र बालकेषु बालिकानां सङ्ख्या
परिशिष्टजातिः (SC)	940
परिशिष्टवर्गः(ST)	970
SC, ST च विहाय अन्यत्र	920
अनभिवृद्धाः जिल्लाः(?)	950
अभिवृद्धाः जिल्लाः(?)	920
ग्रामः	930
नगरम्	910

(i) दण्ड-आलेख-चित्रेण उपरितनां सूचनाम् आलिखन्तु।

(ii) कक्ष्यायां दण्ड-आलेख-चित्रात् कं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः इति चर्चयन्तु।

3. राज्य-संसद-निर्वाचनस्य परिणामे विविधैः राजनैतिक-दलैः जितानि स्थानानि अधोदत्तानि सन्ति।

राजनैतिक-दलः	*A*	B	C	D	E	F
जितानि स्थानाति	75	55	37	29	10	37

(i) निर्वाचन-परिणामान् निरूपयितुं दण्ड-आलेखं चित्रयन्तु।

(ii) केन राजनैतिक-दलेन अधिकेषु स्थानेषु जयं प्राप्तम् ?

4. mm मितिम् उपयुज्य कस्यचित् सस्यस्य 40 पर्णानि मापितानि। तथा प्राप्तः दत्तांशः अधोदत्ते कोष्ठके निरूपितः अस्ति।

दीर्घता (mm मिते)	पर्णानां सङ्ख्या
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) एतं दत्तांशं निरूपयितुम् आयत-चित्रम् उपयुज्यताम् (टिप्पणी: वर्ग-अन्तरालं सन्ततं कुर्वन्तु)

(ii) अस्य दत्तांशस्य कृते इतोऽपि उचिततरम् आलेखीय-निरूपणम् अस्ति वा ?

(iii) अधिकतमानि पत्राणि 153 mm दीर्घानि इति निष्कर्षः साधुः वा ?

5. 400 नियान् दीपानां जीवन-कालः अधोदत्तः अस्ति।

आयुः(घण्टासु)	दीपानां सङ्ख्या
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) आयतचित्रेण दत्तांशं निरूपयन्तु।

(ii) 700 घण्टायाः अधिकं कति दीपानां जीवन-कालः अस्ति ?

6. छात्रैः प्राप्तानाम् अङ्कानाम् आधारेण ते विभागद्वये कथं स्थापिताः इत्येतत् विवरणम् अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति

विभाग: A		**विभाग: B**	
अङ्काः	**आवृत्तिः**	**अङ्काः**	**आवृत्तिः**
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

आवृत्ति-बहुभुजद्वयेन समान-आलेख-चित्रे विभागद्वयस्य छात्राणां अङ्कान् निरूपयन्तु । आवृत्ति-बहुभुजद्वयेन अनुच्छेदद्वयस्य छात्राणां कार्यनिर्वहणं तोलयन्तु ।

7. *A*, B इति गणद्वयेन, कस्याञ्चित् वल्लकन्दुकक्रीडायां प्रथम 60 कन्दुकप्रहारेषु स्वीकृताः वेगाङ्काः अधोदत्ताः सन्ति ।

कन्दुकानां सङ्ख्या	**गण: A**	**गण: B**
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

आवृत्ति-बहुभुजाभ्यां समाने आलेख-चित्रे गणद्वयस्य दत्तांशान् निरूपयन्तु ।

(**टिप्पणी** - आदौ वर्ग-अन्तरालं सन्ततं कुर्वन्तु)

8. कस्मिंश्चित् यादृच्छिकसर्वेक्षणे कस्मिंश्चित् उपवने क्रीडतां विविधवयोमानवतां बालकानां सङ्ख्या अधोदत्तप्रकारेण अस्ति।

आयुः(वर्षेषु)	बालानां सङ्ख्या
1-2	5
2-3	3
3-5	6
5-7	12
7-10	9
10-15	10
15-17	4

उपरि-दत्तांशस्य निरूपणम् आयत-चित्रेण कुर्वन्तु।

9. प्रादेशिक-दूरवाणी-मार्गदर्शिकायाः 100 उपनामानि यादृच्छिकतया स्वीकृत्य, तत्र विद्यमानेषु उपनामसु आङ्ग्ल-भाषायाः अक्षराणां सङ्ख्यायाः आवृत्ति-वितरणम् अधोदत्त-प्रकारेण अस्ति।

अक्षराणां सङ्ख्या	उपनामानां सङ्ख्या
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) उपरि-दत्तांशस्य निरूपणम् आयत-चित्रेण कुर्वन्तु।

(i) अधिकतम-उपनामयुक्तानां वर्ग-अन्तरालं लिखन्तु।

14.5 केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापाः

अस्य अध्यायस्य पूर्वतने भागे, वयं दत्तांशान् आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकैः, दण्ड-आलेखैः, आयत-चित्रैः, आवृत्ति-बहुभुजैः च निरूपितवन्तः। इदानीं अयं प्रश्नः उदेति यत् किं अस्माभिः 'तेषां तात्पर्यम्' अवगन्तुं दत्तांशस्य पूर्णभागः अपि पठनीयः वा अथवा प्रतिनिधि-रूपेण कांश्चन विषयान् केवलं पठित्वा ततः महत्त्वपूर्णानि उपलक्षणानि ज्ञातुं शक्नुमः वा इति। एतत् केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापेन वा अथवा माध्यकस्य मापेन सिद्ध्यति।

एवम् एकं सन्दर्भं स्वीकुर्वन्तु - यत्र मेरी, हरिः इति छात्रद्वयेन स्व-परीक्षापत्राणां प्रतिकृतयः प्राप्ताः। परीक्षायां दश-अङ्कानां पञ्च-प्रश्नाः आसन्। ताभ्यां प्राप्ताः अङ्काः अधोदत्ताः सन्ति।

प्रश्नसङ्ख्या	1	2	3	4	5
मेर्या प्राप्ताः अङ्काः	10	8	9	8	7
हरिणा प्राप्ताः अङ्काः	4	7	10	10	10

प्रतिकृत्योः प्राप्तेः परं द्वौ अपि स्व-प्राप्ताङ्क-माध्यके अधोदत्त-प्रकारेण दृष्टवन्तौ

$$\text{मेर्याः माध्यः} = \frac{42}{5} = 8.4$$

$$\text{हरेः माध्यः} = \frac{41}{5} = 8.2$$

यतः मेर्याः माध्यः हरेः अपेक्षया अधिकम् अस्ति, मेरी हरेः अपेक्षया स्वस्याः प्रदर्शनं सम्यक् अस्ति इति वदति। किन्तु हरिः एतं विषयम् न अङ्गीकृतवान्। सः द्वयोः प्राप्ताङ्कान् अपि आरोहण-क्रमे स्थापयित्वा मध्यमाङ्कम् अधोदत्त-प्रकारेण दृष्टवान्।

मेरेः प्राप्ताङ्कः	7	8	8	9	10
हरेः प्राप्ताङ्कः	4	7	10	10	10

हरिः स्वस्य मध्यमाङ्कं 10 अस्ति, तथा मेर्याः मध्यमाङ्कं 8 अस्ति अतः मम प्रदर्शनम् एव उत्तमम् इति उक्तवान्।

किन्तु मेरी एतत् न अङ्गीकृतवती। तदा मेरीम् अङ्गीकारयितुं हरिः अन्यां युक्तिं प्रयुक्तवान्। सः मया 10 अङ्काः अधिक (३) वारं प्राप्ताः, मेर्या तु एकवारमेव प्राप्ताः, अतः मम प्रदर्शनम् एव उत्तमम् इति उक्तवान्।

इदानीं मेरी-हर्योः मध्ये विवादं स्थगयितुं, तैः प्रयुक्तान् त्रीन् मापान् पश्यामः।

प्रथम-सन्दर्भे मेरी यत् अङ्कं गणितवती, सः माध्यः इति उच्यते। स्वस्य वादं साधयितुं हरिणा यत् मध्यः अङ्कः प्रयुक्तः तत् माध्यकम् इति उच्यते। बहुवारं आवर्तितं अङ्कं यं हरिः स्वस्य द्वितीयायां युक्त्यां प्रयुक्तवान् तस्य नाम बहुलकः इति उच्यते।

इदानीं वयं माध्यस्य विषये विस्तरेण पश्यामः।

नाम - सर्वेषां अवलोकनांशानां योगः यदा अवलोकनांशानां सङ्ख्यया विभज्यते, तदा सः अवलोकनांशानां माध्यः इत्युच्यते।

अयं $\bar{x}$ इति चिन्हेन सूच्यते।

इदानीम् एकम् उदाहरणम् पश्यामः।

उदाहरणम् 10 : स्वस्मिन् समाजे सामाजिककार्यं कर्तुं प्रति-सप्ताहं कियान् समयः दीयते इति पञ्च-जनाः पृष्ठाः। ते क्रमशः 10, 7, 13, 20, 15 घण्टाः इति उक्तवन्तः। समाज-कार्यार्थम् तैः व्ययीक्रियमाणस्य समयस्य माध्यम् अन्विषन्तु।

समाधानम् अस्माकं पूर्वतनेषु वर्गेषु वयं पठितवन्तः यत् केषाञ्चन अवलोकनानां माध्यः नाम

$$= \frac{\text{सर्वेषाम् अवलोकनानां योगः}}{\text{अवलोकनानां सङ्ख्या}}$$

अस्माकं माध्यान्वेषणस्य मार्गं सरलीकुर्मः। i तमम् अवलोकनं सूचयितुं x_i चरस्य प्रयोगं कुर्मः। अस्यां स्थित्यां i चरस्य मूल्यं 1 तः 5 पर्यन्तं भवति। अतः अस्माकं प्रथमम् अवलोकनम् x_1, द्वितीयम् अवलोकनं x_2 इत्येवं x_5 पर्यन्तम्।

अतः $x_1 = 10$ इत्युक्ते प्रथमस्य अवलोकनस्य मानं यत् x_1 इत्यनेन सूच्यते, तथैव $x_2 = 7$, $x_3 = 13$, $x_4 = 20$, $x_5 = 15$।

अतः माध्यः $\bar{x} = \frac{\text{सर्वेषाम् अवलोकनानां योगः}}{\text{अवलोकनानां सङ्ख्या}}$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

अतः तैः पञ्चभिः जनैः समाज-कार्ये विनियुक्तः माध्यः समयः 13 घण्टाः।

इदानीं यदि वयं 30 जनैः सामाजिक-कार्ये विनियुक्तं माध्यं समयं ज्ञातुम् इच्छामः, तर्हि $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{30}$ पर्यन्तं लेखनम् कठिनं कार्यम् स्यात्। अतः वयं ग्रीक्-चिह्नस्य $\sum$ (सिग्मा- योगस्य कृते) इत्यस्य उपयोगं कुर्मः।

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{30}$ इति लेखनस्य अपेक्षया वयं $\sum_{i=1}^{30} x_i$ इति लिखामः। एतत् $i = (1$ तः 30 पर्यन्तम्) विद्यमानानां x_i मानानां योगः इति पठामः।

अतः $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

तथैव ('n' अवलोकनानां कृते)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{30}$$

उदाहरणम् 11 कस्मिंश्चित् विद्यालये नवम्याः कक्ष्यायाः 30 छात्रैः प्राप्ताङ्कानां माध्यम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - इदानीं $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{30}}{30}$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88 + 80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50 + 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$$

$$\bar{X} = \frac{1779}{5} = 59.3$$

अस्यां प्रक्रियायाम् अधिकः समयव्ययः भवति खलु? अस्याः सरलीकरणं शक्यते वा ? अत्र अवलोकयन्तु यत् अस्य दत्तांशस्य कृते वयं आवृत्ति-कोष्ठकं निर्मितवन्तः।(14.1 तमं कोष्ठकम्)
अस्मात् कोष्ठकात् ज्ञायते यत् एकः छात्रः 10 अङ्कान्, एकःछात्रः 20 अङ्कान्, त्रयः छात्राः 36 अङ्कान्, चत्वारः छात्राः 40 अङ्कान्, त्रयः छात्राः 50 अङ्कान्, द्वौ छात्रौ 56 अङ्कान्, चत्वारः छात्राः 60 अङ्कान्, चत्वारः छात्राः 70 अङ्कान् , एकः छात्रः 72 अङ्कान्, एकः छात्रः 80 अङ्कान्, द्वौ छात्रौ 88 अङ्कान्, त्रयः छात्राः 92 अङ्कान्, एकः छात्रः 95 अङ्कान्, च प्राप्तवन्तः।

अतः सर्वैः मिलित्वा प्राप्ताः अङ्काः $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50) + (2 \times 56) + (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92) + (1 \times 95)$
$= f_1 x_1 + \ldots\ldots + f_{13} x_{13}$ यत्र f_i इति i तमस्य अङ्कस्य आवृत्तिः। (14.1तमे कोष्ठके दर्शितम्)

एतत् संक्षिप्तरूपेण $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$ इति लिखामः।

अतः प्राप्ताः पूर्णाङ्काः $= \sum_{i=1}^{13} f_i x_i = f_i x_i + \ldots + f_{13} x_{13}$

$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95 = 1779$

इदानीं, अवलोकन-आवृत्तीनां योगः $= f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_{13} \left(= \sum_{i=1}^{13} f_i\right)$

$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 = 30$

अतः माध्यः $\bar{x} = \dfrac{\text{सर्वेषाम् अवलोकनानां योगः}}{\text{अवलोकनानां सङ्ख्या}} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i}\right)$

$= \dfrac{1779}{30} = 59.3$

एषा प्रक्रिया अधोदत्ते कोष्ठके प्रदर्शिता अस्ति यत् 14.1 तमस्य कोष्ठकस्य परिष्कृतरूपम् अस्ति।

कोष्ठकम् 14.12

अङ्काः (x_i)	**छात्राणां सङ्ख्या (f_i)**	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_i x_i = 1779$

अतः अवर्गीकृत-आवृत्ति-वितरणसन्दर्भे भवन्तः माध्यं ज्ञातुं अधोदत्तं सूत्रम् उपयोक्तुं शक्नुवन्ति।

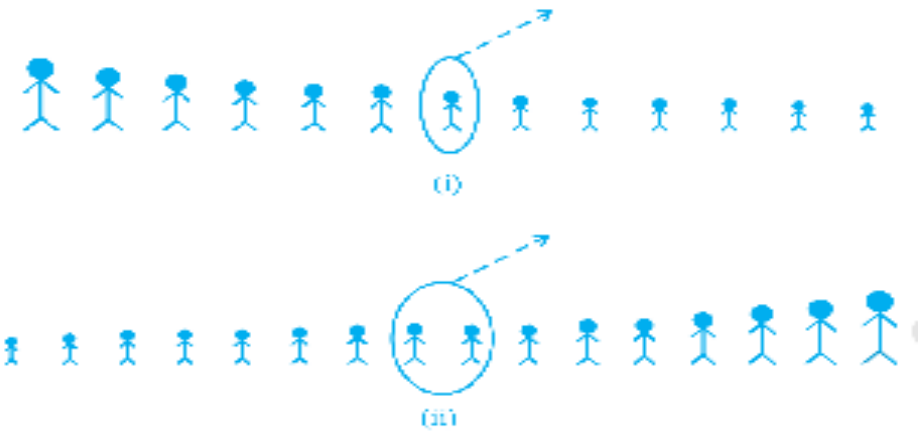
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

इदानीं वयं पुनः हरिमेर्योः मध्ये प्रवृत्तं विवादं प्रति गचछाम। तत्र द्वितीयां स्थितिं स्वीकुर्मः यत्र हरिः सर्वेभ्यः मध्यमम् अङ्कं दर्शयित्वा स्वस्य प्रदर्शनम् उत्तमम् इति साधितवान्। यथा पूर्वमेव उक्तम्, अस्य केन्द्रीय प्रवृत्तेः मापस्य नाम *माध्यकम्* इति उच्यते।

माध्यकं नाम अवलोकनसङ्ख्यानां तत् मानम् यत् ताः संख्याः समभागद्वयेन विभजति। अतः यदा दत्तांशः आरोहणक्रमेण वा अवरोहणक्रमेण वा लिख्यते, तदा अवर्गीकृतस्य दत्तांशस्य माध्यकम् अधोदत्त प्रकारेण गण्यते।

(i) यदा अवलोकनानां सङ्ख्या (n) विषमा सङ्ख्या भवति, तदा माध्यकं $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ तमम् अवलोकनम्। उदा - यदा n = 13, तदा $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ तमं अवलोकनम् अर्थात् सप्तमम् अवलोकनम् एव माध्यकं भवति। (14.9(i) तमाम् आकृतिं पशयन्तु)

(ii) यदा अवलोकनानां सङ्ख्या (n) समसङ्ख्या अस्ति, माध्यकं तु $\left(\frac{n}{2}\right)$ तमस्य अवलोकनस्य तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ तमस्य अवलोकनस्य माध्यः अस्ति। उदा.यदा n = 16, $\left(\frac{16}{2}\right)$ तमस्य अवलोकनस्य तथा $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ तमस्य अवलोकनस्य मानयोः माध्यः एव माध्यकम् अस्ति। अर्थात् अष्टमस्य, नवमस्य अवलोकनयोः माध्यः एव माध्यकं भवति। [14.9 (ii) आकृतिं पशयन्तु)



आकृतिः 14.9

एतत् वयं कैश्चित् उदाहरणैः दर्शयामः ।

उदाहरणम् 12 : कस्यचित् वर्गस्य 9 छात्राणां औन्नत्यम् (cm मित्याम्) अधोदत्ता अस्ति ।

155 160 145 149 150 147 152 144 148

अस्य दत्तांशस्य माध्यकं परिकलयन्तु ।

समाधानम् - आदौ वयं दत्तांशम् अवरोहणक्रमे स्थापयामः ।

144 145 147 148 149 150 152 155 160

छात्राणां सङ्ख्या 9 विषमा सङ्ख्या इति कारणेन, माध्यकं $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ तमस्य छात्रस्य औन्नत्यम् अर्थात् $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ तमस्य = 5 पञ्चमस्य छात्रस्य औन्नत्यम् = 149 cm एव अस्य दत्तांशस्य माध्यकं अस्ति । अतः माध्यक-औन्नत्यम् = 149 cm ।

उदाहरणम् 13 : कस्यांश्चित् क्रीडासरण्यां केनचित् कबडी गणेन प्राप्ताः बिन्दवः अधोदत्ताः सन्ति ।

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

गणेन प्राप्त-बिन्दूनां माध्यकम् अन्विषन्तु ।

समाधानम् - गणेन प्राप्त-बिन्दून् आरोहणक्रमे स्थापयामः।

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

अत्र 16 पदानि सन्ति । अतः अत्र मध्यपद-द्वयम् अस्ति । अर्थात् $\frac{16}{2}$ तमं तथा $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ तमं पदम् अर्थात् अष्टमं तथा नवमं पदम् ।

अतः माध्यकं तु अष्टम-नवमपदयोः मानयोः माध्यः अस्ति।

अर्थात् माध्यकं तु $\frac{10+14}{2} = 12$

अतः कबडी-गणेन प्राप्तः माध्यक-बिन्दुः 12 अस्ति।

पुनः एक वारं हरिमेर्योः मध्ये वर्तमानं अनिर्णीत-तर्कं प्रति पुनर्गच्छामः।

हरिणा माध्यम् अवगन्तुं प्रयुक्तः तृतीयः प्रकारः अस्ति बहुलकः।

बहुलकः नाम तस्य अवलोकनस्य मानं भवति यत् अवलोकनम् अधिकवारं पुनरावर्तते। अर्थात् यस्य अवलोकनस्य आवृत्तिः अधिकतमा अस्ति तत् अवलोकनम् बहुलकः इति उच्यते।

सिद्धवस्त्रागाराः, पादत्राण-निर्माणकाराः च अस्य केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापम् बहुधा उपयुञ्जते। अस्य बहुलकस्य ज्ञानेन एते आगाराः कस्य मापयुक्तस्य उत्पादनम् अधिकशः करणीयम् इति निश्चयं कुर्वन्ति।

एतं विषयं एकेन उदाहरणेन निरूपयामः।

उदाहरणम् 14 : 20 छात्रैः प्राप्तानां अधोदत्तानां अङ्कानां (10 अङ्केभ्यः) बहुलकं परिकलयन्तु।

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

समाधानम् - अधोदत्तेन क्रमेण दत्तांशम् स्थापयामः

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

अत्र 9 बहुवारम् आवर्तते इति कारणेन अस्य दत्तांशस्य बहुलकः 9 इति वदामः।

उदाहरणम् 15 : कस्याश्चित् यन्त्रशालायाः लघु-विभागे 5 कर्मचारिणः, एकःपर्यवेक्षकः, तथा चत्वारः श्रमिकाः सन्ति। श्रमिकाः प्रत्येकः अपि प्रति-मासं रु.5000/- वेतनं प्राप्नोति। पर्यवेक्षकः प्रतिमासं रु.15000 प्राप्नोति। अस्य यन्त्रशाला-विभागस्य वेतनानां माध्यं, माध्यकं तथा बहुलकम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - माध्यः $= \frac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$

अतः माध्य-वेतनम् प्रतिमासं रु.7000।

माध्यकं प्राप्तुं वयं वेतनानि आरोहि-क्रमेण स्थापयामः।

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

यतः यन्त्रशालायां विद्यमानानां कर्मचारीणां सङ्ख्या 5, माध्यकं तु $\frac{5+1}{2}$ तमम् $= \frac{6}{2}$ तमम् अवलोकनम् = तृतीयम् अवलोकनम्। अतः माध्यकं तु प्रतिमासः रु.5000 अस्ति।

वेतनानां बहुलकं अवगन्तुं अर्थात् बहुलकं वेतनं अवगन्तुं, 5000 दत्तांशे 5000, 5000, 5000, 5000, 15000 बहुवारं आवर्तते इति अवलोकयामः। अतः बहुलकं वेतनं 5000 अस्ति।

इदानीं उपरिदत्ते उदाहरणे दत्तांशस्य केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापत्रयम् अपि तोलयन्तु। भवन्तः पश्यन्ति यत् माध्य-वेतनम् रु.7000 तेषां वेतनेषु एकस्य अपि वेतनस्य आसन्न-गणनां न सूचयति। किन्तु माध्यकं तथा बहुलक-वेतनम् यत् रु.5000 तत् दत्तांशम् इतोऽपि सम्यक् निरूपयति।

दत्तांशे चरम-मानानि माध्यं बाधन्ते। एतत्, माध्यस्य दौर्बल्येषु अन्यतमम् अस्ति। अतः दत्तांशे केचन बिन्दवः अन्य-बिन्दुभ्यः दूरे सन्ति चेत् माध्यः दत्तांशस्य उत्तम-निरूपणं न भवति। यतः माध्यकं, बहुलकः च दत्तांशे विद्यमानैः चरम-मानैः न बाध्येते, अतः ते अस्मिन् सन्दर्भे माध्यस्य अपेक्षया उचितं प्रातिनिध्यं यच्छन्ति।

पुनः वयं हरिमेर्योः स्थितिं प्रति गच्छामः तथा केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापत्रयान् अपि तोलयामः।

केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापाः	**हरिः**	**मेरी**
माध्यः	8.2	8.4
माध्यकं	10	8
बहुलकः	10	8

अनेन तोलनेन वयं अवगतवन्तः यत् एतेषु एकोऽपि केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापः, समीचीनतरस्य छात्रस्य निष्कर्ष-प्राप्तौ पर्याप्तः नास्ति इति। अस्माभिः एतं निष्कर्षं प्राप्तुं इतोऽपि काश्चन सूचनाः अपेक्ष्यन्ते यासां विषये भवन्तः उच्च-वर्गेषु पठिष्यन्ति।

प्रश्नावलिः 14.4

1. कस्याश्चित् क्रीडासरण्याः 10 क्रीडासु केनचित् गणेन प्राप्ताः बिन्दवः अधोदत्ताः सन्ति

   2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

   एतेषां प्राप्त-बिन्दूनां माध्यं,माध्यकम्,बहुलकं च अन्विषन्तु।

2. 15 छात्राणां कृते दत्तायां गणित-परीक्षायां अधोदत्ताः अङ्काः (शताङ्कानां कृते) अभिलिखिताः सन्ति

   41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

   अस्य दत्तांशस्य माध्यं, माध्यकम्,बहुलकम् च अन्विषन्तु।

3. अधोदत्तानि अवलोकनानि आरोहणक्रमे स्थापितानि सन्ति। यदि अस्य दत्तांशस्य माध्यकं 63, x इत्यस्य मानं अन्विषन्तु।

   29, 32, 48, 50, x x+2, 72, 78, 84, 95

4. 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 इत्यस्य दत्तांशस्य बहुलकम् अन्विषन्तु।

5. कस्याञ्चित् यन्त्रशालायां 60 श्रमिकानां वेतनानि कोष्टके अधोदत्तानि सन्ति । वेतनानां माध्यम् अन्विषन्तु ।

वेतनानि (रुप्यकेषु)	श्रमिकानां सङ्ख्या
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1
पूर्णसङ्ख्या	**60**

6. अधोदत्तस्य सन्दर्भस्य एकम् उदाहरणम् यच्छन्तु यत्र

   (i) माध्यः केन्द्रीय-प्रवृत्तेः उचितः मापः।

   (ii) माध्यः कन्द्रीय-प्रवृत्तेः उचितःमापः नास्ति, परन्तु माध्यकं कन्द्रीय-प्रवृत्तेः उचितः मापः।

14.6 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः

1. निश्चित-प्रयोजनार्थम् सङ्गृहीताः तथ्याः वा अवलोकनांशाः वा दत्तांशः इति उच्यते ।
2. दत्तांशस्य प्रस्तावना,विश्लेषणम्,व्याख्यानम् इत्येषां अध्ययनस्य विभागः संख्याशास्त्रम् इति उच्यते ।
3. आलेखीय-विधानेन दण्ड-आलेखेन, आलेख-चित्रेण, तथा आवृत्ति-बहुभुजेन च दत्तांशं निरूपयितुं शक्नुमः ।
4. अवर्गीकृत-दत्तांशस्य कृते केन्द्रीय-प्रवृत्तेः माप-त्रयं तु

   (i) माध्यः सर्वेषां अपि अवलोकनानां मानांनां योगः अवलोकनानां पूर्णसङ्ख्यया विभज्यते चेत् सः माध्यः इति उच्यते । सः तु $\bar{x}$ इति सूच्यते ।

   अतः $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$. । अवर्गीकृत-आवृत्ति-वितरणस्य कृते $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

(ii) सर्वेषां मध्ये विद्यमानस्य अवलोकनस्य(अवलोकनयोः) मानं माध्यकं इति उच्यते।

यदि n विषमा-सङ्ख्या ,तर्हि माध्यकं = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ तमस्य अवलोकनस्य मानम् अस्ति।

यदि n समा-सङ्ख्या, तर्हि माध्यकं = $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ तमस्य अवलोकनस्य तथा $\left(\frac{n}{2}\right)$ तमस्य अवलोकनस्य मानयोः माध्यः अस्ति।

(iii) बहुलकः तु तत् अवलोकनं यत् दत्तांशे अधिकशः पुनरावर्तते।

अध्यायः 15

प्रायिकता

अवसर-क्रीडाभिः आरब्धं विज्ञानं तत्तु मानवीयज्ञानस्य अतिमुख्यविषयत्वेन वर्धनम् - इत्येषः श्लाघनीयः अंशः।

- पीयर् सैमन् लाप्प्लास्

15.1 प्रस्तावना

अस्माकं दैनन्दिने जीवने ईदृशवाक्यानि शृणुमः –

(1) अद्य **प्रायः** वर्षति।

(2) सः लघुपरीक्षायाम् उत्तीर्णः भवेत् वा इति मे **संशयः**।

(3) कवितायाः वार्षिकपरीक्षायां प्रथमस्थानस्य **सम्भवः** अधिकः।

(4) इन्धनतैलस्य मूल्य-वर्धनस्य अधिका **सम्भावना** अस्ति।

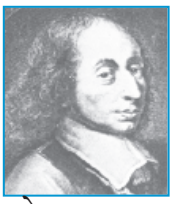
(5) अद्यतन-स्पर्धायां नाणकोत्क्षेपण-पर्याये भारतस्य जयस्य **अर्धसम्भावना** अस्ति।

अत्र प्रायः, प्रायशः, संशयः, सम्भवः, सम्भावना इत्यादीनि पदानि वाक्येषु अनिश्चिततार्थं द्योतयितुम् उपयुक्तानि। उदाहरणार्थं प्रथमे वाक्ये – 'प्रायः वर्षति' इत्यत्र वृष्टिसम्भावनां सूचयति। पूर्वं समानसन्दर्भेषु जातायाः वृष्टेः अनुभवम् अवलम्ब्य प्रागुक्तिं कुर्मः। द्वितीयवाक्यतः पञ्चमवाक्यपर्यन्तं विद्यमानासु स्थितिषु अपि समानां प्रागुक्तिं कुर्मः।

बहुषु प्रसङ्गेषु 'प्रायः' इत्यादिपदानाम् अनिश्चिततां प्रायिकताद्वारा सङ्ख्याभिः मापयितुं शक्नुमः। यद्यपि प्रायिकता द्यूतात् एव आरब्धा, इदानीं भौतिकविज्ञानं, वाणिज्यं, जीवविज्ञानं, वैद्यकीयं, वातावरणपूर्वानुमानम् इत्यादिषु क्षेत्रेषु अधिकतया उपयुज्यते।

15.2 प्रायिकता - कश्चन प्रायोगिक-दृष्टिकोणः

पूर्वतकक्ष्यासु नाणकोत्क्षेपणेन, द्यूतक्रीडायाम् अक्षक्षेपणेन, अन्यैश्च क्रियाकलापैः भवन्तः प्रायिकतायाः परिचयं प्राप्तवन्तः। तेषां परिणामान् च अवलोकितवन्तः। इदानीं भवन्तः कस्यांचित् घटनायां कस्यचन निर्दिष्टपरिणामस्य प्राप्तियोगस्य मापनं पठिष्यन्ति।



ब्लेज पास्कल (1623-1662)
आकृतिः 15.1

प्रायिकतायाः कल्पना केनचित् विचित्रप्रकारेण वर्धिता अभवत्। 1654 तमे वर्षे कश्चन द्यूतक्रीडकः – च्यवालियर् मैड् महोदयः सप्तदशशतकस्य फ्रैन्स्-देशीयः तत्त्वज्ञं तथा गणितज्ञं ब्यैस् पास्कल् वर्यं कासाञ्चन द्यूतक्रीडासमस्यानां निवारणार्थं मिलितवान्। पास्कल्-वर्यः एतासु समस्यासु अभिरुचिं प्राप्य ताः अधीत्य अन्येन फ्रान्स्देशीय-गणितज्ञेन पियर्-डी.फार्माट्-वर्येण सह चर्चितवान्। पास्कल-वर्यः फेर्मट्-वर्यः च तासां समस्यानां समाधानं स्वतन्त्ररूपेण कृतवन्तौ। एतत् कार्यम् एव प्रायिकतासिद्धान्तस्य मूलभूतं कार्यम् अभवत्।



पियरे डि फर्मा (1601-1665)
आकृतिः 15.2

प्रायिकतायाः विषये ऐदम्प्राथम्येन कश्चन इटालीय-गणितज्ञः जे कैरेडन् वर्यः (1501 - 1576) पुस्तकं लिखितवान्। अस्य पुस्तकस्य शीर्षकं तु सम्भावनाक्रीडाविषयकम् इति (लिबर् डी लूडो ऐले द्वारा 1663 तमे वर्षे प्रकाशितम्)। अस्मिन् क्षेत्रे जे.बिर्नोली-वर्येण (1654 – 1705), पी.लाप्लास् (1749 – 1827), ए.ए.मार्कव् (1856 – 1922), ए.एन्.कोल्मोगोरव् (1903 वर्षे जातः) इत्येतैः अपि महत्त्वभूतयोगदानं कृतम्।

प्रथमः क्रियाकलापः - (i) किञ्चन नाणकं स्वीकृत्य दशवारम् उत्क्षिपन्तु। तथा कतिवारं शिरः पुच्छं च प्राप्तम् इति गणयन्तु। अधोदत्तप्रकारेण कोष्ठकद्वारा भवताम् अवलोकनानि कथयन्तु –

15.1 कोष्ठकम्

नाणक-उत्क्षेपण-सङ्ख्या	शिरःप्राप्ति-सङ्ख्या	पुच्छप्राप्ति-सङ्ख्या
10	_	_

अधोदत्तानां भिन्नराशीनां मानानि लिखन्तु।

$$\frac{\text{शिरःप्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{नाणक-उत्क्षेपण-पूर्णसङ्ख्या}}$$

$$\frac{\text{पुच्छ-प्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{नाणक-उत्क्षेपण-पूर्णसङ्ख्या}}$$

(ii) नाणकं 20वारम् उत्क्षिपन्तु तथैव स्व-अवलोकनानि च कथयन्तु । पुनः इदानीं प्राप्तावलोकनैः उपरिदत्त-भिन्नराश्योः मानानि अन्विषन्तु ।

(iii)नाणकस्य उत्क्षेपणम् अधिकं कृत्वा एतं प्रयोगम् आवर्तयन्तु । तथा शिरः-पुच्छ-सङ्ख्यां कथयन्तु। अग्रे सङ्गतभिन्नराशीनां मानानि अन्विषन्तु ।

भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् यथा यथा नाणक-उत्क्षेपणसङ्ख्या अधिका भवति तदा भिन्नराश्योः मानानि 0.5 इत्यस्य आसन्नानि भवन्ति । अधिकाधिकं नाणकोत्क्षेपणसमये किं भवति इति अवगन्तुम् अधोदत्तं गणक्रियाकलापं कर्तुं शक्यते ।

द्वितीयः क्रियाकलापः - कक्ष्यां द्वित्रच्छात्राणां गणैः विभजन्तु । प्रतिगणे विद्यमानं एकः छात्रः नाणकं पञ्चदशवारम् उत्क्षिपतु । समानगणस्य अन्यः छात्रः शिरपुच्छसम्बद्ध-उत्क्षेपणस्य अवलोकनानि कथयतु (अत्र अवगच्छन्तु यत् समानमूल्ययुक्त-नाणकानि एव उपयोक्तव्यानि । अत्र एवं स्वीक्रियते यत् सर्वैः गणैः समानं नाणकम् एव प्रयुक्तम् इति ।)

इदानीं कृष्णफलके15.2 कोष्ठकवत् किञ्चन कोष्ठकं निर्मान्तु । आदौ प्रथमगणीयच्छात्राः स्व-अवलोकनानि लिखित्वा तत्सम्बद्धानां भिन्नराशीनां मानानि परिकलयितुं शक्नुवन्ति । अग्रे द्वितीयगणच्छात्राः स्व-अवलोकनानि प्रथम-द्वितीय-गणयोः संयुक्त-मानानि परिकलयेयुः (एताः भिन्नराशीः सञ्चितभिन्नराशयः इति वदामः)। कस्याश्चित् कक्ष्यायाः प्रथमपङ्क्तित्रये उपविष्टच्छात्रैः दत्तावलोकनानि अधोदत्तकोष्ठके दत्तम् ।

15.2 – कोष्ठकम्

गणः	शिरस् सङ्ख्या	पुच्छ सङ्ख्या	सञ्चय-शिरस्-सङ्ख्या / नाणक-उत्क्षेपण-पूर्णसङ्ख्या	सञ्चय-पुच्छ-सङ्ख्या / नाणक-उत्क्षेपण-पूर्णसङ्ख्या
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	:	:	:	:

उपरितनान् कोष्ठकात् किम् अवलोकयन्ति ? भवन्तः अवगन्तुं शक्नुवन्ति यत् यदा नाणकस्य पूर्णोत्क्षेपणसङ्ख्या वर्धिता भवति तदा चतुर्थे पञ्चमे स्तम्भे विद्यमानानां भिन्नराशीनां मानानि 0.5 इत्यस्य आसन्नानि भवन्ति इति।

तृतीयः क्रियाकलापः - (i) कञ्चन अक्षं 20 वारं क्षिप्त्वा तत्र कतिवारं 1, 2, 3, 4, 5, 6 इति सङ्ख्याः प्राप्ताः इति कथयन्तु। स्व-अवलोकनानि 15.3 कोष्ठकवत् कोष्ठके लिखन्तु।

कोष्ठकम् – 15.3

अक्षक्षेपणसङ्ख्या	अधोदत्तानां मानानां सङ्ख्या					
	1	2	3	4	5	6
20						

अधोदत्तभिन्नराशीनां मानानि अन्विषन्तु।

$$\frac{\text{1 इत्यस्याः प्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{अक्षक्षेपणपूर्णसङ्ख्या}}$$

$$\frac{\text{2 इत्यस्याः प्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{अक्षक्षेपणपूर्णसङ्ख्या}}$$

$$\frac{\text{6 इत्यस्याः प्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{अक्षक्षेपणपूर्णसङ्ख्या}}$$

(ii) इदानीम् अक्षं 40-वारं क्षिप्त्वा तानि मानानि कथयन्तु। तत्सम्बद्धानि भिन्नराशिमानानि यथा (i) स्थित्यां कृतम् , तथैव गणयन्तु।

यदा अक्षस्य क्षेपणसङ्ख्या वर्धिता भवति तदा भवन्तः अवगन्तुं शक्नुवन्ति यत् प्रत्येकं भिन्नस्य मानं यत् 1, 2 स्थित्यां परिकलितं, तत् $\frac{1}{6}$ इत्यस्य आसन्नं भवति।

एतद् अवगन्तुं यथा द्वितीयक्रियाकलापः कृतः, तथा अन्यः कश्चन गणक्रियाकलापः कर्तुं शक्यः। भवतां कक्ष्याच्छात्रान् लघुगणेषु विभजन्तु। प्रत्येकं गणे एकः छात्रः अक्षं दशवारं क्षिपेत्। अवलोकनानि लिखित्वा सञ्चयभिन्नराशयः परिकलनीयाः।

15.4 तमे कोष्ठके एक-सङ्ख्यायाः भिन्नराशेः मानं लेखितुं शक्यते। अन्यासां सङ्ख्यानां भिन्नराशीनां मानानि लेखितुम् अपि अस्य कोष्ठकस्य उपयोगं कर्तुं शक्यते। अथवा अन्यासां सङ्ख्यानां कृते समानप्रकारेण कोष्ठकं निर्मातुं शक्यते।

कोष्ठकम् – 15.4

गणः (1)	**प्रतिगणम् अक्षक्षेपणपूर्णसङ्ख्या** (2)	**$\frac{\text{1 इत्यस्याः प्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{अक्षक्षेपणपूर्णसङ्ख्या}}$** (3)
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—

सर्वैः गणैः उपयुज्यमाना H अक्षाः आकृत्या आमापे च समाः स्युः। तदा सर्वाणि क्षेपणानि समानाक्षस्य क्षेपणानि इति स्वीक्रियन्ते।

एतेभ्यः कोष्ठकेभ्यः भवन्तः किम् अवगच्छन्ति ?

भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् यथा यथा क्षेपणसङ्ख्या वर्धते, तथा तथा तृतीये स्तम्भे विद्यमानभिन्नराशयः $\frac{1}{6}$ इत्यस्य आसन्नाः भवन्ति इति।

चतुर्थः क्रियाकलापः - (i) युगपत् नाणकद्वयम् उत्क्षिप्य स्व-अवलोकनानि अधोदत्तकोष्ठकरूपेण लिखन्तु।

कोष्ठकम् – 15.5

नाणकद्वयोत्क्षेपणसङ्ख्या	**शिरसः अप्राप्तिसङ्ख्या**	**एकशिरसः प्राप्तिसङ्ख्या**	**शिरो-द्वयस्य प्राप्तिसङ्ख्या**
10	—	—	—

अधोदत्तभिन्नान् लिखन्तु –

$$A = \frac{\text{शिरसः अप्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{नाणकद्रव्यस्य उत्क्षेपणपूर्णसङ्ख्या}}$$

$$B = \frac{\text{एकशिरसः अप्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{नाणकद्रव्यस्य उत्क्षेपणपूर्णसङ्ख्या}}$$

$$C = \frac{\text{शिरोद्वयस्य अप्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{नाणकद्रव्यस्य उत्क्षेपणपूर्णसङ्ख्या}}$$

एतेषां भिन्नराशीनां मानानि अवगच्छन्तु।

इदानीं द्वितीयक्रियाकलापवत् उत्क्षेपणस्य सङ्ख्यां वर्धयन्तु । भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् यदा उत्क्षेपणसङ्ख्या अधिका, तदा *A*, B, C इत्येतेषां मानानि क्रमशः 0.25, 0.5, 0.25 इत्येतेषाम् आसन्नानि भवन्ति।

प्रथमे क्रियाकलापे नाणकस्य प्रत्येकम् उत्क्षेपणम् यत्नः इति उच्यते । तथैव तृतीये क्रियाकलापे अक्षस्य प्रत्येकं क्षेपणम् अपि यत्नः इति उच्यते। तथा चतुर्थे क्रियाकलापे नाणकद्वयस्य युगपत् उत्क्षेपणम् अपि यत्नः इति उच्यते।

अतः यत्नः काचित् क्रिया अस्ति या एकाधिकान् परिणामान् प्रयच्छति । प्रथमे क्रियाकलापे सम्भावित-परिणामौ तु शिरः, पुच्छं च इति। तृतीये क्रियाकलापे सम्भावितपरिणामाः तु 1, 2, 3, 4, 5, 6 इति सङ्ख्याः। प्रथमे क्रियाकलापे कस्मिंश्चित् विशिष्टक्षेपणे शिरसः प्राप्तिः शिरः-फलित-घटना । तथैव पुच्छ-फलित-घटना अपि काचन घटना यस्याः परिणामः पुच्छम् इति।

द्वितीये क्रियाकलापे कस्याश्चित् विशिष्टसङ्ख्यायाः प्राप्तिः, यथा एकसङ्ख्यायाः प्राप्तिः, काचित् घटना अस्ति यस्याः फलितम् एकम् इति।

यदि समसङ्ख्याप्राप्त्यै अक्षक्षेपणप्रयोगः क्रियते, तर्हि अस्माकं घटनायां त्रयः परिणामाः भवन्ति यथा - 2, 4, 6.

अतः प्रयोगस्य घटना तु तस्याः घटनायाः सम्बद्धपरिणामानां सङ्ग्रहः। दशमीकक्ष्यायां घटनायाः इतोऽपि औपचारिकं लक्षणं पठिष्यन्ति।

अतः चतुर्थक्रियाकलापे विद्यमानाः घटनाः काः इति वक्तुं शक्नुवन्ति किम् ?

अनया पृष्ठभूम्या इदानीं प्रायिकता नाम का इति पश्यामः। यत्नस्य परिणामानां साक्षात् अवलोकनेन प्रायोगिकप्रायिकताम् अथवा आनुभविकप्रायिकताम् अन्विषामः।

n इति यत्नानां सङ्ख्या भवतु। घटनायाः आनुभविकप्रायिकता P(E),

$$P(E) = \frac{\text{यत्नसङ्ख्या यत्र अपेक्षितघटना जाता}}{\text{यत्नानां पूर्णसङ्ख्या}}$$

अस्मिन् अध्याये आनुभविकप्रायिकताविषये पठामः किन्तु तां प्रायिकता इत्येव सूचयामः। कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

आदौ द्वितीयं क्रियाकलापं 15.2 तमं कोष्ठकं च गच्छामः। अस्य कोष्ठकस्य चतुर्थे स्तम्भे भवन्तः कां भिन्नराशिं परिकलितवन्तः? न कामपि। किन्तु सा शिरःप्राप्तेः आनुभविकप्रायिकता। अत्र अवगच्छन्तु यत् यत्नानां सङ्ख्या, शिरस्सङ्ख्यां च अवलम्ब्य प्रायिकता परिवर्तमाना आसीत्। तथैव 15.2तमस्य कोष्ठकस्य पञ्चमे स्तम्भे पुच्छप्राप्तेः प्रायिकता अपि परिवर्तमाना आसीत्। अर्थात् – आदौ $\frac{12}{15}$ आसीत्। अग्रे $\frac{2}{3}$ अभवत्। ततोपि अग्रे $\frac{28}{45}$ अभवत्, इत्यादीनि।

अतः आनुभविकप्रायिकता तु यत्नानां सङ्ख्यां तथा ततः प्राप्तानाम् अभीष्टपरिणामानां सङ्ख्याम् च अवलम्ब्य तिष्ठति।

पञ्चमः क्रियाकलापः - अग्रे गमनात् पूर्वं भवद्भिः तृतीये क्रियाकलापे चित्रितं कोष्ठकं पश्यन्तु। यदा कश्चन अक्षः कतिपयवारं क्षिप्यते तदा '३' इति सङ्ख्यायाः प्राप्तेः प्रायिकतां अन्विषन्तु। अपि च यदा यत्नसङ्ख्या वर्धिता भवति तदा प्रायिकता कथं परिवर्तते इति निरूपयन्तु।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् 1 : किञ्चन नाणकम् अधोदत्त-आवृत्तिभिः सह सहस्रवारम् उत्क्षिप्यते।

शिरः : 455, पुच्छम् : 545. प्रत्येकं घटनायाः प्रायिकतां परिकलयन्तु।

समाधानम् - यतः नाणकं सहस्रवारम् उत्क्षिप्यते अतः यत्नानां पूर्णसङ्ख्या तु सहस्रम्। शिरःप्राप्तेः तथा पुच्छप्राप्तेः घटने तु क्रमशः E, F इति वदामः। तदा E आवृत्तिसङ्खा अर्थात् शिरःप्राप्तिसङ्ख्या तु 455 अस्ति।

$$\text{E इत्यस्य प्रायिकता} = \frac{\text{शिरःप्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{यत्नपूर्णसङ्ख्या}}$$

$$P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

तथैव

$$\text{पुच्छप्राप्ति-घटनायाः प्रायिकता} = \frac{\text{पुच्छ-प्राप्तिसङ्ख्या}}{\text{यत्नपूर्णसङ्ख्या}}$$

$$P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

अस्मिन् उदाहरणे अवगच्छन्तु यत् P(E) + P(F) = O.455 + 0.545 = 1 तथा प्रत्येकं घटनायां E, F इति परिणामद्वयमेव सम्भावयितुं शक्नुमः।

उदाहरणम् - किञ्चन नाणकद्वयं युगपत् पञ्चशतवारम् उत्क्षिप्यते। अनेन अधोदत्तं प्राप्नुमः।

शिरोद्वयम् : 105 वारम्

एकं शिरः : 275 वारम्

शिरसः अप्राप्तिः : 120 वारम्

प्रत्येकं घटनायाः प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - अत्र विद्यमानां प्रत्येकं घटनाम् अर्थात् शिरोद्वयप्राप्तिः, एकशिरःप्राप्तिः शिरसः अप्राप्तिः च क्रमशः E_1, E_2, E_3 इति सूचयामः।

अतः $P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$

अतः $P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$

अतः $P(E_3) = \frac{120}{100} = 0.24$

अत्र अवगच्छन्तु यत् $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$ अपि च E_1, E_2, E_3 सर्वान् यत्नपरिणामान् कथयन्ति।

उदाहरणम् 3 : कश्चन अक्षः सहस्रवारं क्षिप्यते, तथा तस्य 1, 2, 3, 4, 5, 6 च इत्येषां परिणामानाम् आवृत्तिः अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति –

15.6 कोष्ठकम्

परिणामः	1	2	3	4	5	6
आवृत्तिः	179	150	157	149	175	190

प्रत्येकं परिणामस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - i इति परिणामस्य E_i इति घटना भवतु, यत्र $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

तदा i परिणामस्य प्रायिकता $= P(E_1) = \frac{\text{1 सङ्ख्यायाः आवृत्तिः}}{\text{अक्षक्षेपणपूर्णसङ्ख्या}} = \frac{179}{1000} = 0.179$

तथैव $P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15$, $P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157$, $P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149$,

$P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$, $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$

अत्र अवगच्छन्तु यत् $P(E_1) = P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$

अपि च अवगच्छन्तु यत्

(i) प्रत्येकं घटनायाः प्रायिकता 0, 1 इत्यनयोः मध्ये एव भवति।

(ii) सर्वेषां प्रायिकतानां योगः 1 भवति।

(iii) $E_1, E_2, \ldots E_6$ च प्रत्येकं यत्नस्य सम्भावितान् सर्वान् परिणामान् अन्तर्भावयति।

उदाहरणम् 4 : कस्याश्चन दूरवाणी-मार्गदर्शिकायाः एकस्मिन् पुटे द्विशतं सङ्ख्याः आसन्। तेषां मात्रकस्थानाङ्कस्य आवृत्तेः वितरणं (उदाहरणार्थम् 25828573 इत्यस्यां सङ्ख्यायां मात्रस्थानाङ्कः 3 अस्ति।) 15.7 कोष्ठके दत्तम् अस्ति।

कोष्ठकम् – 15.7

अङ्कः	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
आवृत्तिः	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

पुटदर्शनं विना अङ्कनी दत्तसङ्ख्यासु एकस्यां सङ्ख्यायां स्थापिता भवेत्। अर्थात् सङ्ख्या यादृच्छिकया चिता स्यात्। अत्र मात्रकस्थाने विद्यमानः अङ्कः 6 इति भवितुं का प्रायिकता अस्ति ?

समाधानम् - 6 अङ्कः मात्रकस्थाने भवितुं प्रायिकता

$$= \frac{\text{6 इत्यस्य आवृत्तिः}}{\text{चितदूरवाणीसङ्ख्यानां पूर्णसङ्ख्या}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

तथैव मात्रकस्थाने विद्यमानानाम् अन्य-अङ्कयुक्त-सङ्ख्यानां घटनानाम् आनुभविकप्रायिकताम् अपि प्राप्तुं शक्नुमः।

उदाहरणम् 5 : कस्मिंश्चित् वातावरणसूचनाकेन्द्रे - गतानां 250 दिनानां (निरर्गलतया) अभिलेखेषु अस्य केन्द्रस्य वातावरणपूर्वानुमानं 175 वारं साधु आसीत्।

(i) कस्मिंश्चित् दत्ते दिने केन्द्रस्य पूर्वानुमानं साधु भवितुं का प्रायिकता अस्ति ?

(ii) कस्मिंश्चित् दत्ते दिने केन्द्रस्य पूर्वानुमानम् असाधु भवितुं का प्रायिकता अस्ति ?

समाधानम् - अभिलेख-उपलब्ध-दिनानां पूर्णसङ्ख्या = 250

(i) P(साधुपूर्वानुमान-युत-दिनम्)

$$= \frac{\text{साधुपूर्वानुमानयुतदिनानां पूर्णसङ्ख्या}}{\text{अभिलेख-उपलब्धदिनानां पूर्णसङ्ख्या}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) असाधुपूर्वानुमानयुतदिनानां सङ्ख्या = 250 - 175 = 75

$$\text{P(असाधुपूर्वानुमान-युत-दिनम्)} = \frac{75}{250} = 0.3$$

अत्र अवगच्छन्तु यत्

P(साधुपूर्वानुमान-युत-दिनम्) + P(असाधुपूर्वानुमान-युत-दिनम्)

$$= 0.7 + 0.3 = 1$$

उदाहरणम् 6 : काचित् चक्र-निर्माणसंस्था चक्रपरिवर्तनात् पूर्वं गतस्य दूरस्य कञ्चन अभिलेखम् अस्थापयत्। अधोदत्ते कोष्ठके सहस्रप्रकरणानां परिणामाः दत्ताः सन्ति।

15.8 कोष्ठकम्

दूरम् (km मितम्)	< 4000	4000 तः 9000	9001 तः 14000	>14000
आवृत्तिः	20	210	325	445

यदि भवन्तः अस्याः संस्थायाः अभिचक्रं क्रीणीयुः तर्हि –

(i) चक्रं 4000 km तः पूर्वमेव परिवर्तनीयं भवेत् इत्यस्य का प्रायिकता ?

(ii) 9000 km अग्रे अपि परिवर्तनं विना तिष्ठेत् इत्यस्य का प्रायिकता ?

(iii) 4000 तः 14000 km मध्ये चक्रं परिवर्तनीयं भवेत् इत्यस्य का प्रायिकता ?

समाधानम् - यत्नानां पूर्णसङ्ख्या = 1000

(i) 4000 km पूर्वम्व परिवर्तनीयम् इत्यस्य चक्रस्य आवृत्तिः = 20

अतः P(4000 km पूर्वं परिवर्तनीयं चक्रम्)

$$= \frac{20}{1000} = 0.02$$

(ii) 9000 km अनन्तरं परिवर्तनीयम् इति चक्रस्य आवृत्तिः

$$= 325 + 445 = 770$$

अतः P(9000 km अनन्तरं परिवर्तनीयं चक्रम्) $= \frac{770}{1000} = 0.77$

(iii) 4000 - 14000 km इत्यनयोः मध्ये परिवर्तनीयम् इति चक्रस्य आवृत्तिः = 210 + 325 = 535

अतः P(4000 - 14000 km इत्यनयोः मध्ये परिवर्तनीयं चक्रम्) = $\frac{535}{1000}$ = 0.535

उदाहरणम् 7 : केनचित् छात्रेण मासिकपरीक्षायां प्राप्ताङ्कानां प्रतिशतम् अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति –

15.9 कोष्ठकम्

मासिकपरीक्षा	I	II	III	IV	V
प्राप्ताङ्कप्रतिशतम्	69	71	73	68	74

दत्त-आधारसामग्रीम् अवलम्ब्य मासिकपरीक्षायां छात्रेण 70% इत्यस्मात् अधिकाङ्कप्राप्तेः प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

समाधानम् - मासिकपरीक्षाणां पूर्णसङ्ख्या = 5

छात्रेण 70% इत्यस्मात् अधिकाङ्काः एतावतीषु परीक्षासु प्राप्ताः =3

अतः P(70% इत्यस्मात् अधिकाङ्कप्राप्तिः) = $\frac{3}{5}$ = 0.6

उदाहरणम् 8 : कस्मिंश्चित् नगरे काचन विमासंस्था चालकस्य वयः तथा दुर्घटनानां सम्बन्धं ज्ञातुं यादृच्छिकया 2000 चालकान् अचिनोत् (पक्षपातं विना)। प्राप्तसामग्र्यः कोष्ठके अधोदत्ताः सन्ति।

15.10 कोष्ठकम्

चालकानां वयः (वर्षाणि)	**प्रतिवर्षं दुर्घटनाः**				
	0	**1**	**2**	**3**	**> 3**
18 – 29	440	160	110	61	35
30 – 50	505	125	60	22	18
> 50	360	45	35	15	9

यादृच्छिकया चितचालकाय अधोदत्तघटनानां प्रायिकताम् अन्विषन्तु चालकाः येषां -

(i) 18 – 29 वर्षाणां मध्ये वयः अस्ति, तथा प्रतिवर्षं साक्षात् दुर्घटनात्रयस्य प्राप्तिः

(ii) 30 – 50 वर्षाणां मध्ये वयः तथा प्रतिवर्षम् एकम् अथवा एकाधिकदुर्घटनस्य प्राप्तिः

(iii) प्रतिवर्षं दुर्घटनानाम् अभावः

समाधानम् - चालकानां पूर्णसङ्ख्या = 2000

(i) 18 – 29 वर्षाणां मध्ये चालकाः, तथा येषां प्रतिवर्षं दुर्घटनात्रयम् अस्ति तेषां सङ्ख्या तु 61. अतः

P(18 – 29 वयस्कः चालकः, तथा तस्य प्रतिवर्षं दुर्घटनात्रयं भवति)

$$= \frac{61}{2000}$$

$$= 0.0305 \approx 0.031$$

(ii) 30 – 50 वर्षाणां मध्ये चालकाः, तथा येषां प्रतिवर्षम् एकम् एकाधिकदुर्घटना वा अस्ति तेषां सङ्ख्या तु 125 + 60 + 22 + 18 = 225.

अतः P(30 – 50 वयस्कः चालकः, तथा तस्य प्रतिवर्षम् एकम् एकाधिकदुर्घटना वा भवति)

$$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113$$

(iii) प्रतिवर्षं दुर्घटना-अभावयुतचालकसङ्ख्या = 440 + 505 + 360 = 1305.

अतः P(दुर्घटना-अभावयुतचालकाः) $= \frac{1305}{2000} = 0.653$

उदाहरणम् 9 : (चतुर्दशे पाठे चतुर्थे उदाहरणे 14.3 कोष्ठके) दत्तं वितरणावृत्तिं स्वीकुर्वन्तु। तत्र कक्ष्यायाः 38 छात्राणां भाराः दत्ताः सन्ति।

(i) कक्ष्यायाः कस्यचन छात्रस्य भारः 46 – 60 kg मध्ये भवति इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु

(ii) अस्मिन् सन्दर्भे घटनाद्वयं वदन्तु यत्र एकस्य प्रायिकता 0, अपरस्य च 1 इति

समाधानम् - (i) छात्राणां पूर्णसङ्ख्या 38, तथा 46 – 50 kg मध्ये भारयुतछात्रसङ्ख्या 3 अस्ति।

अतः P(46 – 50 kg अन्तराले विद्यमानस्य छात्रस्य भारः) $= \frac{3}{38} = 0.079$

(ii) उदाहरणार्थम् – छात्रस्य भारः 30 kg इति एकां घटनां स्वीकुर्वन्तु , यतः कस्यापि छात्रस्य भारः 30 kg नास्ति, अतः अस्याः घटनायाः प्रायिकता 0. तथैव 30kg इत्यस्मात् भारात् अधिकभारयुत-छात्रस्य प्रायिकता $= \frac{38}{38} = 1$

उदाहरणम् 10 : पञ्चभ्यः बीजस्यूतेभ्यः प्रतिस्यूतात् 50 बीजानि यादृच्छिकतया चितानि। तथा अङ्कुरार्थं आदर्शवातावरणं कल्पितम् । 20 दिनानन्तरं प्रत्येकस्मिन् सङ्ग्रहे अङ्कुरितबीजानि गणितानि तथा अधोदत्तप्रकारेण अभिलिखितानि।

15.11 कोष्ठकम्

स्यूतः	1	2	3	4	5
अङ्कुरितबीजानि	40	48	42	39	41

(i) स्यूते चत्वारिंशदधिकबीजानाम् अङ्कुरणस्य का प्रायिकता ?

(ii) स्यूते नवचत्वारिंशत् बीजानाम् अङ्कुरणस्य का प्रायिकता ?

(iii) स्यूते पञ्चत्रिंशद् बीजानाम् अङ्कुरणस्य का प्रायिकता ?

समाधानम् - स्यूतानांप पूर्णसङ्ख्या – 5

(i) विद्यमानेषु पञ्चाशत् बीजेषु चत्वारिंशदधिकानि बीजानि अङ्कुरितानि- तादृशस्यूतानां सङ्ख्या = 3

$$P(\text{स्यूते 40 तः अधिकानि अङ्कुरितबीजानि}) = \frac{3}{5} = 0.6$$

(ii) विद्यमानेषु पञ्चाशत् बीजेषु नवचत्वारिंशत् वीजानि अङ्कुरितानि - तादृशस्यूतानां सङ्ख्या = 0

$$P(\text{स्यूते 49 अङ्कुरितबीजानि}) = \frac{0}{5} = 0$$

(iii) विद्यमानेषु पञ्चाशत् बीजेषु 35तः अधिकानि वीजानि अङ्कुरितानि तादृशस्यूतानां सङ्ख्या = 5

$$P(\text{स्यूते 35तः अधिकानि अङ्कुरितबीजानि}) = \frac{5}{5} = 1$$

टिप्पणी - उपरि दत्तेषु सर्वेषु उदाहरणेषु भवन्तः अवलोकितवन्तः यत् कस्याश्चित् घटनायाः प्रायिकता 0 तः 1 पर्यन्तं विद्यमानेषु भिन्नराशिषु अन्यतमा भवितुम् अर्हति।

15.1 प्रश्नावलिः

1. कस्यांचित् क्रिकेट् क्रीडायां प्रताडिका 30 कन्दुकेषु 6 वारं कन्दुकं सीमां प्रापयति। तया कन्दुकं सीमां न प्रापिता - इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

2. अपत्यद्वययुतानि 1,500 कुटुम्बानि यादृच्छिकया चितानि तथा अधोदत्तसामग्र्यः अभिलिखिताः।

कुटुम्बे बालिकानां सङ्ख्या	2	1	0
कुटुम्बानां सङ्ख्या	475	814	211

यादृच्छिकतया चितस्य कुटुम्बस्य अधोदत्तस्थितिषु प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

(i) बालिकाद्वयम् (ii) एका बालिका (ii) बालिकानाम् अभावः

अपि च परिशीलयन्तु यत् एतासां प्रायिकतानां योगः 1 वा इति।

3. चतुर्दशपाठस्य 14.4 अनुच्छेदस्य पञ्चमम् उदाहरणं पश्यन्तु। कस्याञ्चित् कक्ष्यायाम् आगस्ट् मासे जातस्य छात्रस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

4. नाणकत्रयं युगपत् 200 वारं विविधपरिणामयुताभिः अधोदत्त-आवृत्तिभिः उत्क्षिप्यते।

परिणामः	शिरोत्रयम्	शिरोद्वयम्	एकं शिरः	शिरोऽभावः
आवृत्तिः	23	72	77	28

यदि पुनः नाणकत्रयम् अपि युगपत् उत्क्षिप्यते तर्हि शिरोद्वय-प्राप्ति-प्रायिकतां परिकलयन्तु।

5. किञ्चन सङ्घटनं यादृच्छिकया 2,400 कुटुम्बानि चित्वा प्रतिकुटुम्बम् आयस्तरस्य वाहनानां सङ्ख्यायाः च मध्ये सम्बन्धं निश्चेतुं किञ्चन सर्वेक्षणम् अकरोत्। प्राप्तसामग्र्यः अधोदत्तकोष्ठके सूचिताः सन्ति –

मासिक-आ. (रूप्यकाणि)	प्रतिकुटुम्बं वाहनानां सङ्ख्या			
	0	1	2	>2
<7000	10	160	25	0
7000 - 10000	0	305	27	2
10000-13000	1	535	29	1
13000-16000	2	469	59	25
>16000	1	579	82	88

यदि अधोदत्तप्रकारेण कश्चन कुटुम्बः चितः, तर्हि चितकुटुम्बस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु –

(i) प्रतिमासम् आयः 10000 – 13000 रूप्यकाणि तथा साक्षात् वाहनद्वयम् अस्ति।

(ii) प्रतिमासम् आयः 16000 रूप्यकाणि ततोऽधिकं वा, तथा साक्षात् एकं वाहनम् अस्ति।

(iii) प्रतिमासम् आयः < 7000 रूप्यकाणि तथा किमपि वाहनं नास्ति।

(iv) प्रतिमासम् आयः 13000 – 16000 रूप्यकाणि तथा वाहनद्वयात् अधिकम् अस्ति।

(v) एकस्मात् वाहनात् अधिकं नास्ति।

6. चतुर्दशे पाठे 14.7 तमं कोष्ठकं पश्यन्तु –

(i) गणितपरीक्षायां कस्यचन छात्रस्य 20 प्रतिशतात् न्यूनानां अङ्कानां प्राप्तेः प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

(ii) छात्रः 60 अथवा ततः अधिकान् वा अङ्कान् प्राप्तवान् इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

7. सङ्ख्याशास्त्रविषये छात्राणाम् अभिप्रायं ज्ञातुं 200 छात्राणां सर्वेक्षणं कृतम्। सामग्र्यः अधोदत्ते कोष्ठके दत्ताः सन्ति –

अभिप्रायः	छात्रसङ्ख्या
इष्टम्	135
अनिष्टम्	65

यादृच्छिकतया चितः छात्रः –

(i) सङ्ख्याशास्त्रम् इच्छति इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु

(ii) सङ्ख्याशास्त्रं न इच्छति इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु

8. 14.2 तमायां प्रश्नावल्यां द्वितीयं प्रश्नं पश्यन्तु। तत्र –

(i) काचित् तन्त्रज्ञा तस्याः कार्यालयात् <7km दूरे वसति इत्यस्य आनुभविकप्रायिकता का भवति ?

(ii) काचित् तन्त्रज्ञा तस्याः कार्यालयात् 7km अथवा ततोऽपि अधिकदूरे वसति इत्यस्य आनुभविकप्रायिकता का भवति ?

(iii) काचित् तन्त्रज्ञा तस्याः कार्यालयात् $<\frac{1}{2}$ km दूरे वसति इत्यस्य आनुभविकप्रायिकता का भवति ?

9. **क्रियाकलापः -** भवतां विद्यालयद्वारस्य पुरतः कस्मिंश्चित् समयान्तराले गम्यमानानां द्विचक्रिकानां त्रिचक्रिकानां चतुश्चक्रिकानाम् आवृत्तीनाम् अवलोकनं कुर्वन्तु। भवद्भिः दृष्टेषु पूर्णवाहनसङ्ख्यासु एकं वाहनं द्विचक्रिका इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

10. **क्रियाकलापः -** भवतः वर्गे विद्यमानान् सर्वान् छात्रान् काञ्चित् त्र्यङ्कसङ्ख्यां लेखितुं वदतु। वर्गप्रकोष्ठे विद्यमानच्छात्रेषु यादृच्छिकया कमपि चिनोतु। तच्छात्रेण लिखिता सङ्ख्या 3 सङ्ख्यया विभज्या इत्यस्य का प्रायिकता ? अत्र स्मरन्तु यत् कापि सङ्ख्या 3 सङ्ख्यया विभज्यते चेत् तस्याः सङ्ख्यायाः अङ्कानां योगः अपि 3 इत्यनेन विभज्यते।

11. गोधूमपिष्टयुताः 11 स्यूताः, प्रत्येकस्मिन् अपि 5kg इति अङ्किताः वस्तुतः अधोदत्तप्रकारेण पिष्टभारं वहन्ति स्म (kg) –

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

यादृच्छिकतया चितेषु स्यूतेषु कस्मिंश्चित् स्यूते 5kg इत्यस्यापि अधिकः भारः अस्ति इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

12. 14.2 तमायां प्रश्नावल्यां पञ्चमे प्रश्ने कस्मिंश्चित् नगरे 30 दिनेभ्यः वायौ (प्रति-दशलक्षभागे) विद्यमानस्य सल्फर्-डै-आक्सैड् इत्यस्य परिमाणं विरतणावृत्तिकोष्ठकेषु भवन्तः निर्मितवन्तः। एषु दिनेषु कस्मिंश्चित् दिने 0.12 – 0.16 अन्तराले विद्यमानस्य सल्फर्-डै-आक्सैड् इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

13. 14.2 तमायां प्रश्नावल्यां प्रथमे प्रश्ने कस्यचित् कक्ष्यायाः 30 छात्राणां रक्तसमूहस्य आवृत्तिविरतणकोष्ठकं निर्मितवन्तः। एतत् कोष्ठकम् उपयुज्य कक्ष्यायां यादृच्छिकया चितस्य

छात्रस्य रक्तसमूहः AB इत्यस्य प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

15.3 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तांशान् अधीतवन्तः –

1. प्रयोगस्य घटना तु तस्य प्रयोगस्य केषाञ्चन परिणामानां सङ्ग्रहः अस्ति।

2. E-घटनायाः आनुभाविकप्रायिकता P(E) तु

$$P(E) = \frac{\text{'E' घटनायाः यत्नसङ्ख्या}}{\text{यत्नानां पूर्णसङ्ख्या}}$$

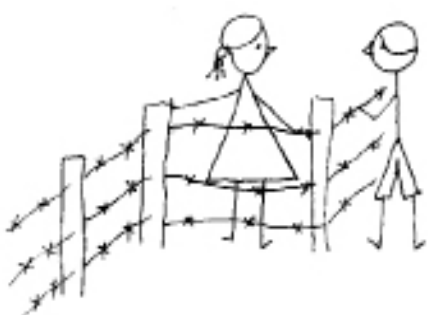
3. कस्याश्चित् घटनायाः प्रायिकता 0, 1 इत्यनयोः मध्ये भवति (अत्र 0, 1 अपि अन्तर्भूते)

परिशिष्टम् 1

गणिते उपपत्तिः

A 1.1 प्रस्तावना

ऊहतां यत् भवतां कुटुम्बस्य कश्चन भूमिखण्डः अस्ति। किन्तु तं भूमिखण्डं परितः प्राकारः नास्ति। एकस्मिन् दिने भवतां प्रतिवेशी स्वस्य भूखण्डं परितः वृतिं स्थापयितुं निर्णीते । तस्य वृतिकरणात् परं ज्ञायते यत् भवतां भूखण्डस्यापि कश्चन भागः तस्य प्राकारे एव अन्तर्गतः अभवत्। प्रतिवेशी भवतः भूखण्डं स्वायत्तीकर्तुं प्रयत्नवान् इति भवान् कथं निरूपयति ? सर्वप्रथमं भवतः प्रयत्नः तु ग्रामज्येष्ठानां साहाय्येन सीमान्तरसमस्यानिवारणम् इति। किन्तु ज्येष्ठानाम् एव अभिप्रायभेदः अस्ति चेत् ? केचन भवान् साधुः इति कथयन्ति, अपरे तु प्रतिवेशिनः पक्षम् आश्रयन्ति। भवतः एकमात्रविकल्पः तु सर्वेषाम् अङ्गीकारः यथा स्यात् तथा भूखण्डसीमायां भवतः अधिकारस्य संस्थापनम्। उदाहरणार्थम् सर्वकारेण मानित-सर्वेक्षणमानचित्रं प्रयोक्तुं शक्यते अथवा यदि आवश्यकं तर्हि न्यायालये भवतः अधिकारः साधुः, प्रतिवेशी दोषम् आचरितवान् इति निरूपणम्।



वयम् अन्यां काञ्चन स्थितिं पश्यामः। ऊहतां यत् भवतः माता 2005 आगस्ट मासस्य विद्युच्छुल्कं दत्तवती, किन्तु 2005 सेप्टम्बर् मासस्य प्राप्तिपत्रे आगस्टमासस्य शुल्कं न दत्तम् इति उल्लिखितम् अस्ति। भवान् विद्युद्विभागेन उक्तम् असाधु इति कथं निरूपयितुं शक्नोति ? भवान् आगस्ट्मासस्य प्राप्तिपत्रप्रतिपत्रं दर्शयित्वा निरूपयितुं शक्नोति।

अस्माकं दैनन्दिनजीवने किञ्चन उक्तिः सत्या उत न इति निरूपणस्य समस्या सर्वदा अस्ति एव। किन्तु वयं निरूपणस्य चिन्तां विना बहूनि वाक्यानि यथार्थरूपेण अङ्गीकुर्मः। गणिते, किञ्चन उक्तिः साधु उत न इति गणितीयतर्केण निरूपितं चेदेव अङ्गीकुर्मः। आसहस्रेभ्यः वर्षेभ्यः गणिते उपपत्तीनाम् अस्तित्वम् अस्ति। गणितस्य कस्यापि शाखायाः अयं विषयः केन्द्रः अस्ति। ऐदम्प्राथम्येन कश्चन दार्शनिकः तथा गणितज्ञः टेल्स् इति नामधेययुतः उपपत्तिं प्रस्तुतवान्। मेसोपोटोमिया, इजिप्ट्, चीनदेशः भारतम् इत्यादिषु प्राचीनसभ्यतासु गणितं केन्द्रीभूतम् आसीच्चेदपि तैः उपपत्तिः प्रयुक्ता वा इति ज्ञातुं स्पष्टं प्रमाणं नास्ति।

अस्मिन् अध्याये वाक्यार्थः, गणिते कीदृशाः तर्काः उपयुक्ताः, अपि च गणितीय-उपपत्तीनां के अवयवाः निहिताः इति पश्यामः।

A.1.2 गणितीयरीत्या स्वीकारार्हाः उक्तयः।

अस्मिन् अनुच्छेदे वयं गणितीयरीत्या स्वीकारार्हायाः उक्तेः अर्थः कः इति पश्यामः। उक्तिः नाम तादृशं कथनं येन आज्ञा वा आश्चर्यं वा न प्रतीयेत। आम्! तत् उक्तिः प्रश्नरूपापि न स्यात्। उदाहरणार्थम् –

"भवतः केशस्य वर्णः कः ? " इति कथनं उक्तिः नास्ति, अपि तु प्रश्नः।

"कृपया गत्वा किञ्चित् जलम् आनयतु" इति कथनम् आज्ञा अथवा प्रार्थना भवति, उक्तिः न।

परन्तु "भवतः केशस्य वर्णः कृष्णः" इति कथनं उक्तिः अस्ति।

सामान्यतया उक्तिः अधोदत्तेषु त्रिषु अंशेषु अन्यतमं भवितुम् अर्हति।

- सदा सत्या
- सर्वदा असत्या
- संशयात्मिका

'संशयात्मिका' इति पदस्य व्याख्या अपेक्षिता अस्ति। उक्तौ सन्दिग्धता द्वयोः स्थित्योः कारणेन भवेत्। प्रथमस्थित्यां वयं उक्तिः सर्वदा सत्या उत असत्या इति निर्णेतुं न शक्नुमः। उदाहरणम् – "श्वः गुरुवासरः" इति ज्ञानं सन्दिग्धं, यतो हि अत्र निर्णयार्थं पर्याप्तमात्रेण सामग्र्यः न दत्ताः इति।

द्वितीयस्थित्यां उक्तिः व्यक्तिनिष्ठा इति कारणेन सन्दिग्धा भवति। व्यक्तिनिष्ठं नाम केचन तद्वाक्यं सत्यम् इति मन्यन्ते, अपरे न इति। उदाहरणार्थम् "शुनकाः बुद्धिमन्तः" इति सन्दिग्धा उक्तिः। यतो हि केचन तत् सत्यम् इति चिन्तयन्ति, अपरे न इति।

उदाहरणानि 1 : अधो दत्ताः उक्तयः सत्याः उत न, सन्दिग्धाः उत न इति वदन्तु।

(i) सप्ताहे अष्ट दिनानि सन्ति।

(ii) अत्र वर्षति।

(iii) सूर्यास्तः पश्चिमदिशि जायते।

(iv) गौरी करुणामयी बालिका अस्ति।

(v) द्वयोः असमपूर्णाङ्कयोः गुणनफलं समसङ्ख्या अस्ति।

(vi) द्वयोः समप्राकृतसङ्ख्ययोः गुणनफलं समसङ्ख्या अस्ति।

समाधानम् -

(i) एषा उक्तिः सर्वदा असत्या, यतः सप्ताहे सप्त दिनानि एव सन्ति।

(ii) एषा उक्तिः सन्दिग्धा, यतः अस्मिन् वाक्ये अत्र इति पदं स्पष्टतया स्थानं न सूचयति।

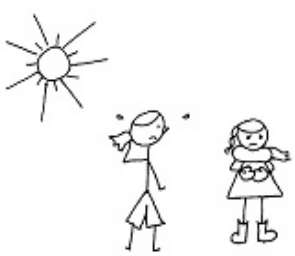
(iii) एषा उक्तिः सर्वदा सत्या यतो हि सूर्यास्तः सर्वदा पश्चिमदिशि एव भवति।

(iv) एषा उक्तिः सन्दिग्धा, यतः एतत् वाक्यं व्यक्तिनिष्ठम् गौरी केषुचित् करुणामयी, अन्येषु न तथा - इति भवितुम् अर्हति।

(v) एषा उक्तिः सर्वदा असत्या पूर्णाङ्कयोः गुणनफलं सर्वदा विषमम् एव भवति।

(vi) एषा उक्तिः सर्वदा सत्या किन्तु तत् निरूपयितुं किञ्चित् कार्यं करणीयं भवति। A 1.4 अनुच्छेदे अस्य उपपत्तिः दीयते।

पूर्वोक्तप्रकारेण वयं दैनन्दिनजीवने वाक्यानां मान्यतायाः विषये तावत्सावधानाः न स्मः। उदाहरणार्थम् ऊहतां यत् भवतः मित्रं केरलेषु मनन्तवाडी इति स्थाने जूलै मासे प्रतिदिनं वृष्टिः भवति इति कथयति चेत् भवान् स्वस्य मित्रस्य कथनं पूर्णतया विश्वसिति। यद्यपि तत्र जूलै मासे एकदिनं, दिनद्वयं वा वृष्टिः न जाता स्यात्। भवान् न्यायवादी न चेत् स्वमित्रेण सह एतद्विषये वादं न करोति।



अन्योदाहरणे परस्परम् अस्माभिः उच्चार्यमाणानि वाक्यानि परिशीलयामः। "अद्य औष्ण्यम् अधिकम् अस्ति" इति उक्तिः। यद्यपि एतानि वाक्यानि सन्दिग्धानि, तथापि वयं सन्दर्भानुगुणम् एतानि सरलतया अङ्गीकुर्मः। अद्य बहु उष्णता अस्ति इति उक्तिः भिन्नजनेषु भिन्नप्रकारार्थं द्योतयितुं शक्नोति। यतो हि कुमौन्-प्रदेशीयस्य कृते यत् बहु औष्ण्यम् इति भाति तत् चेन्नै नगरीयस्य तावत् औष्ण्यं न भाति।

किन्तु गणितीया उक्तिः असन्दिग्धा भवितुं न अर्हति। गणिते काचन उक्तिः तदा मान्यतां याति यदा तत् उक्तिः पूर्णतया सत्या वा असत्या वा स्यात्। वयं काचन उक्तिः सर्वदा सत्या चेदेव तां सत्यां मन्यामहे। नो चेत् तत् असत्यकथनम् एव। उदाहरणार्थं $5 + 2 = 7$ इति सर्वदा सत्यम्। अतः $5 + 2 = 7$ इति सत्या उक्तिः। $5 + 3 = 7$ इति असत्या उक्तिः।

उदाहरणम् 2 : अधोदत्तानि वाक्यानि सत्यम् उत न इति वदन्तु –

(i) त्रिभुजस्य अन्तःकोणानां योगः 180^0

(ii) '1' तः अधिकाः सर्वेऽपि विषमसङ्ख्याः अभाज्याः सन्ति

(iii) यस्यै कस्यैचित् x इति वास्तविकसङ्ख्यायै $4x + x = 5x$

(iv) प्रत्येकं x वास्तविकसङ्ख्यायै $2x > x$

(v) प्रत्येकं x वास्तविकसङ्ख्यायै $x^2 \geq x$

(vi) यदि कस्यचन चतुर्भजस्य सर्वे भुजाः समाः तर्हि सः वर्गः इत्युच्यते

समाधानम् - एषा उक्तिः सत्या। भवान् षष्ठाध्याये एवं उक्तिं निरूपितवान्

(i) एषा उक्तिः असत्या। उदाहरणार्थं नव इति अभाज्यसङ्ख्या नास्ति।

(ii) एषा उक्तिः सत्या।

(iii) एषा उक्तिः असत्या। उदाहरणार्थम् $2 \times (-1) = -2$। $-2 > -1$ न।

(iv) एषा उक्तिः असत्या। उदाहरणार्थम् $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ न।

(v) एषा उक्तिः असत्या। यद्यपि समचतुर्भुजस्य सर्वेपि समभुजाः तथापि सः वर्गः एव भवेत् इति नियमः नास्ति।

भवन्तः अवधानं दत्तवन्तः स्युः यत् गणितानुगुणं काचन उक्तिः असत्या इति निरूपयितुम् अस्माभिः किञ्चन उदाहरणं दर्शनीयम् अथवा काचित् स्थितिः दर्शनीया, यत्र वाक्ये दोषाणां निरूपणं भवति। उदाहरणार्थम् 9 अभाज्यसङ्ख्या नास्ति इति कारणेन एकस्मात् अधिकाः सर्वाः अपि सङ्ख्याः अभाज्याः इति उक्तिः सत्या नास्ति इति निरूपितम्। ईदृशम् उदाहरणं यत् उक्तेः आनुकूल्यं न कल्पयति तत् प्रत्युदाहरणम् इति उच्यते। प्रत्युदाहरणानां विषये $A1.5$ अनुच्छेदे विस्तृतरीत्या चर्चयामः।

भवन्तः अवधानं दत्तवन्तः स्युः चतुर्थ-पञ्चम-षष्ठ-वाक्यानि यद्यपि असत्यानि तथापि कैश्चित् निबन्धनैः तानि सत्यानि इति निरूपयितुं शक्नुमः।

उदाहरणम् 3 : उचितनिबन्धनैः अधोदतवाक्यानि सत्यानि इति निरूपयन्तु –

(i) प्रत्येकम् x इति वास्तविकसङ्ख्यायै $2x > x$

(ii) प्रत्येकम् x इति वास्तविकसङ्ख्यायै $x^2 \geq x$

(iii) या कापि सङ्ख्या स्वेनैव विभज्यते चेत् सर्वदा '1' इति सङ्ख्या प्राप्यते

(iv) वृत्ते जीवाद्वारा अन्तरितकोणः कस्मिंश्चित् बिन्दौ 90^0 इति भवति

(v) यदि कस्यचन चतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः समाः तर्हि सः वर्गः इत्युच्यते

समाधानम् -

(i) यदि $x > 0$, तर्हि $2x > x$

(ii) यदि $x \leq 0$, अथवा $x \geq 1$, तर्हि $2^x \geq x$

(iii) शून्यं विहाय अपरा काचित् सङ्ख्या स्वेनैव विभज्यते चेत् '1' इति सङ्ख्या प्राप्यते

(iv) वृत्ते व्यासद्वारा अन्तरितकोणः कस्मिंश्चित् बिन्दौ 90^0 इति भवति

(v) यदि कस्यचन चतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः तथा अन्तःकोणाः समाः तर्हि सः वर्गः इत्युच्यते

प्रश्नावलिः A1.1

1. अधोदत्तानि वाक्यानि सत्यानि / असत्यानि / सन्दिग्धानि वा इति वदन्तु, तेषाम् औचित्यं च साधयन्तु

   (i) कस्मिंश्चित् वर्षे 13 मासाः सन्ति

   (ii) दीपावलिः शुक्रवासरे भवति

   (iii) मागडिनगरे तापमानं 26^0 c मितं भवति

   (iv) पृथिव्याः एकः चन्द्रः अस्ति

   (v) शुनकाः उड्डयितुं शक्नुवन्ति

   (vi) फेब्रवरी मासे 28 दिनानि सन्ति

2. अधोदत्त-वाक्यानि सत्यानि उत न इति कथयन्तु, उचितकारणानि च वदन्तु –

   (i) चतुर्भुजस्य अन्तःकोणानां योगः 350^0 अस्ति

   (ii) कस्यैचन x इति वास्तविकसङ्ख्यायै $x^2 \geq 0$

   (iii) समचतुर्भुजं(वज्राकृतिः) किञ्चन समान्तरचतुर्भुजम् अस्ति

   (iv) समसङ्ख्ययोः सङ्कलनं समसङ्ख्या भवति

   (v) विषमसङ्ख्ययोः सङ्कलनं विषमसङ्ख्या भवति

3. उचितनिबन्धनैः एतानि वाक्यानि यथा सत्यानि स्युः, तथा पुनः लिखन्तु –

   (i) सर्व-अभाज्यसङ्ख्याः विषमाः भवन्ति

   (ii) वास्तविकसङ्ख्यायाः द्विगुणः समसङ्ख्या एव भवति

   (iii) यस्यै कस्यैचित् x सङ्ख्यायै $3x + 1 > 4$

   (iv) यस्यै कस्यैचित् x सङ्ख्यायै $x^3 \geq 0$

   (v) प्रत्येकस्मिन् त्रिभुजे माध्यकः कोणसमद्विभाजकः भवति

A1.3 निगमन-तर्क-विधानम्

कस्मिंश्चित् सन्दिग्धे वाक्ये विद्यमानां सत्यतां निरूपयितुं प्रमुखं साधनं भवति निगमनतर्कविधानम् इति।

निगमनतर्को नाम कः इति ज्ञापयितुम् किञ्चन समस्यासमाधानं पश्यामः।

भवते चत्वारि पत्रकाणि दीयन्ते। प्रत्येकं पत्रके एकपार्श्वे सङ्ख्या, अपरे अक्षरं च मुद्रितं भवति।



ऊहतां यत् एतानि पत्रकाणि एतान् नियमान् अनुसरन्ति इति। "यदि पत्रकस्य एकपार्श्वे समसङ्ख्या अस्ति तर्हि अपरपार्श्वे स्वराक्षरं स्यात्" इति। अत्र न्यूनातिन्यूनं कति पत्रकाणि परिवर्त्य दृष्ट्वा एषः नियमः सत्यः इति निरूपयितुं शक्नोति? तदर्थं भवान् सर्वपत्रकाणि परिवर्त्य परिशीलयितुं शक्नुयात् एव। लघुतरसङ्ख्यया एव तानि परिवर्त्य साधयितुं शक्नुयात् किल ?

स्मरतु, उक्तिः वदति यत् क्रीडनकपत्रके एकपार्श्वे समसङ्ख्या अस्ति चेत् अपरपार्श्वे स्वराक्षरं भवेत् इति। एकपार्श्वे स्वराक्षरम् अस्ति चेत् अपरपार्श्वे समसङ्ख्या एव भवेत् इति नास्ति नियमः। तत् विकल्पेन भवितुम् अर्हति। एषः नियमः एवमपि न कथयति यत् पत्रकस्य एकपार्श्वे विषमसङ्ख्या अपरपार्श्वे व्यञ्जनाक्षरं भवेत् इति। तथा भवितुम् अर्हति अपि अथवा नापि।

अतः *A*-पत्रकं परिवर्तनीयं वा ? न। अपरपार्श्वे विषमा समा सङ्ख्या वा भवति चेद् अपि नियमः मानितः एव भवति।

"5" इति पत्रकस्य किम् ? एतस्य परिवर्तनं न कुर्मः यतः अपरपार्श्वे स्वरः व्यञ्जनं वा भवतु, सः नियमः मानितः भवति एव।

किन्तु V तथा 6 पत्रके परिवर्तनीये एव। यदि V पत्रकस्य अपरपार्श्वे समसङ्ख्या अस्ति तर्हि नियमभङ्गः भवति। तथैव 6 पत्रकस्य अपरपार्श्वे व्यञ्जनं भवति चेत् अपि नियमभङ्गः एव।

समस्यासमाधानार्थं यादृशं तर्कम् उपयुक्तवन्तः तदेव निगमनं नाम। यतो हि पूर्वसंस्थापितनियमानुगुणम् एतं परिणामं प्राप्नुमः। उदाहरणार्थम् उपरिस्थसमस्यायां सुसङ्गततर्कसरण्या एषः निष्कर्षः प्राप्तः यत् V, 6 पत्रके परिवर्तनीये इति।

निगमनं काचन उक्तिः सत्या उत न इति निष्कर्षप्राप्तौ उपकरोति। यतो हि एतत् यत् सत्यम् इति विख्यातं तस्य सामान्य-उक्तेः विशिष्टा स्थितिः अस्ति। उदाहरणार्थं - यदा द्वयोः विषमसङ्ख्ययोः गुणनफलं विषमसङ्ख्या इति निरूप्यते, तदा झटिति 70001×134563 इत्यनयोः गुणनफलं विषमम् इति विनाचिन्तनं वक्तुं शक्नुमः। यतो हि 70001 तथा 134563 इति द्वे अपि विषमसङ्ख्ये एव स्तः।

निगमनम् आबहोः शतकेभ्यः मानवचिन्तनस्य भागः आसीत् तथा दैनन्दिनजीवने सर्वदा उपयुक्तः

आसीत्। उदाहरणार्थम् ऊहतां यत् - "यदि पूर्वतने दिने तापमानं 28^0 c सेल्सियस्-मितस्य अधिकः अस्ति चेत् सोलारिस् पुष्पं विकसति। सोलारिस् पुष्पं काल्पनिक-उपत्यकायां 15 सेप्टम्वप् 2005 दिनाङ्के विकसितम्।" एतत् वाक्यद्वयम् अपि सत्यम्। तदा निगमनेन ऊहितुं शक्नुमः यत् काल्पनिक-उपत्यकायां 14 सेप्टम्वप् 2005 दिनाङ्के तापमानं 28^0 c सेल्सियस्-मितस्य अधिकम् आसीत् इति।

दुर्भाग्यवशात् दैनन्दिनजीवने साधुतर्कस्य प्रयोगं न कुर्मः। दोषपूर्णतर्केनैव बहुनिष्कर्षान् प्राप्नुमः। उदाहरणार्थं भवतः सखा भवन्तं दृष्ट्वा न हसति चेत् सः भवति कुपितः अस्ति इति भवान् निष्कर्षं प्राप्नोति। यदा 'सः कुपितः चेत् मां दृष्ट्वा न हसति' इति यावत् सत्या तावदेव 'तस्य अतिशिरोवेदना अस्ति चेदपि सः न हसति' इत्यपि सत्यम् एव। भवनतः स्वदैनन्दिनजीवने प्राप्तनिष्कर्षानां विश्लेषणं कृत्वा ते निष्कर्षाः मानिताः उत दोषपूर्णतर्काधारिताः इति चिन्त्यताम्।

प्रश्नावलिः A1.2

1. निगमनिकतर्कणस्य आधारेण उत्तराणि दीयन्ताम् –

   (i) मनुष्याः योनिजाः। सर्वे योनिजाः मेरुदण्डयुक्ताः। अनयोः द्वयोः वाक्ययोः मनुष्याणां विषये कं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नोति ?

   (ii) आन्टोनी कश्चन केशप्रसाधकः। दिनेशः केशप्रसाधनं कारितवान्। अन्टोनी दिनेशस्य केशप्रसाधनं कृतवान् इति निष्कर्षं प्राप्तुं शक्यते वा ?

   (iii) मङ्गलग्रहे जनानां रक्तजिह्वाः सन्ति। गुलगः इति कश्चन मङ्गलग्रहजनः। एताभ्यां वाक्याभ्यां कं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्यते ?

   (iv) यदि अमुकदिने घण्टाचतुष्टयात् अपि अधिकं वर्षति अग्रिमदिने दूषितनाल्याः शुद्धीकरणं कर्तव्यं भवति। अद्य 6 घण्टाः यावत् वर्षितम्। श्वः दूषितनलिकानां विषये कः निष्कर्षः भवितुम् अर्हति ?

   (v) अस्याः धेनोः तर्कणे कः दोषः अस्ति ? (व्यङ्ग्यचित्रं पश्यतु)



2. पुनरेकवारं भवते चत्वारि क्रीडनकपत्रकाणि दीयन्ते इति ऊहताम् । प्रत्येकं पत्रके एकपार्श्वे सङ्ख्या मुद्रिता, अपरपार्श्वे अक्षरं मुद्रितम् । एषु पत्रकेषु अधोदत्तनियमाः सत्या वा इति ज्ञातुं कयोः द्वयोः पत्रकयोः परिशीलनं कर्तव्यं भवति ? नियमाः –

'यदि पत्रकस्य एकपार्श्वे व्यञ्जनं मुद्रितं तर्हि अपरे विषमसङ्ख्या मुद्रिता भवति '

B	**3**	**U**	**8**

A1.4 प्रमेयं, संयोगः तथा अभिगृहीतः

एतावत्पर्यन्तं वाक्यानि तथा तेषां मान्यीकरणस्य परिशीलनं ज्ञातवन्तः । अस्मिन् अनुच्छेदे भवन्तः त्रिप्रकारकवाक्यानां भेदान् अवगच्छन्ति । प्रमेयं, आधारप्रतिज्ञा तथा स्वयंसिद्धानि इत्येतेभ्यः एव गणितस्य निर्माणम् अभवत् ।

भवन्तः पूर्वमेव बहूनि प्रमेयाणि पठितवन्तः। प्रमेयं नाम कः? किञ्चन गणितीयउक्तिः – यस्य सत्यता साधिता सः एव प्रमेयं । उदाहरणार्थम् – अधोदत्तानि प्रमेयवाक्यानि

प्रमेयं A1.1 : कस्यचित् त्रिभुजस्य अन्तःकोणानां योगः 180^0

प्रमेयं A1.2 : द्वयोः समप्राकृतसङ्ख्ययोः गुणनफलं समसङ्ख्या स्यात्

प्रमेयं A1.3 : कासाञ्चन तिसृणां क्रमगतप्राकृतसङ्ख्यानां गुणनफलम् 16 इति सङ्ख्यया विभज्यं स्यात्

अस्माकम् अवगमनं तथा अनुभवेन यत् वयं विश्वसिमः तद्वाक्यं प्रतिज्ञा इति कथ्यते । एतदेव गणितीय-आत्मस्फुरणम् इति उच्यते । यदि एतत् निरूपयितुं शक्नुमः तर्हि सा प्रमेयं भविष्यति । गणितज्ञाः भिन्नस्वरूपान् ऊहान् च विचिन्त्य विविधान् बुद्धिपूर्विकाः प्रतिज्ञाः निर्मान्ति । वयं कांश्चन विन्यासान् दृष्ट्वा कीदृशीम् ऊहां कर्तुं शक्नुमः इति पश्यामः।

उदाहरणम् 4 : तिस्रः क्रमगतसमसङ्ख्याः स्वीकृत्य सङ्कलयन्तु ।

$2 + 4 + 6 = 12; 4 + 6 + 8 = 18; 6 + 8 + 10 = 24; 8 + 10 + 12 = 30; 20 + 22 + 24 = 66.$

अत्र कमपि प्रतिरूपम् ऊहितुं शक्नुवन्ति वा? अत्र कं विन्यासं द्रष्टुं शक्नुवन्ति ?

समाधानम् - आधारप्रतिज्ञा तु एवं भवितुम् अर्हति –

(i) कस्यचित् क्रमगतसमसङ्ख्यात्रयस्य सङ्कलनं समसङ्ख्या भवति ।

(ii) कस्यचित् क्रमगतसमसङ्ख्यात्रयस्य सङ्कलनं 6 इति सङ्ख्यया विभज्यं स्यात् ।

उदाहरणम् 5 : पास्कलत्रिभुजम् इति उच्यमानं सङ्ख्याविन्यासं पश्यन्तु –

पंक्तिः															**सङ्ख्यानां योगः**
1							1								1
2						1		1							2
3					1		2		1						4
4				1		3		3		1					8
5			1		4		6		4		1				16
6		1		5		10		10		5		1			32
7				:						:					:
8				:						:					:

भवान् सप्तम-अष्टमरेखायां विद्यमानसङ्ख्यानां योगविषये कं संयोगं प्राप्तुं शक्नोति ? 21तमायां रेखायां विद्यमानसङ्ख्यानां विषये किं वदति ? कश्चन विन्यासः दृश्यते किम् ? एवमेव n रेखासु विद्यमानसङ्ख्यानां योगविषये सूत्रं किञ्चन ऊहताम् ।

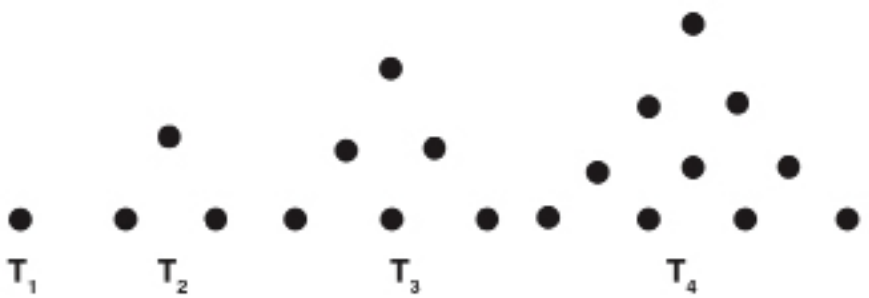
समाधानम् - सप्तमरेखायां सङ्ख्यानां योगः $2 \times 32 = 64 = 2^6$

अष्टमरेखायां सङ्ख्यानां योगः $2 \times 64 = 128 = 2^7$

21 तम-रेखायां सङ्ख्यानां योगः 2^{20}

n तमरेखायां सङ्ख्यानां योगः $= 2^{n-1}$

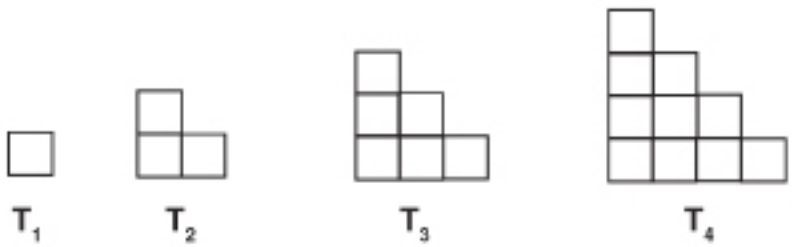
उदाहरणम् 6 : त्रिभुजाकृतसङ्ख्याः चिन्तयन्तु –



आकृतिः A1.1

बिन्दूनां क्रमः त्रिभुजाकारे स्थापितः अस्ति । अत्र $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, इत्यादीनि। T_5, T_6 स्वयमेव ऊहताम् । T_n किं भवेत् इति ।

T_n विषये कल्पनां करोतु। भवन्तः पुनः अधोदत्तप्रकारेण समस्यां चित्रयन्ति चेत् साहाय्यं भवेत्।



आकृतिः A1.2

समाधानम् - $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$

$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$

$T_n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$

क्रिस्टियन् गोल्ड्बैच् (1690-1764) इति कस्यचित् गणितज्ञस्य नाम्ना विख्याता गोल्जबाच् प्रतिज्ञा एव प्रतिज्ञानाम् अतिस्वारस्यकरम् उदाहरणम् अस्ति। यतो हि एषः संयोगः उद्घाटितः अस्ति (इदं सत्यम् उत असत्यम् इति निरूपितं नास्ति)। - "प्रत्येकं ४तः अधिकं समपूर्णाङ्कं, द्वयोः विषम-अभाज्यसङ्ख्ययोः योगरूपेण वक्तुं शक्यते"। अग्रे एषा सत्या वा असत्या वा इति यदि निरूपयन्ति, तर्हि कीर्तिं प्राप्नुवन्ति!

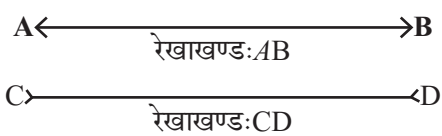
भवताम् आश्चर्यं स्यात् यत् अस्माभिः गणिते पठ्यमानं यत्किमपि निरूपणीयं वा न वा इति। न निरूपणीयं चेत् किमर्थं न निरूपणीयम् इति।



वस्तुतः गणितस्य प्रत्येकम् अपि क्षेत्रम्, तत्र यानि वाक्यानि सत्यानि इति परिकल्पितानि किन्तु न निरूपितानि तानि एव अवलम्बते। एतानि स्वयंसिद्धानि वाक्यानि यानि निरूपणं विना सत्यानि इति अङ्गीक्रियन्ते। तानि स्वयंसिद्धानि इति कथ्यते। पञ्चमाध्याये भवन्तः यूक्लिडस्य स्वयंसिद्धानि, आधारप्रतिज्ञाः च पठितवन्तः स्युः। (इदानीं स्वयंसिद्धानां, तथा प्रतिज्ञानां भेदं न गणयामः।)

उदाहरणार्थम् – यूक्लिडस्य प्रथमप्रतिज्ञायां 'कुतश्चिदपि बिन्दोः कस्यचिदपि बिन्दोः पर्यन्तं काञ्चन साक्षाद्रेखां लेखितुं शक्नुमः'। तृतीयप्रतिज्ञायां 'केनापि केन्द्रबिन्दुना कयाचिदपि त्रिज्यया वर्तुलं रचितुं शक्नुमः'। एतानि वाक्यानि सम्पूर्णसत्यानि इति भाति तथा यूक्लिडः अपि सत्यम् इत्येव परिकल्पितवान्। किमर्थम्? यतो हि अस्माभिः किमपि प्रमेयं निरूपणीयं चेत् कुतश्चित् तस्य आरम्भः करणीयः। कानिचन स्वयंसिद्धसत्यवाक्यानि अपेक्षितानि एव। ततः एव अस्माकं ज्ञानं तदवलम्बित-तर्कनियमैः वर्धयितुं शक्नुमः। तर्हि भवन्तः एवं चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् यदा वाक्यानि स्वयंसिद्धानि इति भाति तानि वाक्यानि किमर्थं सत्यानि एव इति न अङ्गीकरणीयानि? अत्र बहूनि कारणानि सन्ति। प्रायः आत्मस्फुरितज्ञानं दोषपूर्णं स्यात्, चित्राणि अथवा स्वरूपाणि सत्यवत् भासितुम् अर्हन्ति। कापि उक्तिः सत्या इति दृढीकर्तुं निश्चितः एकः एव उपायः – निरूपणम् इति। उदाहरणार्थम् – अस्मासु बहवः एवं चिन्तयामः यत् द्वयोः सङ्ख्ययोः गुणनफलं ताभ्यां सङ्ख्याभ्याम् अधिकतरम् एव भवति इति। किन्तु वयं जानीमः यत् एषा उक्तिः सर्वदा सत्या न इति। उदाहरणार्थम् $5 \times 0.2 = 1$ इति गुणनफलं पञ्चतः अपि न्यूनतरः अस्ति।

अपि च *A*1.3 आकृतिं पश्यन्तु कः रेखाखण्डः दीर्घतरः *A*B अथवा CD इति ?



आकृतिः A1.3

द्वौ अपि रेखाखण्डौ समानमितौ स्तः। यद्यपि *A*B रेखाखण्डः CD रेखाखण्डस्य अपेक्षया लघुतरः इव भाति।

भवन्तः स्वयंसिद्धानां मान्यीकरणविषये विस्मयम् प्राप्नुयुः। अस्माकम् आत्मस्फुरणानुगुणं स्वयंसिद्धानि चितानि, तथा तानि स्वयंसत्यानि इति भान्ति। अतः तानि सत्यानि इत्येव चिन्तयामः। किन्तु किञ्चित्कालात् परं किञ्चन स्वयंसिद्धं दोषपूर्णम् इति ज्ञायते चेत् ? अस्मिन् सन्दर्भे किं करणीयम् ? तदा एतानि सोपानानि उच्यन्ते –

(i) यावच्छक्यं तावत् स्वयंसिद्धानि न्यूनतमानि भवन्तु। उदाहरणसूक्तयः यूक्लिडस्य स्वयंसिद्धानि तथा पञ्चाधारप्रतिज्ञाः अवलम्ब्य शतशः प्रमेयानां व्युत्पत्तिः कृता।

(ii) सर्वाणि अपि स्वयंसिद्धानि नियतानि वा इति निश्चिन्वन्तु ।

स्वयंसिद्धानां गणः अनियतः इति तदा वक्तुं शक्नुमः यदा एकं स्वयंसिद्धम् उपयुज्य अन्यत् स्वयंसिद्धम् असत्यम् इति निरूपयितुं शक्नुमः। उदाहरणार्थम् एते वाक्ये परिशीलयन्तु –

एते वाक्ये अनियते इति निरूपयामः।

प्रथमा उक्तिः – कापि पूर्णा सङ्ख्या स्वस्य अनुवर्तेः समाना न।

द्वितीया उक्तिः - काचन पूर्णसङ्ख्या शून्येन विभज्यते चेत् अन्या पूर्णसङ्ख्या एव प्राप्यते ।

(स्मरन्तु यत् **शून्येन विभजनं पारिभाषितं नास्ति**, किन्तु क्षणार्थं तत् शक्यते इति परिकल्प्य अग्रे किं भविष्यति इति पश्यामः)

द्वितीयवाक्यात् $\frac{1}{0} = a$, यत्र a काचन पूर्णसङ्ख्या अस्ति । एतेन $1 = 0$ इति ध्वनितम् । किन्तु एषः परिणामः प्रथमं स्वयंसिद्धम् असिद्धं निरूपयति, यतो हि तद् स्वयंसिद्धं 'कापि पूर्णसङ्ख्या स्वस्य अनुवर्तेः समानं न इति वदति' ।

(iii) किमपि दोषपूर्णं कालान्तरेण विरुद्धा भवितुम् अर्हति । यदा काचन उक्तिः, तथा तस्य निराकरणम् – उभयम् अपि सत्यम् इति सिद्धं भवति तदा सा उक्तिः विरोधं जनयति । यथा उपरितनम् उदाहरणम् । वाक्यद्वयम् अपि पुनरेकवारं परिशील्यताम्।

प्रथमवाक्यतः $2 \neq 1$ न इति परिणामं व्युत्पादयितुं शक्नुमः। इदानीं $x^2 - x^2$ इति पश्यतु। वयम् एतस्य द्विधा गुणखण्डनं कर्तुं शक्नुमः।

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

अतः $(x + x)(x - x) = x(x - x)$.

द्वितीयवाक्यात् उभयपक्षतः $(x - x)$ निष्कासयितुं शक्नुमः। इदानीं $x = 2x$ इति प्राप्यते। ततः $2 = 1$ इति ध्वन्यते ।

अतः अस्माकं समीपे $2 \neq 1$ तथा तस्य निराकणम् $– 2 = 1$ न, उभयम् अपि सत्यम् इति वाक्यद्वयम् अस्ति । एषः तु विरोधः। काचन पूर्णसङ्ख्या शून्येन विभज्यते चेत् पूर्णसङ्ख्या एव प्राप्यते इति दोषपूर्णेन स्वयंसिद्धेन एषः विरोधः जनितः।

अतः यानि वाक्यानि स्वयंसिद्धरूपेण चेतव्यानि तानि विचिन्त्य, अन्तर्दृष्ट्या वा चेतव्यानि। तानि वाक्यानि तार्किकविरोधीनि अथवा असङ्गतानि वा इति परिशीलनीयानि । कदाचित् स्वयंसिद्धानां चयनम् एव नूतनम् आविष्कारं जनयितुं शक्नोति । पञ्चमाध्यायतः यूक्लिडस्य पञ्चमप्रतिज्ञायां तथा अयूक्लडीय-ज्यामितीय-अविष्कारैः भवन्तः परिचिताः स्युः। भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः यत् गणितज्ञाः विश्वसितवन्तः यत्

पञ्चमप्रतिज्ञा आधारप्रतिज्ञा एव न स्यात्, अपि तु तत् प्रमेयं एव भवेत्, यस्य निरूपणम् अन्याभिः चतसृभिः प्रतिज्ञाभिः कर्तुं शक्यते इति। आश्चर्यजनकं यत् एते प्रयत्नाः अयूक्लिड-ज्यामिति-अविष्कारार्थं निमित्तीभूताः अभवन् इति।

प्रमेयं, स्वयंसिद्धं तथा आधारप्रतिज्ञा इत्येतेषां मध्ये भेदं स्मृत्वा एतम् अनुच्छेदम् उपसंहरामः। स्वयंसिद्धं तु तादृशी गणितीयोक्तिः यस्य निरूपणं विना एव सत्यम् इति स्वीक्रियते। आधारप्रतिज्ञा अपि काचन गणितीय-उक्तिः यस्याः सत्यता वा असत्यता वा निरूपिता नाभवत्। प्रमेयं ईदृशी गणितीयउक्तिः भवति यस्याः सत्यता तर्केण निरूपिता अस्ति।

प्रश्नावलिः A1.3

1. क्रमगतसमसङ्ख्यात्रयं स्वीकृत्य तस्य गुणनफलं जानातु। उदाहरणार्थम् $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ इत्यादयः। एतानि गुणनफलानि अधिकृत्य तिस्रः प्रतिज्ञाः रचयन्तु।
2. पास्कल्-त्रिभुजं प्रति गच्छतु, तत्र

   प्रथमारेखा $1 : 1 = 11^0$

   द्वितीया रेखा $2 : 1\ 1 = 11^1$

   तृतीया रेखा $3 : 1\ 2\ 1 = 11^2$

   चतुर्थ-पञ्चमपङ्क्त्यौ अधिकृत्य आधारकल्पनां रचयन्तु। भवतः कल्पना युज्यते वा? षष्ठपङ्क्त्याः कृते अपि भवतः कल्पना युज्यते वा?
3. पुनरेकवारं त्रिभुजाकारसङ्ख्यां पश्यामः ($A1.2$आकृतिं पश्यन्तु)। द्वयोः क्रमगत-त्रिभुजाकारसङ्ख्ययोः सङ्कलनं करोतु। उदाहरणार्थं $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$. तर्हि $T_4 + T_5$ किं भविष्यति? $T_{n-1} + T_n$ विषये एकां कल्पनां रचयन्तु।
4. अधोदत्तं विन्यासं पश्यतु –

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

   प्रत्येकम् अधोदत्तस्य विषये एकं संयोगं रचयन्तु -

   $111111^2 =$

   $1111111^2 =$

संयोगः सत्यः वा इति परिशीलयु।

5. अस्मिन् पुस्तके विद्यमानेषु पञ्चानां स्वयंसिद्धानाम् (आधारप्रतिज्ञानाम्) आवलिं करोतु।

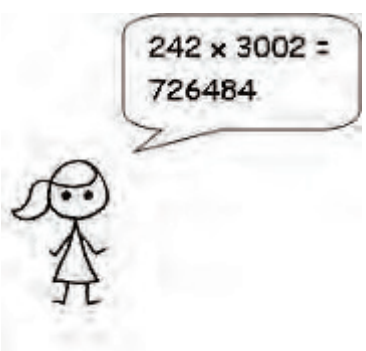
A1.5 गणितीय-उपपत्तिः नाम किम्

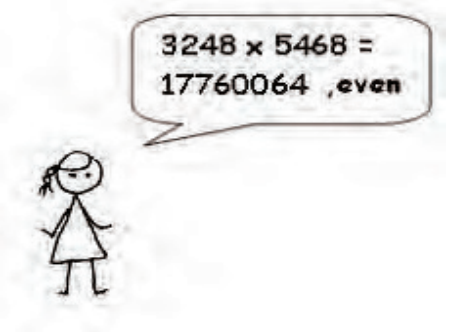
इदानीं गणितीय-उपपत्तीनां भिन्नांशान् पश्यामः । सत्यापनं तथा उपपत्त्योः मध्ये विद्यमानभेदस्य अवगमनेन आरम्भं कुर्मः । उपपत्तेः अवगमनात् पूर्वं वाक्यानां सत्यापनं कर्तुं भवन्तः पृष्टाः आसन् ।

उदाहरणार्थम्, उदाहरणसहितं भवन्तं द्वयोः समसङ्ख्ययोः गुणनफलं समसङ्ख्या इत्यादिवाक्यानां सत्यापनं करोतु इति पृष्टं स्यात् । अतः भवान् किञ्चित् यादृच्छिक-समसङ्ख्याद्वयं यथा 24, 2006 इति स्वीकृत्य $24 \times 2006 = 48144$ समसङ्ख्या एव इति परिशीलितवान् स्यात् । एतावत्पर्यन्तं भवन्तः ईदृशं बहु उदाहरणानि परिशीलितवन्तः स्युः।

अपि च अभ्यासरूपेण भवन्तः बहुत्रिभुजानां चित्राङ्कनं कृत्वा तेषाम् अन्तःकोणानां परिकलनं कृतवन्तः स्युः । त्रुटिं विहाय, मापनेन भवन्तः ज्ञातवन्तः स्युः यत् त्रिभुजानाम् अन्तःकोणानां योगः तु 180^0 इति ।

अस्यां पद्धत्यां कः दोषः ? अस्यां सत्यापनपद्धत्यां बह्व्यः समस्याः सन्ति । यद्वाक्यं सत्यम् इति विश्वसिमः तत् सत्यम् इति ज्ञातुम् उपकरोति, किन्तु सैव उक्तिः सर्वासु स्थितिषु सत्या इति विश्वसितुम् अपि न शक्नुमः । उदाहरणार्थम् – बहूनां समसङ्ख्यायुगलानां गुणनफलं समसङ्ख्या एव इति कारणेन द्वयोः समसङ्ख्ययोः गुणनफलं समसङ्ख्या एव इति अनुमीयते । किन्तु सर्वासामपि समसङ्ख्यानाम् गुणनफलं समसङ्ख्या एव इति निश्चितरूपेण वक्तुं न शक्यते । भवन्तः स्थूलरीत्या सर्वेषामपि समसङ्ख्यायुगलानां गुणनफलं परिकलय्य ज्ञातु न शक्नुवन्ति । यदि भवन्तः एवं कुर्वन्ति तर्हि अधोदत्त-व्यङ्ग्यचित्रे विद्यमान-बालिकावत् समसङ्ख्यानां गुणनफलम् आजीवनं परिकलयन्तः भवन्ति। समानतया भवन्तः अन्यानि कानिचन त्रिभुजानि चित्राङ्कितवन्तः स्युः येषाम् अन्तःकोणानां योगः 180^0 न स्यात् अपि । सर्वेषाम् अपि साध्यानां त्रिभुजानाम् अन्तःकोणं मापयितुं न शक्नुमः ।



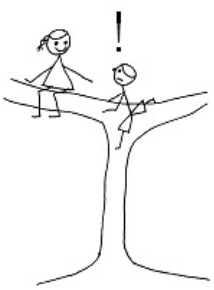




अपि च सत्यापनम् अस्मान् भ्रामयितुम् अपि शक्नोति । उदाहरणार्थम् – पास्कल्-त्रिभुजस्य (प्रश्नावलि *A*1.3 इत्यस्य द्वितीयप्रश्नः) पूर्वतनपरिशीलनम् आधारीकृत्य एवं निष्कर्षं कर्तुं प्रभवामः यत् $11^5 = 15101051$. वस्तुतः $11^5 = 161051$.

कासुचन स्थितिषु एव सत्यापने अवलम्बनं विना काचित् अन्या दृष्टिः अपेक्षिता भवति । सा दृष्टिः एव उक्तेः निरूपणं नाम । या प्रक्रिया कस्याश्चन गणितीयोक्तेः सत्यतां शुद्धतर्केण निरूपयितुं शक्नोति सा एव गणितीय-उपपत्तिः इति उच्यते । *A*1.2 अनुच्छेदे द्वितीय-उदाहरणे भवन्तः दृष्टवन्तः यत् काचन गणितीयोक्तिः असत्या इति निरूपयितुम् एकं विपरीतम् उदाहरणं दर्श्यते चेत् अलम् इति । गणितीयवाक्यानां मान्यीकरणार्थं सहस्रशः स्थितीनां परिशीलनं कृत्वा तत्सत्यं वा न वा इति उच्यते चेत् न अलम् । किन्तु सा उक्तिः असत्या इति निरूपयितुं किञ्चन विपरीतम् उदाहरणं दीयते चेत् अलम् । अत्र एषः अंशः निर्धारणीयः ।





गणितीयोक्तिः असत्या इति निरूपयितुम् एकं विपरीतम् उदाहरणं दीयते चेत् अलम्।

अतः $7 + 5 = 12$ इति गणनं 'द्वयोः विषमसङ्ख्ययोः योगः विषमसङ्ख्या' इति उक्तेः विपरीतम् उदाहरणम् अस्ति।

(i) इदानीम् उपपत्तिषु विद्यमानाः आधारभूत-सामग्रीः पश्यामः।

(ii) किञ्चन प्रमेयं निरूपयितुम् अस्माकं समीपे काचन स्थूला कल्पना स्यात् प्रमेये दत्ताः सूचनाः स्पष्टतया अवगताः भवेयुः तथा प्रयुक्ताः च भवेयुः

उदाहरणार्थम् $A1.2$ प्रमेयं द्वयोः समसङ्ख्ययोः गुणनफलं समसङ्ख्या इति वदति। अत्र प्राकृतसङ्ख्याद्वयं दत्तम् अस्ति। अतः तेषां गुणधर्माणाम् उपयोगं कुर्मः। द्वितीयाध्याये अपवर्तनप्रमेये भवतः समीपे $p(x)$ इति किञ्चन बहुपदं दीयते। तथा $p(a) = 0$ इति उच्यते। एतत् उपयुज्य $x - a$ इत्येषः, $p(x)$ इत्यस्य बहुपदस्य अपवर्तः इति भवता निरूपणीयम्। समानरीत्या अपवर्तनप्रमेयस्य विलोमरूपेण भवतः समीपे $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तः $x - a$ इति उच्यते, भवता च अनया परिकल्पनया $p(a) = 0$ इति निरूपणीयम्।

प्रमेयस्य निरूपणप्रक्रियायां भवन्तः निर्माणानां प्रयोगम् अपि कर्तुं शक्नुवन्ति। उदाहरणार्थम् – त्रिभुजस्य सर्वकोणानां योगः 180^0 इति निरूपयितुं वयम् – समान्तररेखानां गुणधर्मान् उपयोक्तुं शक्नुमः।

(iii) उपपत्तिः तु गणितीयवाक्यानां क्रमगत-अनुक्रमैः निर्मिता अस्ति। उपपत्त्यां विद्यमाना प्रत्येकं उक्तिः पूर्ववाक्यात् तर्केण व्युत्पन्ना अस्ति, अथवा पूर्वं निरूपितप्रमेयात् स्वयंसिद्धात् वा परिकल्पनायाः वा प्राप्ता अस्ति।

(iv) तर्कसङ्गत-गणितीयरीत्या सत्यवाक्यानां निष्कर्षः भवेत्। तत्तु यत् अस्माभिः निरूपणीयं, तदेव भवेत्। प्रमेयं अपि तमेव विषयं वदति।

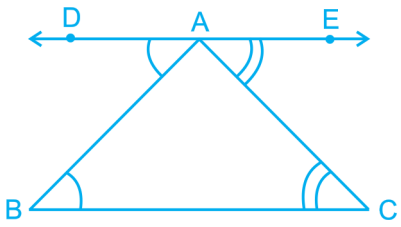
एताः सामग्रीः अवगन्तुम् $A1.1$ प्रमेयस्य तथा तस्य उपपत्तेः विश्लेषणं कुर्मः। भवन्तः षष्ठाध्याये एव एतान् विषयान् अधीतवन्तः। आदौ ज्यामितेः उपपत्तेः विषये काश्चन टिप्पण्यः दीयन्ते। असकृत् प्रमेयनिरूपणार्थं चित्राङ्कनं क्रमः। एषः बहु महत्त्वपूर्णांशः च। किन्तु उपपत्तेः प्रत्येकम् अपि उक्तिः तर्केण एव संस्थापिता भवेत्। पौनःपुन्येन छात्राणां सकाशात् ईदृशानि वाक्यानि शृणुमः यत् 'एतौ कोणौ समानौ यतो हि चित्रे समानौ दृश्येते इति'। अथवा सः कोणः 90^0 स्यात्, यतो हि ते द्वे रेखे परस्परं समालम्बे इति दृश्यते। आपातदर्शनेन वञ्चिताः भवेयः, सावधानम्। ($A1.3$ आकृतिं स्मरन्तु)

इदानीम् $A1.1$ प्रमेयं प्रति गच्छामः।

प्रमेयं A1.1 : त्रिभुजस्य अन्तःकोणानां योगः तु 180^0

उपपत्तिः - ABC इति किञ्चन त्रिभुजं स्वीकुर्वन्तु (A1.4 आकृतिं पश्यन्तु)।

अस्माभिः $\angle A\text{BC} + \angle \text{BC}A + \angle CA\text{B} = 180^0$ इति निरूपणीयम्। (1)



आकृतिः A1.4

BC इत्यस्याः रेखायाः समान्तरम् DE इति रेखां निर्मातु यथा तत् A द्वारा गच्छेत्। (2)

DE रेखा, BC इत्यस्याः रेखायाः समान्तरम् अस्ति, तथा AB तिर्यञ्चाङ्कः अस्ति।

अतः $\angle \text{D}A\text{B}$ तथा $\angle A\text{BC}$ परस्परम् एकान्तरकोणौ स्तः। अतः षष्ठाध्यायस्य 6.2 प्रमेयेण तौ समानौ स्तः, अर्थात् - $\angle \text{D}A\text{B} = \angle A\text{BC}$। (3)

समानतया $\angle CA\text{E} = \angle A\text{CB}$ (4)

अतः $\angle A\text{BC} + \angle \text{B}A\text{C} + \angle A\text{CB} = \angle \text{D}A\text{B} + \angle \text{B}A\text{C} + \angle CA\text{E}$ (5)

किन्तु $\angle \text{D}A\text{B} + \angle \text{B}A\text{C} + \angle CA\text{E} = 180^0$ यतो हि ते ऋजुकोणं निर्मान्ति। (6)

अतः $\angle A\text{BC} + \angle \text{B}A\text{C} + \angle A\text{CB} = 180^0$ (7)

इदानीम् उपपत्तेः प्रत्येकं सोपाने टिप्पणीं कुर्मः।

प्रथमं सोपानम् - अस्माकं प्रमेयं तु त्रिभुजानां विषये एव अस्ति, अतः वयं केनचित् त्रिभुजेन आरम्भं कुर्मः।

द्वितीयं सोपानम् - एषा मुख्ययोजना यत् आत्मफुरणं वा, प्रमेयं निरूपयितुं कथम् अग्रे गन्तव्यम् इति स्पष्टम् अवगमनं वा स्यात्। बहुशः ज्यामितीय-उपपत्तीनां कृते निर्माणम् अनिवार्यं भवति।

तृतीयं तथा चतुर्थं सोपानम् - पूर्वं निरूपितेन 6.2 प्रमेयेण, DE, BC परस्परं समान्तरौ स्तः इति तथ्येन $\angle \text{D}A\text{E} = \angle A\text{BC}$, $\angle CA\text{E} = \angle A\text{CB}$ इति निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः। यदि केचन द्वे रेखे तिर्यञ्चाङ्कद्वारा विभजिते, तर्हि एकान्तरकोणौ समानौ भवतः इति प्रमेयं 6.2 वदति।

पञ्चमं सोपानम् - अत्र यूक्लिडस्य स्वयंसिद्धस्यस्य उपयोगं कुर्मः (पञ्चमाध्यायं पश्यन्तु)।

स्वयंसिद्धं वदति यत् यदि समानानि समानेन सह युज्यन्ते तर्हि फलितानि अपि समानानि भवन्ति। निगमनेन एतत् उपयुज्य

$\angle A$BC + $\angle$BAC + $\angle A$CB = $\angle$DAB + $\angle$BAC + $\angle$CAE इति निरूपितम्।

अर्थात्, त्रिभुजस्य अन्तःकोणानां योगः तु ऋजुरेखायां विद्यमानानां कोणानां योगतुल्यः भवति।

षष्ठं सोपानम् - अत्र षष्ठाध्यायस्य रैखिकयुग्म-स्वयंसिद्धस्यस्य उपयोगं कुर्मः। स्वयंसिद्धं वदति यत् ऋजुरेखायाः कोणानां योगः 180^0 इति। तत् दर्शयितुं $\angle$DAB + $\angle$BAC + $\angle$CAE = 180^0

सप्तमं सोपानम् - यूक्लिडस्य स्वयंसिद्धस्यस्य उपयोगं कुर्मः। सः वदति यत् ये पदार्थाः समानपदार्थेन तुल्याः भवन्ति, ते परस्परं समानानि भवन्ति। तत् निष्कर्षं कर्तुं $\angle A$BC + $\angle$BAC + $\angle A$CB = $\angle$DAB + $\angle$BAC + $\angle$CAB = 180^0.

अत्र जानातु यत् सप्तमसोपाने एव अस्माभिः निरूपणीयं प्रमेयं निरूपितम् अस्ति।

इदानीम् $A1.2$ तथा $A1.3$ प्रमेययोः निरूपणं तयोः विश्लोषणं विना एव कुर्मः।

प्रमेयं A1.2 : द्वयोः समप्राकृतसङ्ख्ययोः गुणनफलं समसङ्ख्या।

उपपत्तिः - x तथा y द्वे प्राकृतसङ्ख्ये स्त। अस्माभिः xy समसङ्ख्या इति निरूपणीयम्। यतः x तथा y समसङ्ख्ये, ते 2 इति अनेन विभज्ये भवतः। तयोः अभिव्यञ्जनं - m इति कस्यैचित् प्राकृतसङ्ख्यायै $x = 2m$, तथा n इति कस्यैचित् प्राकृतसङ्ख्यायै $y = 2n$ इति कर्तुं शक्यते।

तर्हि $xy = 4mn$। $4mn$ इत्येतत्, 2 इत्यनेन विभज्यते इत्यतः xy अपि विभज्यते।

अतः xy समसङ्ख्या अस्ति।

प्रमेयं A1.3 : क्रमगत-सम-प्राकृतसङ्ख्यात्रयस्य गुणनफलं 16 द्वारा विभज्यते।

उपपत्तिः - याः काः अपि क्रमगत-समसङ्ख्याः एवं भवन्ति $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$ (n इति काचित् प्राकृतसङ्ख्या)

अस्माभिः $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$ इत्येषां गुणनफलं 16 द्वारा विभज्यते इति निरूपणीयम्।

इदानीं $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$$

अस्माकं समीपे स्थितिद्वयम् अस्ति – n इति सङ्ख्या समा अथवा विषमा स्यात्। प्रत्येकं स्थितिं परिशीलयामः।

यदि n समसङ्ख्या तर्हि कस्यैचित् m इति प्राकृतसङ्ख्यायै $n = 2m$ इति लेखितुं शक्नुमः। तथा $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$

अतः $2n(2n + 2)(2n + 4)$ 16द्वारा विभज्यते।

अग्रे यदि n विषमसङ्ख्या स्यात् तर्हि $n + 1$ समसङ्ख्या स्यात्। तथा r इति कस्यैचित् प्राकृतसङ्ख्यायै $n + 1 = 2r$ इति लेखितुं शक्नुमः।

इदानीम्- $2n\,(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$

$= 8(2r - 1)2r(2r + 1)$

$= 16r\,(2r - 1)(2r + 1)$

अतः $2n(2n + 2)(2n + 4)$ 16 द्वारा विभज्यते।

अतः स्थितिद्वये अपि कासाञ्चन क्रमगतसमप्राकृतसङ्ख्यानां गुणनफलं 16द्वारा विभज्यते इति दर्शितवन्तः।

वयम्, गणितज्ञाः केन प्रकारेण परिणामान् आविष्कुर्वन्ति तथा कथम् औपचारिकतया कठिनाः उपपत्तीः लिखन्ति इति अनयोः मध्ये विद्यमानं भेदं दर्शयन्तः एतम् अध्यायम् उपसंहरामः। पूर्वोक्तप्रकारेण प्रत्युपपत्तेः किञ्चन आत्मस्फुरितं चिन्तनं भवति एव (एकात् अधिकं अपि भवितुम् अर्हति)। गणितज्ञस्य चिन्तने तथा परिणामप्राप्तौ आत्मस्फुरणम् एव केन्द्रं भवति। गणितज्ञानाम् उपपत्तिः तु सर्वं व्यामिश्रितं प्राप्यते। कश्चन गणितज्ञः बहुषु मार्गेषु विविधानि चिन्तनानि, विविधान् तर्कान् तथा उदाहरणानि च प्रयुज्य एव अभीष्टं समाधानम् अथवा उपपत्तिं प्राप्नोति। सर्जनात्मकसोपानात् परम् एव सर्वान् अपि तर्कान् सङ्गृह्य उपपत्तिरूपेण प्रस्तूयते।

अत्र अवधातव्यः अंशः यत् भारतीयगणितज्ञः श्रीनिवास-रामानुजः बहु उन्नतस्तरीय-आत्मस्फुरणद्वारा एव बहु गणितीयवाक्यानि प्राप्तवान् यानि सः सत्यम् इति प्रतिपादितवान्। तेषु बहूनि वाक्यानि सत्यानि इति निरूपितानि, तथा तानि प्रसिद्धप्रमेयानि सन्ति। अद्यावधि अपि विश्वे विद्यमानानि गणितज्ञाः तेन प्रतिपादनानि सत्यानि उत न इति निरूपयितुं क्लिश्यन्ति।



श्रीनिवास-रामानुजः
(1887-1920)
आकृतिः A1.5

प्रश्नावलिः A1.4

1. प्रथमसोपानम् – अधोदत्तवाक्यानि असत्यानि इति निरूपयितुं विपरीत-उदाहरणानि दीयन्ताम् –
   (i) यदि द्वयोः त्रिभुजयोः मध्ये सङ्गतकोणाः समानाः तर्हि ते त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे भवतः।
   (ii) समभुजयुतचतुर्भुजं वर्गः इति उच्यते।
   (iii) समकोणयुतचतुर्भुजं वर्गः इति उच्यते।
   (iv) a, b इति पूर्णाङ्कयोः, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
   (v) $2n^2 + 11$, सर्वासां पूर्णसङ्ख्यानां कृते अविभाज्या अस्ति।

(vi) सर्वेषां धन-पूर्णाङ्कानां कृते $n^2 - n + 41$ इति अविभाज्यसङ्ख्या अस्ति।

2. भवताम् इष्टाम् उपपत्तिं स्वीकृत्य $A1.5$ अनुच्छेदे दत्तप्रकारेण प्रतिसोपानं विश्लेषणं कुर्वन्तु (किं दत्तम्, किं निरूपणीयम्, के प्रमेयाः तथा स्वयंसिद्धानि च प्रयुक्तानि इत्यादि)

3. द्वयोः विषमसङ्ख्ययोः योगः समसङ्ख्या इति निरूपयन्तु।

4. द्वयोः विषमसङ्ख्ययोः गुणनफलं विषमसङ्ख्या इति निरूपयन्तु।

5. क्रमगतसमसङ्ख्यात्रयस्य योगः 6द्वारा विभज्यते इति निरूपयन्तु।

6. $y = 2x$ इति समीकरणद्वारा सूचितायां रेखायाम् अपरिमितबिन्दवः सन्ति इति निरूपयन्तु {कस्मैचित् n इति पूर्णाङ्काय $(n, 2n)$ इति बिन्दुं स्वीकरोतु}

7. भवतः एवं किञ्चन मित्रं स्यात् यः भवन्तं काञ्चन सङ्ख्यां चिन्तयितुं वदति, तया सङ्ख्यया सह काञ्चन प्रक्रियां वदति, भवतः ज्ञानं विना एव भवता चिन्तितसङ्ख्यां वदति। अत्र तादृशम् उदाहरणद्वयम् अस्ति।

   (i) काञ्चन सङ्ख्यां चिनोतु, तद्द्विगुणितं करोतु, तत्र 9 योजयन्तु, पुनः भवता चिन्तितसङ्ख्यां योजयन्तु, 3 सङ्ख्यया विभजन्तु, 4 योजयन्तु, चिन्तितसङ्ख्यां ततः व्यवकलयन्तु। भवता चिन्तितम् 7 इति।

   (ii) काञ्चन त्र्यङ्क-सङ्ख्यां लिखतु (उदा.425)। तान् अङ्कान् समक्रमेण पुनरावर्तयन् 6 अङ्कसङ्ख्यां करोतु (425425 इति)। भवतः नूतनसङ्ख्या 7, 11, 13 द्वारा विभज्यते।

A1.6 सारांशः

अस्मिन् परिच्छेदे भवन्तः अधोदत्तांशान् पठितवन्तः –

1. गणिते काचन उक्तिः तदैव अङ्गीकार्या भवति यदा सा सर्वदा सत्या वा असत्या वा स्यात्
2. काचन गणितीयोक्तिः असत्या इति निरूपयितुम् एकं विपरीतम् उदाहरणं दर्शयामः चेत् अलम्
3. स्वयंसिद्धवाक्यानि उपपत्तिं विना एव सत्यानि इति परिकल्पितानि
4. आधारप्रतिज्ञा इति उक्तिः गणितीय-आत्मस्फुरणद्वारा सत्यम् इति विश्वसिमः। किन्तु तासां निरूपणस्य आवश्यकता अस्ति।
5. यस्य गणितीयोक्तेः सत्यता निरूपिता तत् प्रमेयम् इति उच्यते।
6. गणितवाक्यानि निरूपयितुं विद्यमानं मुख्यं तर्कसाधनं तु निगमनम्
7. उपपत्तिः तु क्रमगत-गणितीयवाक्यानां द्वारा निर्मिता अस्ति। उपपत्त्यां प्रत्येकम् उक्तिः पूर्वस्मात् ज्ञातवाक्यात् निगमनद्वारा व्युत्पन्ना अस्ति अथवा पूर्वं निरूपितप्रमेयात् वा स्वयंसिद्धात् वा परिकल्पनायाः वा प्राप्ता अस्ति।

परिशिष्टम् 2

गणितीयनिदर्शनस्य प्रास्ताविकम्

A2.1 प्रस्तावना

पूर्ववर्गेषु भवन्तः वास्तविकजगत्सम्बद्धसमस्यानां समाधानं कुर्वन्तः सन्ति । उदाहरणार्थं भवन्तः सामान्यवृद्धेः विषये सामान्यसमस्यानां समाधानं सूत्रम् उपयुज्य कृतवन्तः । एतत् सूत्रं तु वृद्धेः तथा अन्येषां त्रयाणां राशीनां च मध्ये सम्बन्धं कल्पयति । ते त्रयः राशयः मूलधनं, वृद्धिस्तरः, कालावधिः च । एतत्सूत्रणं गणितीयनिदर्शनस्य एकम् उदाहरणम् । एतत् गणितीयनिदर्शनं वास्तविकजीवनेन सह सम्बद्धम् अस्ति ।

गणितीयनिदर्शनं बहूनां वास्तविकस्थितीनां समाधानार्थं प्रयुज्यते । तेषु केचन –

- उपग्रहाणाम् उड्डयनम्
- वृष्टेः प्रागुक्तिः
- वाहनानां प्रदूषणस्य नियन्त्रणम्
- महानगरेषु बाहनसम्मर्दस्य न्यूनीकरणम्

अस्मिन् अध्याये वयं गणितीयनिदर्शनस्य निर्माणप्रक्रियायः प्रस्तावनं कुर्मः । **गणितीयनिदर्शने वास्तविकजगतः** समस्यां स्वीकृत्य तत्तुल्य- **गणितीयसमस्यारूपेण** लिखन्तु । अग्रे गणितीयसमस्यायाः समाधानं कृत्वा तं वास्तविकपरिभाषया व्याख्यास्यामः। एतस्मात् अनन्तरं वास्तविकजीवने प्राप्तं समाधानं कियत्प्रमाणेन मान्यम् इति परिशीलयामः । अतः गणितीयनिदर्शनस्य चत्वारि सोपानानि सन्ति सूत्ररचनम्, समस्यायाः समाधानम्, व्याख्या, मान्यीकरणम् ।

पदसमस्यायाः समाधानसमये प्रयुज्यमानया प्रक्रियया आरम्भं कुर्मः । अत्र अस्माभिः याः पदसमस्याः पूर्वेषु वर्गेषु पठिताः तत्समानानि एव अत्रापि चर्च्यन्ते । अग्रे पदसमस्यानां समाधानस्य सोपानानि, एषाम् उपयोगः गणितीयनिदर्शने अपि अस्ति, तान् पश्यामः।

अग्रिमे *A*2.3 इति अनुच्छेदे सामान्य-निदर्शनविषये चर्चयिष्यामः।

*A*2.4 इति अनुच्छेदे निदर्शनस्य समग्रां प्रक्रियां लाभसहितं सीमिततासहितं च चर्चयिष्यामः।

A2.2 पदसमस्यानां पुनरवलोकनम्

अस्मिन् अनुच्छेदे पूर्वेषु वर्गेषु पठितसमस्यासदृश-पदसमस्यानां विषये चर्चयिष्यामः।

उदाहरणम् 1 : मम कार्-याने 48 लीटर्-मिते इन्धने विद्यमाने सति 432 किलोमीटर्-मितं दूरम् अहं यात्रां कृतवान्। मया इतोऽपि 180 किलोमीटर्-मितं दूरं गन्तव्यम् अस्ति। कियत् इन्धनम् अपेक्षितं भवति ?

समाधानम् - वयं समस्यासमाधानस्य सोपानानाम् आवलिं कुर्मः।

सोपानम् 1 : वयं जानीमः यत् अधिकं दूरं गन्तम् अधिकम् इन्धनम् अपेक्षितं भवति। दूरानुगुणं इन्धनस्य प्रमाणं आवश्यकं भवति।

432 किलोमीटर्-मितं दूरं गन्तुम् अपेक्षितम् इन्धनम् = 48 लिटर्-मितम्

180 किलोमीटर्-मितं दूरं गन्तुम् इन्धनम् = ?

गणितीयवर्णनम् -

x = मया क्रमितं दूरम्

y = मया अपेक्षितम् इन्धनम्

y, x च परस्परम् समानुपाते स्तः।

$y = kx$, यत्र k स्थिराङ्कः अस्ति।

मया 48 लिटर्-मितेन इन्धनेन 432 किलोमीटर्-मितं दूरं गन्तुं शक्यते।

$$y = 48, x = 432$$

$$k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$$

$$y = kx$$

$$y = \frac{1}{9}x$$

समीकरणम् अथवा सूत्रम् इन्धनस्य अपेक्षितस्य प्रमाणस्य निश्चितदूरस्य च मध्ये सम्बन्धं कल्पयति।

सोपानम् 2 : समाधानम् - 180 किलोमीटर-मिरं दूरं गन्तुं कियत् इन्धनम् अपेक्षितम् इति ज्ञातव्यम्। यदा x = 180, तदा y इत्यस्य मानं ज्ञातव्यम्। x = 180,

$$y = \frac{180}{9} = 20 \text{ Ltr}$$

सोपानम् 3 : व्याख्या - $y = 20$ इति कारणेन अस्माभिः 180 किलोमिटर्-मितं दूरं गन्तं 20 लीटर्-मितम् इन्धनम् अपेक्ष्यते।

एतत् सूत्रं तु सर्वासु स्थितिषु प्रयोक्तुं न शक्यते इति किं भवन्तः अवगतवन्तः? उदाहरणार्थं 432 किलोमिटर्-मितं दूरं पर्वतमार्गे तथा 180 किलोमिटर्-मितं दूरं समतलमार्गे वर्तते चेत् कार्-यानं पर्वतमार्गे जवेन इन्धनस्य उपयोगं करोति। अतः 180किलोमिटर्-मिते दूरे वयं समानस्तरस्य प्रयोगं कर्तुं न शक्नुमः, यत्र कार्-यानेन इन्धनं मन्दगत्या उपयुज्यते। अतः यत्र इन्धनं द्वयोः यात्रयोः समानगत्या उपयुज्यते तासु सर्वासु स्थितिषु एतस्य सूत्रस्य प्रयोगः भवति। तदा एव इन्धन-दूरयोः अनुपात-सम्बन्धः भविष्यति। वयं समस्यासमाधानसमये एतस्य परिकल्पनं कुर्मः।

उदाहरणम् 2 : ऊहतां यत् सुधीरः 8% स्तरे साधारण-वार्षिकवृद्ध्यां रु.15,000/- निवेशितवान्। निवेशात् प्राप्तधनराश्या सः 19,000/-रूप्यक-मितं किञ्चन वस्त्रक्षालनयन्त्रं क्रेतुम् इच्छति। तेन क्षालनयन्त्रं क्रेतव्यं चेत् कियत् कालपर्यन्तं रु.15,000/- निवेशनीयं भवति ?

समाधानम् - प्रथमसोपानम् - समस्यायाः सूत्रम् - अत्र मूलधनं तथा वृद्धिस्तरम् अपि जानीमः। अस्माभिः वर्षाणां सङ्ख्या ज्ञातव्या भवति।

गणितीयविवरणम् - साधारणवृद्धेः सूत्रम् $I = \frac{Pnr}{100}$

P = मूलधनम्

n = वर्षाणां सङ्ख्या

r % = वृद्धेः स्तरः

I = प्राप्ता वृद्धिः

अत्र मूलधनम् = रु.15,000य-

क्षालनयन्त्रक्रयणार्थं सुधीरेण अपेक्षितं धनम् = 19,000

प्राप्तव्या वृद्धिः = रु.19,000 – 15,000

= 4,000/-

वर्षाणां सङ्ख्या येषु रु.15,000/- धनस्य निवेशनम् अभवत् = n

8% स्तरे n सङ्ख्यात्मक-वर्षपर्यन्तं 15,000 रूप्यकेषु प्राप्ता वृद्धिः = I

$$I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

$$I = 1,200\, n \qquad (1)$$

यदि 15,000 रूप्यकाणां 8% निवेशनम् अभवत्, तर्हि

I = 1,200 n इति समीकरणं वृद्धिस्तरस्य तथा वर्षाणां सङ्ख्ययाः मध्ये सम्बन्धं कल्पयति । अस्माभिः सः कालावधिः ज्ञातव्यः यस्मिन् प्राप्ता वृद्धिः रु 4,000 अस्ति।

$$4{,}000 = 1{,}200\ n \qquad (2)$$

द्वितीयं सोपानम् - समस्यायाः समाधानम् - द्वितीयसमीकरणस्य समाधानेन

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

तृतीयं सोपानम् - व्याख्या - $n = 3\frac{1}{3}$ वर्षस्य तृतीयः भागः तु चत्वारः मासाः। अतः सुधीरः त्रिषु वर्षेषु चतुर्षु मासेषु एकं क्षालनयन्त्रं क्रेतुं शक्नोति ।

किं भवन्तु उपरिदत्ते उदाहरणे क्रियमाणानां परिकल्पनानाम् अनुमानं कर्तुं शक्नुवन्ति ? वयं चिन्तयामः यत् यस्मिन् कालावधौ वृद्धेः परिकलनं कुर्मः, तस्मिन् वृद्धिस्तरपरिवर्तनं नास्ति इति । अन्यथा $I = \frac{Pnr}{100}$ इति सूत्रस्य मान्यता एव न भवति । एतद् अपि चिन्तयामः यत् यस्मिन् कालावधौ सुधीरः धनसङ्ग्रहणं करोति तस्मिन् काले क्षालनयन्त्रस्य मूल्यम् अधिकं न अभवत् इति ।

उदाहरणम् 3 : एका स्वयंसञ्चालित-नौका ऊर्ध्वप्रवाहे गच्छन्ती नदीतीरे स्थित-नगरद्वयस्य मध्ये विद्यमानं दूरं 6 घण्टासु साधयति । सा नौका समानं दूरम् अनुप्रवाहम् 5 घण्टासु साधयति । यदि प्रवाहस्य वेगः प्रतिघण्टं 2 किलोमिटर्-मितं भवति तर्हि शान्तजले नौकावेगं जानन्तु ।

प्रथमं सोपानम् - सूत्रम् - नद्याः वेगं, स्थानद्वयस्य मध्ये विद्यमानं दूरं च साधयितुं समयं जानीमः । शान्तजले नौकायाः वेगः ज्ञातव्यः भवति।

गणितीयविवरणम् - नौकायाः वेगः x इति, समयः t इति प्रयातं दूरं च y km/h इति

तथा $$y = tx \qquad (1)$$

नगरद्वयस्य मध्ये विद्यमानं दूरं d km इति भवतु

ऊर्ध्वप्रवाहे नौकायाः वास्तविकः वेगः = नौकावेगः - नदीवेगः (यतः नौका नदीप्रवाहस्य विरुद्धदिशि चलति)

ऊर्ध्वप्रवाहे नौकायाः वेगः = प्रतिघण्टं $(x - 2)$ km.

ऊर्ध्वप्रवाहे नगरद्वयस्य मध्ये विद्यमानं दूरं साधयितुं 6 घण्टात्मकः समयः अपेक्षितः भवति । प्रथमसमीकरणतः

$$d = 6(x - 2) \qquad (2)$$

अनुप्रवाहे तु नौकायाः वेगेन सह नद्याः वेगः योजनीयः भवति ।

अतः अनुप्रवाहे नौकावेगः = प्रतिघण्टं $x + 2$ km/h

नौका अनुप्रवाहे समानं दूरं गन्तुं 5 घण्टां स्वीकरोति ।

अतः $d = 5(x + 2)$ (3)

द्वितीय-तृतीयसमीकरणाभ्यां

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \quad (4)$$

द्वितीयं सोपानम् - चतुर्थसमीकरणतः मानं प्राप्नुमः $x = 22$

तृतीयं सोपानम् - यतः $x = 22$, शान्तजले स्वयञ्चालिनौकायाः वेगः प्रतिघण्टं 22 किलोमिटर्-मितः।

उपरिस्थे उदाहरणे वयं जानीमः यत् नद्याः वेगः सर्वत्र समानं नास्ति इति । तीरस्य समीपे मन्दगत्या प्रवहति, मध्ये तीव्रगत्या प्रवहति । नौका तीरात् प्रारभ्य नद्याः मध्यभागं प्रति गच्छति । गन्तव्यस्य स्थानस्य समीपे गमने सति पुनः मन्दगतिं प्राप्य तीरं प्रति गच्छति । अतः नौकायाः वेगः मध्ये, तीरे च किञ्चिदिव भिद्यते । नौका तु किञ्चित्कालं यावदेव तीरस्य समीपे भवति इति कारणेन नद्याः तीरे मध्ये च गत्योः विद्यमानः भेदः नौकायाः वेगे किञ्चिदेव प्रभावं जनयति । अतः वयं नद्याः गत्यां विद्यमानं भेदं निराकर्तुं शक्नुमः। वयं नौकायाः वेगे विद्यमानं भेदमपि निराकर्तुं शक्नुमः। नद्याः गतिं विहाय, नौकायाः तलस्य तथा जलस्य मध्ये जायमानं घर्षणम् अपि नौकायाः वास्तविकं वोगं प्रभावयितुं शक्नोति । वयं परिकल्पयामः यत् एतत् घर्षणम् अपि अत्यल्पमेव इति।

अस्माकं परिकल्पनाः

1 नद्याः गतिः तथा नौकायाः वेगः सर्वदा स्थिराङ्कः इति ।

2 नौकाजलयोः घर्षणं तथा वायोः घर्षणम् उपेक्षणीयं भवति

वयं शान्तजले नौकायाः वेगः, उपरिस्थानां परिकल्पनानाम् आधारेण परिकल्पनां कृतवन्तः।

यथा उपरिस्थासु पदसमस्यासु दृष्टवन्तः तथा पदसमस्यासमाधाने त्रीणि सोपानानि सन्ति ।

1. **सूत्रम् -** वयं समस्यायाः विश्लेषणं कृत्वा समस्यासम्धाने केषां कारकाणाम् अधिकः प्रभावः अस्ति इति पश्यामः। एतानि कारकाणि सुसङ्गतकारकाणि इति उच्यन्ते । अस्माकं प्रथमे उदाहरणे सङ्गतकारकाणि तु प्रयातं दूरं, प्रयुक्तम् इन्धनं च भवतः । मार्गस्य अवस्था, चालनगतिः इत्यादीनाम् अन्यकारकाणाम् उपेक्षां कृतवन्तः । अन्यथा समस्यासमाधानम् इतोऽपि जटिलतरं स्यात् । उपेक्षमाणानि कारकाणि असङ्गतकारकाणि इति उच्यते । वयम् अग्रे समस्याम् एकस्य अथवा अनेकगणितीयसमीकरणानां परिभाषायां विवृणुमः ।
2. **समाधानम् -** वयं गणितीयसमीकरणानां समाधानद्वारा मूलसमस्यां परिहर्तुं प्रथमे सोपाने विद्यमानया उचितपद्धत्या प्रयत्नं कुर्मः ।
3. **व्याख्या -** वयं मूलसमस्यायाः दृष्ट्या द्वितीयसोपाने प्राप्तं समाधानं पश्यामः ।

अत्र भवद्भ्यः केचन अभ्यासाः सन्ति । भवन्तः पदसमस्यासमाधानस्य सोपानानाम् अवगमनं प्राप्नुम्

अधोदत्तसमस्यासु उपरिदत्तसोपानत्रयस्य उपयोगं कुर्वन्तु।

प्रश्नावलिः A2.1

प्रत्येकं समस्यायां त्रीणि सोपानानि अवलोक्य सुसङ्गत-असङ्गत-कारकाणि स्पष्टतया वदन्तु।

1. ऊहतां यत् कस्याश्चन संस्थायाः स्वल्पकालार्थम् एकस्य सङ्गणकस्य आवश्यकता अस्ति । सा संस्था प्रतिमासं रु.2,000/- रूप्यकैः भाटकेन स्वीकर्तुं शक्नोति, अथवा रु.25,000/- रूप्यकैः क्रेतुं शक्नोति। यदि दीर्घकालार्थं सङ्गणकम् अपेक्षितं तर्हि संस्थया अधिकं भाटकं दातव्यं भवेत्। तदपेक्षया क्रयणम् एव न्यूनमूल्ययुक्तं स्यात्। अपरपार्श्वे यदि एकमासार्थम् एव सङ्गणकम् अपेक्षितं तर्हि भाटके स्वीकरणमेव युक्तं भवति। केभ्यः मासेभ्यः परं सङ्गणकस्य क्रयणम् एव न्यूनमूल्यतरं स्यात् इति अवगच्छत।
2. ऊहतां यत् किञ्चन कार्-यानं A स्थानतः प्रतिघण्टं 40 किलोमीटर्-मितवेगेन गत्वा B स्थानं प्राप्नोति। समानसमये अन्यत् कार्-यानं B स्थानतः A पर्यन्तं प्रतिघण्टं 30किलोमिटर्-मित-वेगेन गच्छति। यदि A-B अनयोः मध्ये 100 किलोमीटर्-मितं दूरम् अस्ति, तर्हि कदा द्वयोः यानयोः मेलनं भविष्यति ?
3. चन्द्रः भूलोकात् 3,84,000 किलोमीटर्-मिते दूरे अस्ति । चन्द्रस्य पृथिव्याः परिक्रममार्गः तु प्रायः वृत्तीयः अस्ति। चन्द्रस्य परिक्रमस्य वेगं जानातु, परिक्रमस्य समयः 24 घण्टाः इति परिकल्पयन्तु।
4. कश्चन कुटुम्बः येषु मासु जलोष्णकस्य उपयोगं न करोति तेषु मासेषु प्रायशः रु.1,000/- विद्युच्छुल्कं यच्छति । येषु मासेषु जलोष्णकस्य उपयोगः क्रियते, तेषु मासेषु रु. 1,240/- विद्युच्छुल्कं यच्छति । जलोष्णकस्य उपयोगस्य मूल्यं प्रतिघण्टं रु.8/- इति स्तरे अस्ति । प्रतिदिनं कति घण्टाः यावत् जलोष्णकम् उपयुक्तम् इति अवगच्छत।

A2.3 कानिचन गणितीय-निदर्शनानि

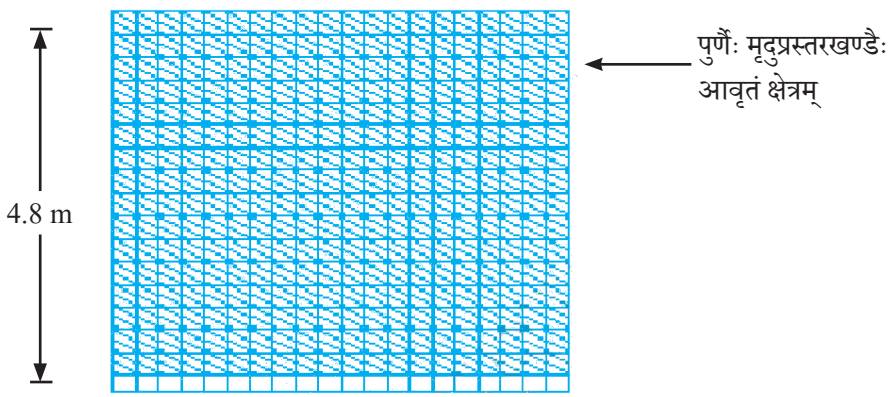
एतावत् अस्माकं चर्चा नूतना न आसीत्। अस्मिन् अनुच्छेदे पूर्वं चर्चितेन सोपानत्रयेण सह नूतनानि कानिचन सोपानानि योजयामः। अस्य सोपानस्य नाम मान्यीकरणम् इति। मान्यीकरणं नाम किम् ? वास्तविकजीवने, यत् निदर्शनं वास्तविकस्थित्या सह युक्तम् उत्तरं न ददाति, तत् निदर्शनं वयम् अङ्गीकर्तुं न शक्नुमः। वास्तवतया उत्तरं परिशील्य, यदि अपेक्षितं, तर्हि गणितीयविवरणस्य परिवर्तनप्रक्रिया एव *मान्यीकरणम्* इति।

एतत् सोपानं गणितीयनिदर्शने एव महत्त्वपूर्णं सोपानम् अस्ति। वयम् एतस्य विषये अग्रिमे अनुच्छेदे प्रस्तावनां कुर्मः।

आदौ एवम् एकम् उदाहरणं पश्यामः यत्र मान्यीकरणात् परं निदर्शनस्य परिवर्तनं न अपेक्षितम्।

उदाहरणम् 4 : उहतां यत् भवतः / भवत्याः समीपे 6 मीटर्-मित-दीर्घः, 5 मीटर्-मितः विशालः च प्रकोष्ठः अस्ति इति। भवान् / भवती प्रकोष्टस्य भूतलं वर्गाकारे मोसैक्-टैल्स्-कुट्टिमद्वारा आवरणं कर्तुम् इच्छति। प्रकोष्ठभूतलस्य भुजा 30 cmमिता अस्ति। कति टैल्स्-विशेषाणाम् आवश्यकता भवति ? गणितीयनिदर्शननिर्माणद्वारा एतस्य समाधानं करोतु।

समाधानम् - सूत्रम् अस्माभिः प्रकोष्ठस्य टैल्स्-विशेषस्य क्षेत्रफलं समस्यासमाधानार्थं स्वीकरणीयं भवति। टैल्स्-विशेषस्य भुजा 0.3 मीटर्-मिता। दीर्घता 6 मीटर्-मिता इति कारणेन वयं $\frac{6}{0.3} = 20$ टैल्स्-विशेषान् प्रकोष्ठस्य दीर्घतानुदिशि पूरयितुं शक्नुमः।



आकृतिः A2.1

यतः प्रकोष्टस्य विशालता 5 मीतर-मिता, $\frac{5}{0.3} = 16.67$ अतः स्तम्भाकारे 16 टैल्स्-विशेषान् पूरयितुं शक्नुमः। $16 \times 0.3 = 4.8$ अतः $5 - 4.8 = 0.2$ मीटर्-मितं विशालं भूतलं टैल्स्-द्वारा आवृतं नास्ति। अन्येषां टैल्स्-भागानां कर्तनेन एषः भागः आवरणीयः भवति। अनावृतस्य भूतलस्य विशालता 0.2 मीटर्-मिता। एषा तु दीर्घतायाः अर्धभागात् अपि अधिका अस्ति। अतः एकं टैल्-विशेषं समभागेन विभज्य तौ द्वौ अर्धभागौ अपि उपयुज्य शेषं भागम् आवरितुं न शक्नुमः।

गणितीयविवरणम्

टैल्स्-आवश्यकतायाः पूर्णसङ्ख्या = (दीर्घतायाः अनुदिशं टैल्स्-सङ्ख्या) × (विशालतायाः अनुदिशं टैल्स्-सङ्ख्या) + अनावृतभागे टैल्स्-संख्या (1)

समाधानम् - यथा पूर्वमेव उक्तं तथा दीर्घतायाः अनुदिशि 20 टैल्स्विशेषाः

तथा विशालतायाः अनुदिशि 16 टैल्स्विशेषाः।

अस्माकं कृते अन्तिमपङ्क्त्यर्थं 20 अधिकटैल्स्-विशेषाः अपेक्षिताः भवन्ति। एतान् प्रथमे समीकरणे स्थापिते सति

$$(20 \times 1\ 6) + 20 = 320 + 20 = 340 \text{ टैल्स्}$$

व्याख्या - अस्माकं कृते प्रकोष्टस्य भूतलस्य पूर्णावरणार्थं 340 टैल्स्विशेषाणाम् अपेक्षा अस्ति।

मान्यीकरणम् - वास्तविकजीवने भवतां भवनकर्मकरः किञ्चित् अतिरिक्त-टैल्स्विशेषान् क्रेतुं पृच्छति। यतः टैल्स्विशेषाणाम् परिमाणानुगुणं कर्तनसमये केचन भागाः भग्नाः भवेयुः। तेषां पुनःस्थापनार्थम् अतिरिक्त-टैल्स्विशेषाः क्रेतव्याः इति सः वदेत्। एषा अतिरिक्तसङ्ख्या मेस्त्री-जनस्य कौशलम् अवलम्बते। किन्तु अस्माभिः तदर्थं प्रथमं समीकरणं परिवर्तनीयं नास्ति। अनेन समीकरणेन वयम् अपेक्षित-टैल्स्विशेषाणां सङ्ख्यानां स्थूलम् अनुमानं प्राप्तुं शक्नुमः।

इदानीम् अन्यां स्थितिं पश्यामः।

उदाहरणम् 5 छ 2000 तमे वर्षे विश्वसंस्थायाः सदस्यराष्ट्रैः कस्यांचित् घोषणायां हस्ताक्षरं कृतम्। तैः राष्ट्रैः 2015 तमवर्षाभ्यन्तरे किञ्चन विकासलक्ष्यं साधयितुम् अङ्गीकृतवन्तः। एतानि लक्ष्यानि सहस्रमान-विकासलक्ष्यानि इति उच्यते। एषु अन्यतमं लिङ्गतारतम्यस्य निवारणम्। एतत् लक्ष्यं कियता प्रमाणेन साधितम् अस्ति इति निर्णेतुं प्राथमिक-माध्यमिक-उन्नत-शिक्षास्तरेषु बालबालिकानाम् अनुपातः एव सूचकः भवति। भारतेन अस्यां घोषणायां हस्ताक्षरं कृतम् इति कारणेन एतम् अनुपातं वर्धयितुं कटिबद्धम् अस्ति। प्राथमिकशिक्षास्तरे प्रविष्टबालबालिकानां प्रतिशतस्य आधारसामग्री अत्र दत्ता अस्ति (कोष्ठकम् *A*2.1)

कोष्ठकम् A2.1

वर्षम्	प्रविष्टानां प्रतिशतम्

1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-2001	43.7*
2001-2002	44.1*

स्रोतः - शैक्षिकसामग्रीजालपुटम्, शिक्षाविभागः, भारतीयसर्वकारः।

* तात्कालिकदत्तांशसामग्री।

एतां सामग्रीम् उपयुज्य बालिकानां शिक्षाप्रवेशस्य अनुपातवर्धनस्तरस्य गणितीयदृष्ट्या विवरणं करोतु, अपि च प्राथमिकविद्यालये बालिकानां प्रवेशः कस्मिन् वर्षे 50% प्राप्नोति इत्यस्य आकलनं करोतु।

समाधानम् - आरम्भे समस्यां गणितीयसमस्यारूपेण परिवर्तयाम।

प्रथमं सोपानम् - सूत्रम् - कोष्ठकम् *A*2.1 1991-1992, 1992-1993 इत्यादिवर्षाणां नामाङ्कनं यच्छति। यतः छात्राः शैक्षिकवर्षस्य प्रारम्भे योजयन्ति, वयं वर्षाणि 1991, 1992 इति स्वीकर्तुं शक्नुमः। वयं प्राथमिकविद्यालये प्रवेश्यमानानां बालिकानां प्रतिशतम् अनेनैव स्तरेण वर्धमानं भवति इति परिकल्पयामः। अतः वर्षाणां सङ्ख्या, कस्यचित् विशिष्टवर्षस्य अपेक्षया मुख्या अस्ति। (समानस्थितिः दातव्या चेत् यदा वयं वर्षत्रयार्थं रु.15,000 मूलधनस्य 8% वृद्धिस्तरे साधारणवृद्धिं ज्ञातुम् इच्छामः, तदा त्रिवर्षावधिः 1999-2002 वा 2001-2004 वा इति मुख्यं नास्ति। अत्र त्रिषु वर्षेषु वृद्धिस्तरः एव महत्त्वपूर्णः अंशः। अत्रापि वयं नामाङ्कनं 1991 वर्षानन्तरं केन प्रकारेण वर्धमानम् अस्ति इति 1991 अनन्तरवर्षाणां तुलनया ज्ञातुं शक्नुमः। 1991 तमं वर्षं शून्यतमं वर्षम् इति मत्वा 1992 प्रथमं वर्षम् इति निर्दिशामः, यतः 1991-92 वर्षयोः मध्ये एकं वर्षम् अतीतम् अस्ति। समानप्रकारेण 1993 वर्षं 2, 1994 वर्षं 3 इति च क्रमेण निर्दिशामः। अतः कोष्ठकम् *A*2.1 तु *A*2.2 इव दृश्यते। इदानीं)

कोष्ठकम् A2.2

वर्षम्	प्रविष्टानां प्रतिशतम्
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6*
9	43.7*
10	44.1*

नामाङ्कने वृद्धिः अस्मिन् कोष्टके दत्ता अस्ति।

कोष्ठकम् A2.3

वर्षम्	प्रविष्टानां प्रतिशतम्	वृद्धिः
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6*	0.1
9	43.7*	0.1
10	44.1*	0.4

1991-92 वर्षान्ते नामाङ्कनं 0.7% वर्धितम् अस्ति। द्वितीयवर्षान्ते 0.1% वर्धितम् अस्ति। उपरिष्टात् कोष्टकात् वयं वर्षाणां, सङ्ख्या-प्रतिशतानां च मध्ये निश्चितं सम्बन्धं प्राप्तुं न शक्नुमः। किन्तु वर्धनं किञ्चिद्रूपेण

स्थिरम् अस्ति। प्रथमे वर्षे, दशमे वर्षे च अधिकं वर्धनं दृश्यते। मानानां माध्यम्

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

नामाङ्कनं 0.22% स्तरे स्थिररूपेण वर्धमानम् अस्ति इति परिकल्पयामः।

गणितीयविवरणम् - नामाङ्कनं 0.22% स्तरे स्थिररूपेण वर्धमानम् अस्ति इति परिकल्पितवन्तः। अतः

प्रथमे वर्षं नामाङ्कनप्रतिशतम् (EP) = 49.9 + 0.22

द्वितीयवर्षे नामाङ्कनप्रतिशतम् EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 = 49.9 + 2 × 0.22

तृतीयवर्षे EP = 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 49.9 + 3 × (0.22)

n तमे वर्षे 41.9 + 0.22n यदि $n \geq 1$)

कतिवर्षेभ्यः परं नामाङ्कने 50% भवति इति अस्माभिः ज्ञातव्यम्। अतः n इत्यस्य मानं सूत्रेण वा समीकरणेन वा जानीमः।

$$50 = 41.9 + 0.22\ n \qquad (2)$$

द्वितीयसोपानम् - समाधानम् - 'n' प्राप्तुं द्वितीयं समीकरणं समादाय,

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{81}{0.22} = 36.8 \qquad 2$$

तृतीयसोपानम् - व्याख्या - वर्षाणां सङ्ख्या तु पूर्णाङ्केन एव निर्दिश्यते इति कारणेन वयम् अग्रिमम् उच्चं पूर्णाङ्कं स्वीकुर्मः। अतः नामाङ्कनम्, 50%(पञ्चाशत् प्रतिशतं) 1991 + 37 = 2028 तमे वर्षे प्राप्नोति।

पदसमस्याम् अत्रैव स्थगयामः। किन्तु वास्तविकजीवनस्थित्या व्यवहरामः इति कारणेन कियता प्रमाणेन एतत् मानं वस्तुनिष्ठं दृश्यते इति अस्माभिः द्रष्टव्यम्।

चतुर्थसोपानम् - मान्यीकरणम् - द्वितीयं सूत्रं वास्तविकतया सह सङ्गच्छति वा इति परिशीलयामः। वयं ज्ञातानां वर्षाणां मानं द्वितीयसूत्रद्वारा प्राप्य ज्ञातैः मानैः सह अन्तरं प्राप्य तोलयामः।

*A*2.4 इति कोष्ठके मानानि दत्तानि सन्ति।

कोष्ठकम् A2.4

वर्षम्	प्रविष्टानां प्रतिशतम्	द्वितीयसमीकरणमानानि (%)	अन्तरम् (%)

0	41.9	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.2
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6*	43.66	-0.06
9	43.7*	43.88	-0.18
10	44.1*	44.10	0.00

भवन्तः यथा पश्यन्ति, द्वितीसूत्रेण प्राप्तानि कानिचन मानानि वास्तविकेभ्यः मानेभ्यः 0.3 – 0.5% पर्यन्तं भिद्यते । एतत् 3-5 वर्षाणि यावत् अन्तरं कल्पयितुं शक्नोति । यतः प्रतिवर्षं वर्धनं तु 1-2% एव । वयम् एतावद्भेदम् अङ्गीकृत्य अत्र स्थगयितुं शक्नुमः । अस्यां स्थित्यां (2) द्वितीयं समीकरणमेव अस्माकं गणितीयनिदर्शनम् अस्ति । यदि त्रुटिः अधिका भवति तदा वयं निदर्शनं प्रकृष्टतरं कर्तुम् इच्छन्तः पुनः प्रथमं सूत्रं प्राप्य द्वितीयं समीकरणं परिवर्तयेम ।

प्रथमं सोपानम् - पुनःसूत्ररचनम् वयं मानानि स्थिररूपेण 0.22% वर्धते इति परिकल्प्य इदानीं तत्र परिशुद्धगुणकस्य प्रस्तावनां कुर्मः । त्रुटिं न्यूनीकर्तुं परिशुद्धगुणकं प्रस्तौमः । तदर्थं सर्वेषां त्रुटीनां माध्यं जानीमः । त्रुटीनां माध्यं

$$\frac{0 + 0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10} = 0.18$$

सर्वेषां त्रुटीनां माध्यं ज्ञात्वा अनेन अस्माकं सूत्रं परिष्कुर्मः ।

परिष्कृत-गणितीयविवरणम् - त्रुटीनां माध्यं नामाङ्कनप्रतिशतसूत्रणेन सह योजयामः । अतः अस्माकं संशोधितं सूत्रम्

$$n\text{तमे वर्षे नामाङ्कनम्} = 41.9 + 0.22\,n + 0.18 = 42.08 + 0.22\,n \text{ यत्र } n \geq 1 \qquad (3)$$

उचितरीत्या द्वितीयसमीकरणम् अपि परिवर्तयेम । n इत्यस्य नूतनं समीकरणम्

$$50 = 42.08 + 0.22n \qquad (4)$$

द्वितीयं सोपानम् - परिष्कृतं समाधानम् - चतुर्थं समीकरणम् n प्राप्तुं समादाय वयं

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

तृतीयं सोपानम् - व्याख्या - $n = 36$ इति कारणेन प्राथमिकेषु विद्यालयेषु बालिकानां नामाङ्कनं 1991 + 36 = 2027 तमे वर्षे 50% प्राप्नोति।

चतुर्थं सोपानम् - मान्यीकरणम् - पुनरेकवारं वास्तविकमानानि सूत्रद्वारा प्राप्तैः मानैः सह तोलयामः। *A*2.5 तां तुलनां प्रदर्शयति।

कोष्ठकम् A2.5

वर्षम्	प्रविष्टानां प्रतिशतम्	द्वितीयसमीकरणमानानि (%)	अन्तरम् (%)	चतुर्थसमीकरणद्वारा दत्तमानानि	मानानां मध्ये अन्तराणि
0	41.9	41.9	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6*	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7*	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1*	44.10	0.00	44.28	-0.18

यथा भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति, चतुर्थसमीकरणे विद्यमान-मानानि द्वितीयसमीकरणे दत्त-मानानाम् अपेक्षया वास्तविकमानस्य समीपतराः सन्ति। अस्मिन् सन्दर्भे त्रुटीनां माध्यं तु शून्यम् अस्ति। अत्र प्रक्रियां स्थगयामः।

चतुर्थसमीकरणम् अस्माकं गणितीयविवरणम् अस्ति। अनेन वर्षाणां, बालिकानां नामाङ्कनस्य च मध्ये विद्यमानं गणितीयं सम्बन्धं प्राप्तुं शक्नुमः। वयं किञ्चन वर्धनसूचकं गणितीयनिदर्शनं निर्मितवन्तः।

उपरितने सन्दर्भे यां प्रक्रियाम् आश्रितवन्तः तत् गणितीयनिदर्शनम् इति कथयामः।

उपलभ्यैः गणितीयसाधनैः किञ्चन गणितीयनिदर्शनं निर्मातुं प्रर्यत्नं कृतवन्तः। किन्तु उपलभ्याभ्यः आधारसामग्रीभ्यः प्रागुक्तिं कर्तुं समीचीनतर-गणितीयसाधनानि वर्तन्ते। किन्तु ते अस्याः पाठ्यक्रमरेखायाः बहिः सन्ति। गणितीयनिदर्शननिर्माणे अस्माकम् उद्देश्यं तु भवद्भ्यः निदर्शनस्य प्रक्रियापाठनम्। न तु अस्मिन् सोपाने निष्कृष्टप्रागुक्तिः।

इदानीं भवन्तः चर्चितानां विषयाणाम् अवगमनाय वास्तविकजीवनसन्दर्भाणां निदर्शनं द्रष्टुम् इच्छेयुः। भवतां प्रयत्नार्थं कश्चन अभ्यासः दीयते।

अभ्यासः A2.2

1. ओलम्पिक्स्-क्रीडायां धावनक्रीडायाः योजनात् आरभ्य, 400 मीटर्-मितधावनस्पर्धायां स्वर्णपदकधरैः स्वीकृतं समयम् अधः दत्तवन्तः। वर्षाणि, विजेतृभिः स्वीकृतसमयं च उपयुज्य सम्बद्धगणितीयनिदर्शनस्य निर्माणं कुरुत। अग्रिम-ओलम्पिक्स्-क्रीडायां स्वर्णविजेत्र स्वीकरिष्यमाणसमयम् गणयितुं अस्य प्रयोगं कुरुत।

कोष्ठकम् A2.6

वर्षम्	समयः (क्षणेषु)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 निदर्शनस्य प्रक्रिया - लाभांशाः , सीमाः च

दत्तेषु उदाहरणेषु गणितीयनिदर्शनस्य अंशानाम् उल्लेखनं कुर्वन्तः चर्चाम् उपसंहरामः। पूर्वतनानाम् अनुच्छेदानां पृष्ठभूमिकायाः आधारेण निदर्शनस्य सोपानानां सङ्क्षिप्ततया अवलोकितुं शक्नुमः।

प्रथमसोपानम् - सूत्ररचनम् - भवन्तः *A*2.2 अनुच्छेदे दत्तस्य उदाहरणस्य सूत्रभागस्य, ततः *A*2.3 अनुच्छेदे दत्तनिदर्शनस्य सूत्रभागस्य च मध्ये विद्यमानं भेदं दृष्टवन्तः स्युः। प्रथमे उदाहरणे सर्वाः सूचनाः प्रयोगसिद्धाः आसन्। किन्तु *A*2.3 अनुच्छेदे दत्ते निदर्शने तथा न आसीत्। वयं प्रथमं सूत्रं परीक्षितवन्तः किन्तु तत् प्राप्तस्य द्वितीसूत्रस्य अपेक्षया समीचीनतरं न आसीत्। एतत् सामान्यतया सत्यम् अस्ति अर्थात् वास्तविकजीवनसन्दर्भस्य निदर्शनसमये निदर्शनस्य पुनर्विचारः करणीयः भवति। वास्तविकजीवनसन्दर्भे सूत्रं कर्तुं दीर्घः कालः अपेक्ष्यते। उदाहरणार्थं न्यूटनस्य त्रयः गति-सिद्धान्ताः सरलाः। गतेः गणितीयविवरणम् अपि यच्छन्ति। एतान् गतिसिद्धान्तान् न्यूटनः बहूनाम् आधारसामग्रीणाम् अध्ययनात् तथा तस्मात् पूर्वं पूर्वैः वैज्ञानिकैः कृतानि कार्याणि च ज्ञात्वा प्राप्तवान्।

सूत्ररचने त्रिविध-सोपानानि सन्ति। तानि –

(i) **समस्यायाः कथनम् -** प्रायशः समस्या अस्पष्टतया उच्यते। उदाहरणार्थम् - अस्माकं विशालः

उद्देशः तु बालबालिकां नामाङ्कनं समानम् इति दृढीकरणम् एव । अस्य एवम् अर्थः भवितुम् अर्हति यत् नामाङ्कनस्य पूर्णसङ्ख्यायां 50% विद्यालयगमनवयस्काः बालकाः तथा 50% बालिकाः इति । किन्तु अपरः अर्थः तु विद्यालयगमन-वयस्केषु 50% बालिकाः इति निश्चयः । अस्माकं समस्यायां वयं द्वितीयं मार्गम् अनुसृतवन्तः।

(ii) **सङ्गतकारकाणाम् अभिज्ञानम् -** निश्चिनोतु यत् अस्माकं समस्यायै ये सम्बन्धाः तथा याः सङ्ख्याः प्रामुख्यं वहन्ति, तथा ये प्रामुख्यं न वहन्ति च इति । तत्र अमुख्यान् अंशान् निराकर्तुं शक्नुमः। उदाहरणार्थम् अस्माकं बालिकानां नामाङ्कनसमस्यायां पूर्वतने वर्षे नामाङ्कित-बालिकानां सङ्ख्या, अस्य वर्षस्य सङ्ख्यां प्रभावयितुं शक्नोति । यतो हि अधिकाधिकबालिकाः यदा विद्यालये नामाङ्किताः भवन्ति तदा अधिकाः पितरः अपि स्वपुत्रीः विद्यालये योजयितुं विचारयन्ति । किन्तु एतं कारकं निराकृतवन्तः, यतः एतस्य प्रामुख्यं नामाङ्कनस्य अमुकप्रतिशतप्राप्तेः परमेव भविष्यति । एतस्य कारकस्य योजनेन अस्माकं निदर्शनं जटिलं भवति ।

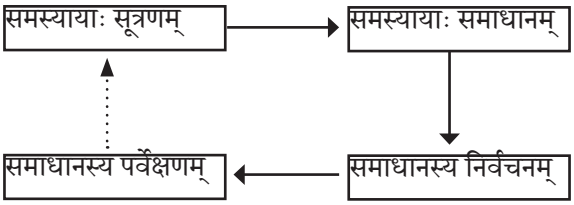
(iii) **गणितीय-विवरणम् -** ऊहतां यत् इदानीं - समस्यायाः विषये तथा समस्यायाः के अंशाः अन्येभ्यः अंशेभ्यः सङ्गताः सन्ति इति विषये अस्माकं स्पष्टता अस्ति । तदा अस्माभिः तेषु अंशेषु सम्बन्धं कल्पयितुं समीकरणस्य वा रेखाचित्रस्य वा अन्यरीत्या वा गणितीयविवरणं दातव्यम् । यदि तद्विवरणं समीकरणद्वारा अस्ति तर्हि प्रतिप्रमुखः अंशः अपि केनचित् चरेण सूचयामः ।

द्वितीयं सोपानम् - समाधानप्राप्तिः - सूत्रचनेन समाधानं न प्राप्यते । अस्माभिः समस्यायाः गणितीयतुल्यं समाधानं प्राप्तव्यम् । अत्र एव भवतां गणितीयज्ञानम् उपयुक्तं भविष्यति ।

तृतीयं सोपानम् - समाधानस्य व्याख्या - निदर्शने विद्यमानानां चराणां मानं / मानानि एव गणितीयसमाधानं भवति । वयं वास्तविकजीवनसमस्यां प्रति गत्वा अस्यां समस्यायां मानस्य अर्थः कः इति पश्यामः ।

चतुर्थं सोपानम् - समाधानस्य मान्यीकरणम् - *A*2.3 अनुच्छेदे समाधानं प्राप्य तत् समाधानं वास्तविकतया सह युज्यते वा इति परिशीलनीयम् । यदि युज्यते तत् निदर्शनं मानितं भवति । यदि न, तर्हि वयं सूत्रसोपानं प्रति गत्वा निदर्शनं पुनः नेतुं प्रयत्नं कुर्मः।

अस्यां प्रक्रियायां पदसमस्यायाः गणितीयनिदर्शस्य च मध्ये विद्यमानः भेदः दृश्यते । एतत् सोपानं निदर्शने अपि प्रमुखं सोपानं, यत् पदसमस्यायां नास्ति एव । सत्यं यत् केषुचित् वास्तविकजीवनस्थितिषु अस्माकं परिणामस्य मान्यीकरणम् एव न अपेक्षितम्, यतो हि समस्या सरला स्यात् तथा साधुसमाधानम् एव वयं प्राप्तवन्तः स्याम । अस्माकम् *A*2.3 परिच्छेदे प्रथमे निदर्शने एवमेव आसीत् । *A*2.2 आकृत्यां दत्त-गणितीयनिदर्शने सोपानानां क्रमः अत्र सारांशरूपेण प्रस्तुतः अस्ति । मान्यीकरणसोपानतः सूत्रपर्यन्तं गमनं तु बिन्दुयुक्तबाणेन दर्शितम् अस्ति । यतो हि एतत् सोपानं पुनःपरिशीलयितुं कदाचित् आवश्यकं न स्यात् अपि ।



A2.2 आकृतिः

वयं गणितीयनिदर्शनस्य सोपानानि तु पठितवन्तः। इदानी तस्य कांश्चन अंशान् चर्चयामः।

गणितीयनिदर्शनस्य उद्देशः वास्तविकजीवनसमस्यायाः उपयुक्तान् विषयान् ज्ञातुं तां समस्यां गणितीयसमस्यया रूपान्तरं कुर्मः। एषा पद्धतिः विशिष्य तदा उपयुक्ता भवति यदा साक्षात् ईक्षणम् अथवा प्रयोगसाध्यपद्धतिः इत्यादयः अन्यमार्गाः बहुमूल्याः अथवा असाध्याः भवन्ति।

भवताम् एवं प्रश्नः भवेत् यत् किमर्थं गणितीयविवरणं स्वीकुर्मः?

ऊहतां यत् वयं ताजमहले मथुरायाः समीकरणयन्त्रागारात् (Refinery) प्रेष्यमाणस्य उत्सर्जनस्य क्षारप्रभावः पठनीयः इति। वयं ताजमहले साक्षात् प्रयोगं कर्तुं न शक्नुमः यतः तथाकरणं सुरक्षितं न स्यात्। सत्यं यत् किञ्चन मापितं बौद्धिकं निदर्शनं प्रयोक्तुं शक्नुमः किन्तु तदर्थं विशिष्टानि साधनानि अपेक्षितानि भवन्ति येषां मूल्यम् अधिकं स्यात्। अस्मिन् सन्दर्भे गणितीयनिदर्शनस्य महान् उपयोगः भवितुम् अर्हति। पुनः ऊहतां यत् वयं पञ्चवर्षानन्तरं कति प्राथमिकस्तरीय-विद्यालयाः अपेक्षिताः इति ज्ञातुम् इच्छामः। एतां समस्यां वयं गणितनिदर्शनेन समाधातुं शक्नुमः। समानरीत्या एव निदर्शनद्वारा एव वैज्ञानिकाः बहु पद्धतीनाम् अस्तित्त्वस्य विषये वक्तुं शक्तवन्तः।

भवन्तः *A*2.3 अनुच्छेदे दृष्टवन्तः यत् वयं द्वितीये उदाहरणे समीचीनतराभिः पद्धतिभिः प्राप्तं परिणामं पुनः नेतुं शक्तवन्तः स्याम। किन्तु वयं स्थगितवन्तः, यतः अस्माकं समीपे गणितीयसाधनानि न आसन्। एतत् वास्तविकजीवने अपि भवितुम् अर्हति। प्रायशः अस्माभिः समीचीनतरैः परिणामैः तृप्तैः भवितव्यम्, यतः गणितीयसाधनानि न उपलभ्यन्ते। उदाहरणार्थं वायुमण्डलनिदर्शने विद्यमानानां निदर्शनिकसमीकरणानि जटिलानि येषाम् उचितं समाधानं कर्तुं गणितीयसाधनानि न उपलभ्यन्ते।

भवन्तः चिन्तयन्ति यत् कियत्पर्यन्तम् अस्माभिः निदर्शनस्य परिष्कारस्य प्रयत्नः करणीयः इति। सामान्यतया परिष्काराय इतोऽपि अधिकानि कारकाणि स्वीकरणीयानि भवन्ति। यदा वयम् एवं कुर्मः गणितीयसमीकरणे अधिकान् चरान् योजयित्वा जटिलतरं निदर्शनं प्राप्नुमः। अस्य प्रयोगः अपि कठिनः स्यात्। निदर्शनस्य प्रयोगः सरलः भवेत् इति चिन्तनं स्यात्। उत्तमं निदर्शनम् अधोनिर्दिष्टस्य कारकद्वयस्यापि सन्तुलनं करोति।

1. परिशुद्धता – अर्थात् वास्तविकतायाः समीपतरम्
2. प्रयोगसारल्यम्

उदाहरणार्थं न्यूटनस्य गतिविधयः सरलाः तथापि बहून् बौद्धिकसन्दर्भान् निर्देष्टुं शक्ताः।

अतः गणितीयनिदर्शनम् एव अस्माकं सर्वप्रश्नानाम् उत्तरं किम् ? नैव।

तस्यापि काश्चन सीमारेखाः सन्ति एव। अतः वयं मनसि स्थापयामः यत् निदर्शनं वास्तविकतायाः सरलीकरणम्। कदापि द्वयोः सर्वसाम्यं न भवति। अनयोः भेदः, देशस्य भौतिकांशान् दर्शयतः भूपटस्य, देशस्य च मध्ये विद्यमान-भेदवत् अस्ति। वयम् अनेन मानचित्रेण समुद्रतलात् कस्यचन स्थानस्य औनत्यं ज्ञातुं शक्नुमः, न तु जनानां स्वभावान् अध्येतुं शक्नुमः। अतः निर्दिष्टे प्रयोजने एव निदर्शनं प्रयोक्तव्यम्। तथा उपयुक्ते सति निदर्शनस्य निर्माणसमये निराकृतानि सर्वाणि कारकाणि स्मर्तव्यानि। अस्माभिः निदर्शनस्य सीमारेखायाः अन्तः एव तस्य प्रयोगः करणीयः। उच्चवर्गेषु वयं तस्य अपरान् कांश्चन अंशान् अपि चर्चयामः।

प्रश्नावलिः A2.3

1. भवद्भिः पाठ्यपुस्तके दृश्यमानानां पदसमस्यानां समाधानं गणितीयनिदर्शनस्य प्रक्रियायाः कथं भिद्यते इति वक्तव्यम्।
2. यदि भवन्तः कस्मिंश्चित् चतुर्मार्गसन्धौ बाहनसम्मर्दे तेषां व्यर्थसमयं न्यूनीकर्तुम् इच्छन्ति, अधोदत्तकारकेषु कानि महत्त्वपूर्णानि तथा कानि न इति वदन्तु।
   (i) इन्धनस्य मूल्यम्
   (ii) चतुर्षु मार्गेषु वाहनानाम् आगमनस्य स्तरः
   (iii) द्विचक्रिकाः त्रिचक्रिकाः इत्यादीनां मन्दगतिवाहनानां तथा कार्-यानानि स्वयञ्चालितद्विचक्रिकाः इत्यादीनां तीव्रगतिवाहनानां मध्ये विद्यमानः प्रत्यनुपातः

A2.5 सारांशः

अनुच्छेदे वयम् अधोदत्तान् अंशान् पठितवन्तः –

1. पदसमस्यायाः समाधानस्य सोपानानि
2. केषाञ्चन गणितीयनिदर्शनानां निर्माणम्
3. गणितीयनिदर्शनस्य सोपानानि अस्मिन् आवरणे दत्तानि सन्ति –

1.	सूत्रम् (i) प्रश्नकथनम् (ii) सङ्गतकारकाणाम् अभिज्ञानम् (ii) गणितीयविवरणम्
2.	समाधानप्राप्तिः
3.	वास्तविकजीवनसमस्यायाः दृष्ट्या प्राप्तस्य समाधानस्य व्याख्या
4.	कियता प्रमाणेन निदर्शनं कथ्यमानायाः समस्यायाः प्रतिनिधिः इति परिशीलनं मान्यीकरणं च।

4. गणितीयनिदर्शनस्य उद्देशाः, लाभाः, सीमाः च।

उत्तराणि / उपक्षेपाः

प्रश्नावलिः 1.1

1. आम्। $0 = \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}$ इत्यादयः, हरः q अपि ऋणात्मकः-पूर्णाङ्कः इति स्वीकर्तुं शक्यते।

2. 3, 4 इत्यनयोः मध्ये अनन्ततया अधिकः परिमेय-सङ्ख्याः भवितुम् अर्हन्ति।

   $3 = \frac{21}{6+1}, 4 = \frac{28}{6+1}$। तर्हि षड्-सङ्ख्याः तु $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$। अतः पञ्च-परिमेयसङ्ख्याः तु $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$

4. (i) सत्यं, यतः पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहे सर्वाः प्राकृतिक-सङ्ख्याः भवन्ति।

   (ii) असत्यम्, उदाहरणार्थम्, -2 पूर्णसङ्ख्या नास्ति।

   (iii) असत्यम, उदाहरणार्थम्, $\frac{1}{2}$ परिमेयसङ्ख्या अस्ति न तु पूर्णसङ्ख्या।

प्रश्नावलिः 1.2

1. (i) सत्यं, यतः वास्तविकसङ्ख्यानां सङ्ग्रहे परिमेय-अपरिमेय-सङ्ख्याः अन्तर्भवन्ति।

   (ii) असत्यं, का अपि ऋणात्मक-सङ्ख्या प्राकृतिक-सङ्ख्यायाः वर्गमूलं भवितुं न अर्हति।

   (iii) असत्यम् उदाहरणार्थम् 2 वास्तविक-सङ्ख्या अस्ति न तु अपरिमेय-सङ्ख्या।

2. असत्यम्। उदाहरणार्थम्, $\sqrt{4} = 2$ परिमेय-सङ्ख्या अस्ति।

3. 1.8 आकृत्यां यथा दत्ता तथा तां पद्धतिं बहुवारं आवर्तयन्तु। आदौ $\sqrt{4}$,अग्रे $\sqrt{5}$ प्राप्नुवन्तु।

प्रश्नावलिः 1.3

1. (i) 0.36, सान्तः (ii) $0.\overline{09}$, अनन्तावृत्तः
   (iii) 4.125, सान्तः (iv) $0.\overline{230769}$, अनन्तावृत्तः
   (v) $0.\overline{18}$, अनन्तावृत्तः (vi) 0.8225, सान्तः

2. $\frac{2}{7} = 2\frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3\frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$ $\frac{4}{7} = 4\frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$,
   $\frac{5}{7} = 5\frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$ $\frac{6}{7} = 6\frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [$x = 0.666\ldots$ भवतु, तर्हि $10x = 6.666\ldots$ अथवा $10x = 6 + x$, अथवा $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]
   (ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. $x = 0.9999\ldots$..अथवा $10x = 9.999\ldots$ अथवा $10x = 9 + x$ अथवा $x = 1$]

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q इत्यस्य अभाज्य-गुणखण्डने 2 इत्यस्य घाताः अथवा 5 इत्यस्य घाताः एव भवन्ति।

7. 0.01001000100001.....0.202002000200002.....0.003000300003

8. 0.75075007500075000075.....0.767076700767000767.....0.808008000800008

9. (i), (iv) तथा (v) अपरिमेयाः: (ii), तथा (iii) परिमेय-सङ्ख्याः

प्रश्नावलिः 1.4

1. 1.4 अनुच्छेदे दत्त-प्रकारेण 2.665 इत्यस्य कृते अपि कुर्वन्तु।

2. एकादशे उदाहरणे दत्त-प्रकारेण कुर्वन्तु।

प्रश्नावलिः 1.5

1. (i) अपरिमेयः (ii) परिमेयः (iii) परिमेयः (iv) अपरिमेयः
   (v) अपरिमेयः

2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. अत्र विरोधः नास्ति । स्मरन्तु यत् यदा मापिकया अथवा अन्येन केनचित् साधनेन दीर्घतायाः मापनं कुर्वन्ति, तदा भवन्तः सन्निकट-परिमेय-मानम् एव प्राप्नुवन्ति । अतः c अथवा d अपरिमेयः इति भवन्तः न अवगच्छन्ति ।

4. 1.17 आकृतिं पश्यन्तु ।

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$, (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}+2}{3}$

प्रश्नावलिः 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5 **2.** (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{\frac{1}{3}}=(5^3)^{-\frac{1}{3}}\right]=5^{-1}$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $(56^{\frac{1}{2}}$

प्रश्नावलिः 2.1

1. (i) तथा (ii) एकचरे बहुपदानि (v) चरत्रये बहुपदानि (iii), (iv) बहुपदे न, यतः एतयो प्रत्येकम् अपि चरस्य घाताङ्कः पूर्णसङ्ख्या नास्ति ।

2. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\overline{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35}-4$; $\sqrt{2}y^{100}$ (भवन्तः विविध-गुणाङ्कैः सह इतोऽपि अधिकानि बहुपदानि लेखितुं शक्नुवन्ति)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) द्विघातबहुपदम् (ii) त्रिघातबहुपदम् (iii) द्विघातबहुपदम् (iv) रैखिकम्
(v) रैखिकम् (vi) द्विघातबहुपदम् (vii) त्रिघातबहुपदम्

प्रश्नावलिः 2.2

1. (i) 3 (ii) -6 (iii) -3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3

3. (i) आम् (ii) न (iii) आम् (iv) आम्
(v)आम् (vi) आम्

(vii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ शून्यम् अस्ति, किन्तु $\frac{2}{\sqrt{3}}$ बहुपदस्य शून्यं ऩास्ति। (viii) ऩास्ति

4. (i) -5 (ii) 5 (iii) $-\frac{5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{d}{c}$

प्रश्नावलिः 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1 (iv) $-\pi^3 + 3\pi^2 - 3 + 1$ (iv) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$ 3.न, यतः शेषफलं शून्यं ऩास्ति।

प्रश्नावलिः 2.4

1. $(x + 1)$ (i) इत्यस्य गुणखण्डः अस्ति, किन्तु (ii), (iii), (iv) इत्येषां गुणखण्डः नास्ति।

2. (i) आम् (ii) न (iii) आम्

3. (i) -2 (ii) $-(2 + \sqrt{2})$ (iii) $\sqrt{2} - 1$ (iv) $\frac{2}{3}$

4. (i) $(3x\text{-}1)(4x\text{-}1)$ (ii) $(x+3)(2x+1)$ (iii) $(2x+_3)(3x\text{-}2)$ (iv) $(x+1)(3x\text{-}4)$

5. (i) $(x\text{-}2)(x\text{-}1)(x+1)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x\text{-}5)$

(iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y\text{-}1)(y+1)(2y+1)$

प्रश्नावलिः 2.5

1. (i) $x^2 + 14x + 40$ (ii) $x^2 - 2x - 80$ (iii) $9x^2 - 3x - 20$

(iv) $y4 - \frac{9}{4}$ (v) $9 - 4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y\text{-}1)(2y\text{-}1)$ (iii) $(x+\frac{y}{10})(x-\frac{y}{10})$

4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$

(ii) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz$

(iv) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(v) $4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{ab}{4} - b + \frac{a}{2}$

5. (i) $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$ (ii) $(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)(-2x + y + 2\sqrt{2}z)$

6. (i) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ (ii) $8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ (iv) $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$

(iii) $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$ (iv) $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$

(v) $(3p-\frac{1}{6})(3p-\frac{1}{6})(3p-\frac{1}{6})$

10. (i) $(3y+5z)(9y^2 + 25z^2 - 15yz)$ (ii) $(4m-7n)(16m^2+49n^2+28mn)$

11. $(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

12. दक्षिण-पार्श्वम् सरलीकुर्वन्तु।

13. अष्टमे समलीकरणे $x + y + z = 0$ इति स्थापयन्तु।

14. (i) – 1260. $a = -12$, $b = 7$, $c = 5$. अत्र $a + b + c = 0$। त्रयोदशे प्रश्ने दत्तं-परिणामम् अत्र उपयुज्यन्तु।

(ii) 16380

15. (i) एकं सम्भवम् उत्तरं तु : दीर्घता = $5a - 3$, विशालता = $5a-4$

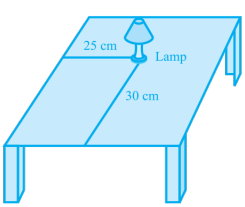
(ii) एकं सम्भवम् उत्तरं तु : दीर्घता = $7y-3$, विशालता = $5y+4$

16. (i) एकं सम्भवम् उत्तरं तु : 3,x तथा $x-4$

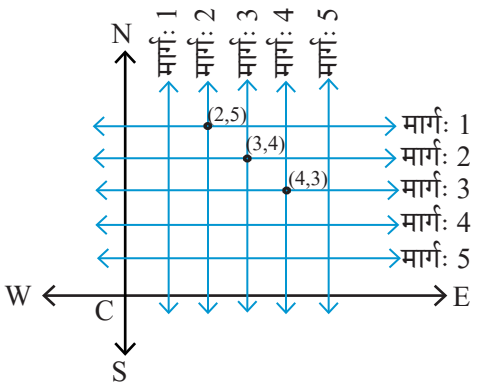
(ii) एकं सम्भवम् उत्तरं तु : $4k$, $3y+5$ तथा $y-1$.

प्रश्नावलिः 3.1

1. दीपं बिन्दुवत् स्वीकुर्वन्तु तथा उत्पीठिकां समतलवत् स्वीकुर्वन्तु। उत्पीठिकायाः यत् किमपि प्रकोणद्वयं चिन्वन्तु। दीर्घतर-प्रकोणात् दीपपर्यन्तं विद्यमानं दूरं मापयन्तु। तत् 25 cms इति पश्यन्तु। पुनः लघुतर-प्रकोणात् दीप-पर्यन्तं विद्यमानं दूरं मापयन्तु। तत् 30cms इति पश्यन्तु। भवद्भिः चितेन क्रमेण दीपस्य स्थितिं (30,25) अथवा (25,30) इति लेखितुं शक्नुवन्ति।



2. अधोदत्ते चित्रे वीथी-योजना दर्शिता अस्ति।



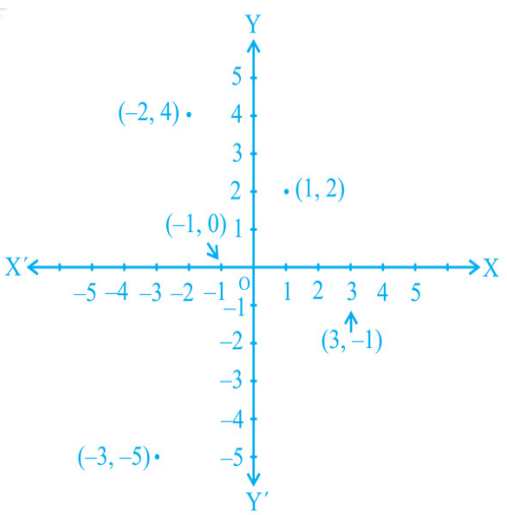
अनुप्रस्थ-वीथी-द्वयम् अपि उपरितने चित्रे अङ्कितम् अस्ति। वीथी-द्वयम् अपि अद्वितीयतया प्राप्यते यतः तयोः अवस्थितिम् प्राप्तुं वयं निर्दिष्ट-रेखाद्वयं प्रयुक्तवन्तः।

प्रश्नावलिः 3.2

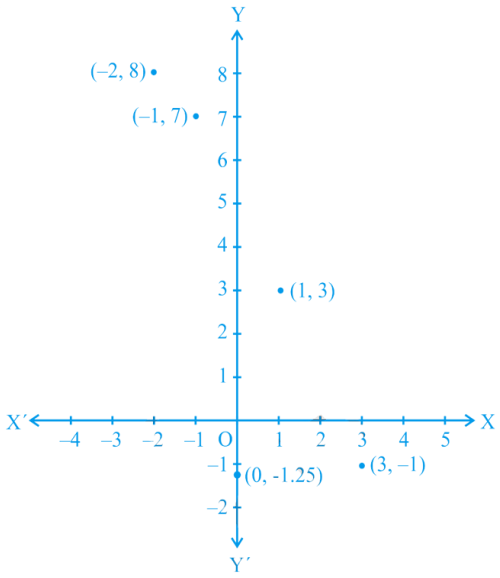
1. (i) x-अक्षः तथा y-अक्षः, (ii) चतुर्थांशः (iii) मूलबिन्दुः
2. (i) (-5,2) (ii) (5,-5) (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) -3 (vii) (0,5) (viii) (-3,0)

प्रश्नावलिः 3.3

1. (-2,4) इति बिन्दुः द्वितीये-चतुर्थांशे अस्ति, (3,-1) इति बिन्दुः चतुर्थे-चतुर्थांशे अस्ति, (-1,0) ऋणात्मक-x-अक्षे अस्ति, (1,2) इति बिन्दुः प्रथमे-चतुर्थांशे अस्ति तथा (-3,-5) इति बिन्दुः तृतीये-चतुर्थांशे अस्ति। बिन्दूनाम् अवस्थितिः सल्लङ्नाकृत्यां दर्शिता अस्ति।



2. बिन्दूनाम् अवस्थितिः सल्लङ्नाकृत्यां बिन्दु-रूपेण दर्शिता अस्ति।



प्रश्नावलिः 4.1

1. x - 2y = 0
2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0$; $a = 2$, b = 3, c = $-9.3\overline{5}$

   (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$; $a = 1$, b = $\frac{-1}{5}$, c = -10

   (iii) $-2x + 3y - 6 = 0$; $a = -2$, b = 3, c = -6

   (iv) $1.x - 3y + 0 = 0$; $a = 1$, b = -3, c = 0

   (v) $2x + 5y + 0 = 0$; $a = 2$, b = 5, c = 0

   (vi) $3x + 0.y + 2 = 0$; $a = 3$, b = 0, c = 2

   (vii) $0.x + 1.y - 2 = 0$; $a = 0$, b = 1, c = -2

   (viii) $-2x + 0.y + 5 = 0$; $a = -2$, b = 0, c = 5

प्रश्नावलिः 4.2

1. (iii) यतः x इत्यस्य प्रत्येक-मानस्य, y इत्यस्य सङ्गत-मानम् अस्ति तथा व्युत्क्रमेण y इत्यस्य प्रत्येक-मानस्य, x इत्यस्य सङ्गत-मानम् अस्ति।
2. (i) (0, 7), (1, 5), (2, 3), (-4, 1) (ii) (1, 9 - π), (0, 9), (-1, 9 + π), ($\frac{9}{\pi}$, 0)

   (iii) (0, 0), (4, 1), (-4, 1), (2, $\frac{1}{2}$)

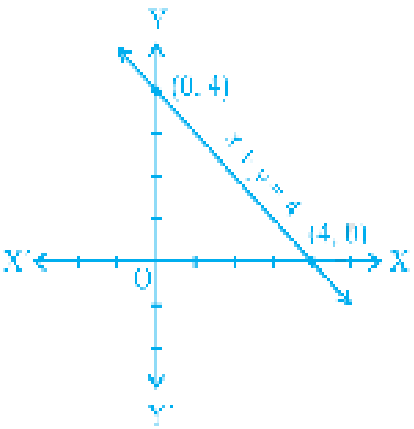
3. (i) न (ii) न (iii) आम् (iv) न (v) न

4. 7

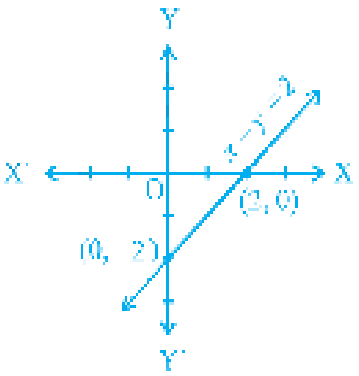
प्रश्नावलिः 4.3

1.

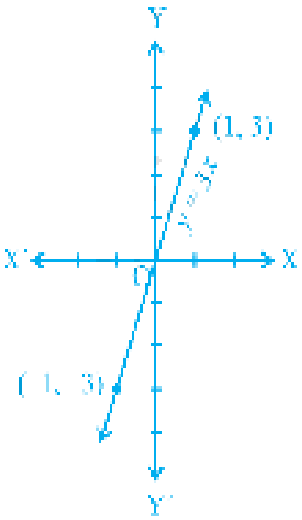
(i)



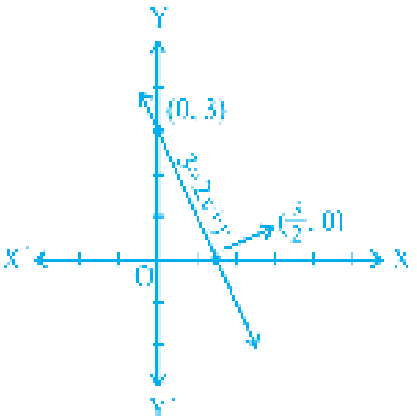
(ii)



(iii)



(iv)



2. $7x$ - y = 0 तथा x + y = 16; अनन्ततया अधिकम् [केनचित् बिन्दुना द्वारा अनन्ततया अनेकाः रेखाः लेखितुं शक्यते]

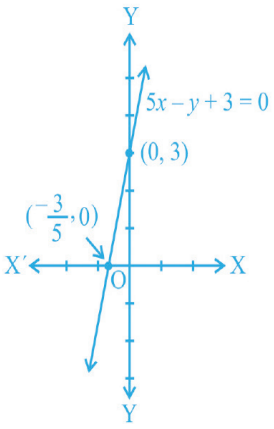
3. $\frac{5}{3}$ 4. $5x$ - y + 3 = 0

5. 4.6 आकृत्याम् x + y = 0, तथा 4.7 आकृत्यां y = -x + 2.

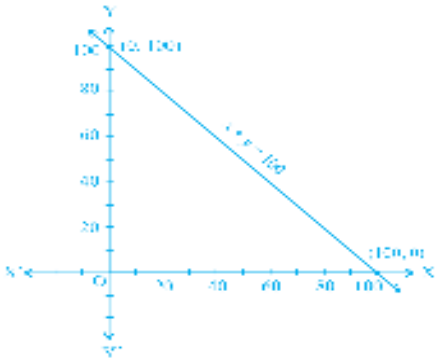
6. यदि x दूरम् अस्ति तथा y कृतं कार्यम् इति चिन्तयन्तु, तर्हि समस्यानुगुणं समीकरणं तु $y = 5x$ ।

(i) 10 मात्रकाः (ii) 0 मात्रकाः





7. $x + y = 100$



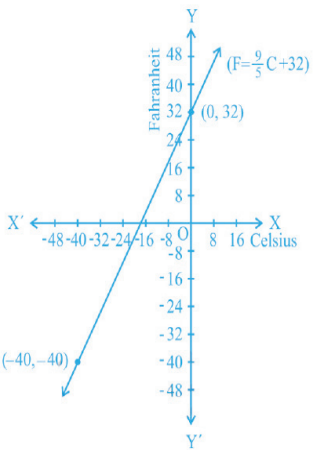
8. (i) संलग्न-आकृतिं पश्यन्तु ।

(ii) 86^0 F

(iii) 35^0C

(iv) 32^0F, -17.8^0C (प्रायः)

(v) आम्, -40^0 (F तथा C उभयत्र अपि)

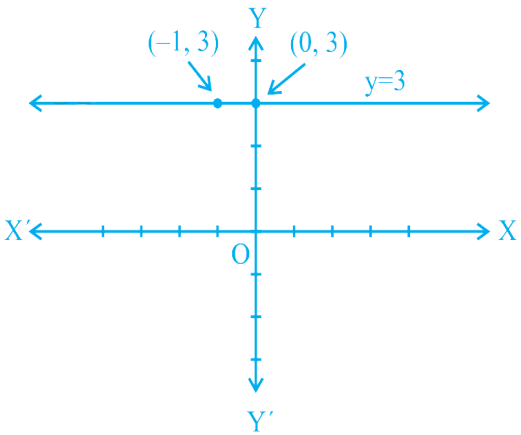


प्रश्नावलि: 4.4

1. (i)



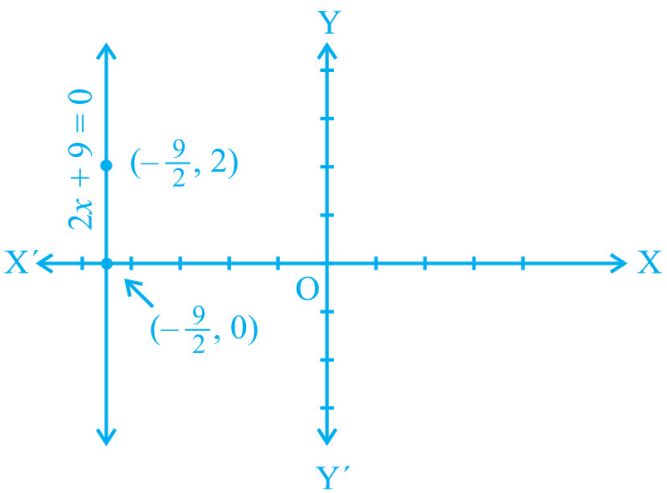
(ii)



2. (i)



(ii)



प्रश्नावलिः 5.1

1. (i) असत्यम्। एतत् छात्रेण प्रत्यक्षं द्रष्टुं शक्यते।

   (ii) असत्यम्। एतत् 5.1 अभिगृहीतस्य विरोधः अस्ति।

   (iii) सत्यम्। (द्वितीया अभिधारणा)

   (iv) सत्यम्। यदि भवन्तः एकेन वर्तुलेन अन्यस्मिन् वर्तुले निबद्धं स्थलं अध्यारोपयन्ति, तर्हि तयोः सम्पाती भवति। अतः तयोः त्रिज्ये अपि सम्पाती भवति।

   (v)) सत्यम्। यूक्लिडवर्यस्य प्रथम-अभिगृहीतम्।

3. छात्रः अनेकानाम् अपरिभाषितपदानां आवलिं कुर्यात्। तानि तु अविरोधी-युक्तानि सन्ति यतः तानि द्विविध-सन्दर्भं सम्मुखीकुर्वन्ति – (i) वदति यत् A तथा B इति बिन्दुद्वयम् अस्ति चेत्, तयोः मध्ये विद्यमानायां रेखायां C इति बिन्दुः भवति ; (ii) वदति यत् A तथा B दत्तम् चेत्, तयोः मध्ये विद्यमानायां रेखायां अविद्यमाना-बिन्दुः C इति स्वीकर्तुं शक्यते।

एते अभिधारणाः यूक्लिडस्य अभिधारणाः न सन्ति। किन्तु ते 5.1 अभिगृहीतम् अनुसरति।

4. $AC = BC$

   अतः $AC + AC = BC + AC$ (समानाः समानैः सह योजिताः)

   अर्थात् $2AC = AB$ (BC + AC, AB इत्यनेन सम्पाती भवति)

   अतः $AC = \frac{1}{2}AB$

5. तात्कालिक-कल्पनां कुर्वन्तु यत् C, D इति विविध-बिन्दुद्वयम् AB इत्यनयोः मध्य-बिन्दू स्तः। इदानीं निरूपयन्तु यत् C, D इति बिन्दुद्वयं भिन्नम् नास्ति।

6. $AC = BD$ (दत्तम्) (1)

   $AC = AB + BC$ (B बिन्दुः A, C इत्यनयोः मध्ये अस्ति) (2)

   $BD = BC + CD$ (C बिन्दुः B, D इत्यनयोः मध्ये अस्ति) (3)

(1) समीकरणे, (2), (3) प्रतिस्थाप्य,

$AB + BC = BC + CD$

अतः $AB = CD$ (समानेभ्यः समानं व्यवकलनं क्रियते)

7. यतः एतत् लोकस्य सर्वेषु भागेषु विद्यमानानां सर्वेषां पदार्थानां कृते सत्यम्, एतत् सर्वव्यापी-सत्यम् अस्ति।

प्रश्नावलिः 5.2

1. छात्रेण दत्तं कञ्चित् अपि सूत्रं कक्ष्यायां तस्य मानकरणार्थं चर्चणीयम्।
2. यदि काचित् ऋजुरेखा l, m तथा n इति ऋजुरेखायां तिष्ठति, तर्हि l इत्यस्य एकस्मिन् पार्श्वे विद्यमानयोः अन्तःकोणयोः योगः द्वौ समकोणौ भवतः, तर्हि यूक्लिडस्य पञ्चम-अभिधारणानुगुणं, रेखा l इत्यस्य अस्मिन् पार्श्वे न मिलतः। अग्रे, भवन्तः जानन्ति यत् l रेखायाः अन्यस्मिन् पार्श्वे विद्यमानयोः अन्तः कोणयोः योगः तु द्वौ समकोणौ भवतः। अतः ते रेखे अन्यस्मिन् पार्श्वे अपि न मिलतः। अतः m, n इति रेखे कदापि न मिलतः। अतः ते समान्तर-रेखे।

प्रश्नावलिः 6.1

1. 30^0, 250^0 **2.** 126^0 **4.** कस्मिञ्चित् बिन्दौ कोणानां योगः तु 360^0।

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ तथा $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$.

6. 122^0, 302^0

प्रश्नावलिः 6.2

1. 130^0, 130^0 **2.** 126^0 **3.** 126^0, 36^0, 54^0 **4.** 60^0 **5.** 50^0, 77^0

6. आपतनकोणः = प्रतिवर्तित-कोणः। B बिन्दौ, $BE \perp PQ$ तथा C बिन्दौ $CF \perp RS$ चित्रयन्तु।

प्रश्नावलिः 6.3

1. 65^0 **2.** 32^0, 121^0 **3.** 92^0 **4.** 60^0 **5.** 37^0, 53^0

6. ΔPQR इति त्रिभुजस्य कोणानां योगः = ΔQTR त्रिभुजस्य कोणानां योगः तथा $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$।

प्रश्नावलिः 7.1

1. ते समानाः। **6.** $\angle BAC = \angle DAE$

प्रश्नावलिः 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ **7.** प्रत्येकम् अपि 45^0

प्रश्नावलिः 7.3

3. (ii) (i) इत्यस्मात्, $\angle ABM = \angle PQN$

प्रश्नावलिः 7.4

4. BD योजयन्तु तथा $\angle B > \angle D$ इति निरूपयन्तु। AC योजयन्तु तथा $\angle A > \angle C$ इति निरूपयन्तु।

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$ इत्यादयः।

प्रश्नावलिः 8.1

1. 36^0, 60^0, 108^0 तथा 156^0

6. (i) ΔDAC तथा ΔBCA इत्येताभ्याम्, $\angle DAC = \angle BCA$ तथा $\angle ACD = \angle CAB$ इति निरूपयन्तु इत्यादयः।

   (ii) $\angle BAC = \angle BCA$, (8.4 प्रमेयम् उपयुज्य)

प्रश्नावलिः 8.2

2. PQRS समान्तर-चतुर्भुजः इति निरूपयन्तु। अपि च, PQ || AC तथा PS || BD इति निरूपयन्तु। अतः $\angle P = 90^0$।

5.AECF समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति। अतः, AF || CE इत्यादयः।

प्रश्नावलिः 9.1

1. (i) DC आधारः, DC तथा AB समान्तरौ। (iii) QR आधारः, QR तथा PS समान्तरौ।

   (v) AD आधारः, AD तथा BQ समान्तरौ।

प्रश्नावलिः 9.2

1. 12.8 cm **2.** EG योजयन्तु, द्वितीय-उदाहरणस्य परिणामस्य उपयोगं कुर्वन्तु।

6. ΔAPQ त्रिभुजे गोधूमः तथा अन्य-त्रिभुजद्वये द्विदलानि अथवा ΔAPQ त्रिभुजे द्विदलानि तथा अन्य-त्रिभुजद्वये गोधूमः।

प्रश्नावलिः 9.3

4. $CM \perp AB$ तथा $DN \perp AB$। $CM = DN$ इति निरूपयन्तु। **12.** चतुर्थम् उदाहरणम्।

प्रश्नावलिः 9.4

7. पौनःपुन्येन तृतीय-उदाहरणस्य परिणामस्य उपयोगं कुर्वन्तु।

प्रश्नावलिः 10.1

1. (i) आन्तरम् (ii) बाह्यभागः (iii) व्यासः
   (iv) अर्ध-वृत्तः (v) जीवा (vi) त्रीणि
2. (i) सत्यम् (ii) असत्यम् (iii) असत्यम्
   (iv) सत्यम् (v) असत्यम् (vi) सत्यम्

प्रश्नावलिः 10.2

1. सर्वाङ्गसम-वृत्तानां जीवां स्वीकृत्य 10.1 प्रमेयेन तादृप्येन निरूपयन्तु।
2. SAS सर्वाङ्गसम-अभिगृहीतम् उपयुज्य द्वयोः त्रिभुजयोः सर्वाङ्गसमता निरूपयन्तु।

प्रश्नावलिः 10.3

1. 0, 1, 2. द्वे 2. प्रथम-उदाहरणवत् कुर्वन्तु।

2. वृत्तयोः मध्यबिन्दू O, O' AB इति सर्व-निष्ठ-जीवायाः मध्यबिन्दुः M इत्यनेन योजयन्तु। अग्रे, $\angle OMA = 90^0$ तथा $\angle O'MA = 90^0$।

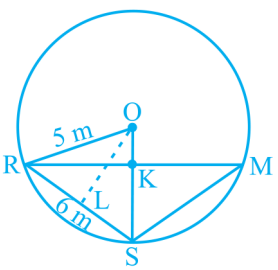
प्रश्नावलिः 10.4

1. 6cm. मध्यबिन्दुभिः सह युज्यमाना रेखा लघुतर-वृत्तस्य त्रिज्यायाः समलम्बः अस्ति इति निरूपयन्ति। तर्हि सर्वनिष्ठ-जीवा एव लघुतर-वृत्तस्य व्यासःअस्ति।

2. यदि AB, CD इति कस्यचित् वृत्तस्य समान-जीवे स्तः, ये E बिन्दौ प्रतिच्छिन्नतः, तर्हि AB इत्यस्यां जीवायां OM इति समलम्बः तथा CD इत्यस्यां ON इति समलम्बं चित्रयन्तु तथा OE योजयन्तु। OME, ONE इति समकोण-त्रिभुजे सर्वाङ्गसमौ इति निरूपयन्तु।

3. द्वितीय-उदाहरणवत् कुर्वन्तु। 4. AD इत्यस्मिन् OM समलम्बं चित्रयन्तु।

5. रेश्मा, सल्मा, मन्दीपं क्रमेण R, S, M इति प्रतिनिधि-रूपेण वदन्तु।



आकृतिं पश्यन्तु KR = x m

ORS त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2} \times x \times 5$।

अपि च, ORS त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् तु = $\frac{1}{2}$ RS × OL = $\frac{1}{2} \times 6 \times 4$

x अवगत्य RM अपि अवगच्छन्तु।

6. समबाहु-त्रिभुजस्य गुणधर्माणां तथा भृज-कोटि-कर्ण-न्यायास्य अपि उपयोगं कुर्वन्तु।

प्रश्नावलिः 10.5

1. 45^0 **2.** $150^0, 30^0$ **3.** 10^0

4. 80^0 **5.** 110^0 **6.** $\angle BCD = 80^0$ तथा $\angle ECD = 50^0$

8. CD इत्यस्मिन् AM, BN इति द्वौ समालम्बौ चित्रयन्तु। (AB || CD तथा (AB < CD). $\Delta ABD \cong \Delta BNC$ इति दर्शयन्तु। $\angle C = \angle D$ इति प्राप्यते, अतः $\angle A + \angle C = 180^0$

प्रश्नावलिः 10.6

2. वृत्तस्य मध्यबिन्दुः O इति भवतु। तर्हि समलम्ब-समद्विभाजकः द्वयोः जीवयोः अपि समानं भवति तथा O द्वारा गच्छति। r त्रिज्या भवतु, तर्हि $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6 - x)^2$, यत्र x तु O बिन्दुतः 11cm

दीर्घ जीवायां समलम्बस्य दीर्घता अस्ति । अनेन $x = 1$, अतः

$r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm. **3.** 3cm

4. $\angle AOC = x$, तथा $\angle DOC = y$ । $\angle AOD = z$ भवतु । तर्हि $\angle EOC = z$, तथा $x + y + 2z = 360^0$

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90^0 - \frac{1}{2}z + z = 90^0 + \frac{1}{2}z$ । अपि च, $\angle OEB = 90^0 + \frac{1}{2}z$ ।

8. $\angle ABE = \angle ADE$, $\angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$

अतः $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180^0 - \angle A) = 90^0 - \frac{1}{2}\angle A$ ।

9. प्रश्नः.1, 10.2 उदाहरणम्, 10.8 प्रमेयं प्रयुज्यन्तु ।

10. $\angle A$ इत्यस्य कोण-समद्विभाजकः ABC इति त्रिभुजस्य वृत्तवर्तुलं D बिन्दौ प्रतिछिन्नत्तु । DC, DB योजयन्तु । तर्हि $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ तथा $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$ । अतः $\angle BCD = \angle DBC$ अथवा DB = DC । अतः BC इत्यस्य कोण-समद्विभाजके D अस्ति ।

प्रश्नावलिः 12.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $900\sqrt{3}$ cm^2 **2.** 1650000 रुप्यकाणि **3.** $20\sqrt{2}$ m^2
4. $21\sqrt{11}$ cm^2 **5.** 9000cm^2 **6.** $9\sqrt{15}$ cm^2

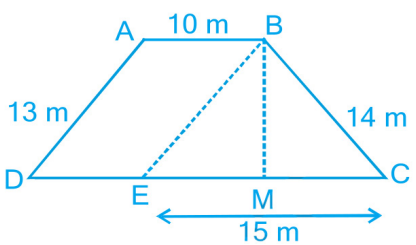
प्रश्नावलिः 12.2

1. 65.5m^2 (प्रायः) **2.** 15.2cm^2 (प्रायः) **3.** 19.4cm^2 (प्रायः)
4. 12 cm **5.** 48m^2 **6.** $1000\sqrt{6}$cm^2, $1000\sqrt{6}$cm^2

7. I छायाङ्कनस्य क्षेत्रफलम् = II छायाङ्कनस्य क्षेत्रफलम् = 256 cm^2 तथा III छायाङ्कनस्य क्षेत्रफलम् = 17.92 cm^2

8. 705.60 रुप्यकाणि **9.** 196m^2

[आकृतिं पश्यन्तु । ΔBEC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = 84 m^2, अग्रे BM इत्यस्य औन्नत्यम् अवगच्छन्तु ।]



प्रश्नावलिः 13.1

1. (i) 5.45 m^2 (ii) 109 रुप्यकाणि **2.** 555 रुप्यकाणि **3.** 6 m **4.** 100 इष्टिकाः ।

5. (i) घनाकार-पेटिकायाः पार्श्व-पृष्ठीय-क्षेत्रफलं 40 cm^2 अधिकम् अस्ति ।
(ii) घनाभाकार-पेटिकायाः पूर्ण-पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् 10 cm^2 अधिकम् अस्ति ।

6. (i) काचस्य 4250 cm^2 (ii) पट्टेः 320 cms [सर्वेषां प्रकोणानां योगं परिकलयन्तु]
(12 प्रकोणेषु 4 दीर्घताः, 4 विशालताः तथा 4 औन्नत्यानि)

7. 2184 रुप्यकाणि **8.** 47m^2

प्रश्नावलिः 13.2

1. 2 cms **2.** 7.48 cm^2 **3.** (i) 968 cm^2 (ii) 1064.8 cm^2 (iii) 2038.08 cm^2
[सानिकायाः पूर्णपृष्ठीय-क्षेत्रफलम् तु (आन्तर-वक्र-पृष्ठीयक्षेत्रफलम् + बाह्य-पृष्ठीयक्षेत्रफलम् + आधारद्वयोः क्षेत्रफलम्) । प्रत्येकम् आधारः π ($R^2 - r^2$) इति क्षेत्रफलयुक्त-अङ्गुल्यकम् अस्ति । (यत्र R इति बाह्य-त्रिज्या, r इति आन्तर-त्रिज्या)

4. 1584 m^2 **5.** 68.75 रुप्यकाणि **6.** 1 m

7. (i) 110 m^2 (ii) 4400 रुप्यकाणि 8. 4.4 m^2

9. (i) 59.4 m^2 (ii) 95.04 m^2
सारलोहस्य वास्तविक-क्षेत्रफलम् = x m^2 । यतः सारलोहस्य $\frac{1}{12}$ भागः व्यर्थः जातः, अतः कार्यार्थं उपयुक्तः सारलोहः तु $\frac{11}{12}x$ । अनेन ज्ञायते यत् उपयुक्तस्य सारलोहस्य क्षेत्रफलं तु $\frac{12}{11} \times 87.12$ m^2

10. 2200 cm^2 । दण्डगोलस्य औन्नत्यं तु (30 + 2.5 + 2.5) cm

11. 7920 cm^2

प्रश्नावलिः 13.3

1. 165 cm^2 **2.** 1244.57 cm^2 **3.** (i) 7 cm (ii) 462 cm^2

4. (i) 26 m (ii) रुप्यकाणि 137280 **5.**63 m **6.**रुप्यकाणि 1155

7. 5500 cm^2 **8.**रुप्यकाणि 384.34 (प्रायः)

प्रश्नावलिः 13.4

1. (i) 1386 cm^2 (ii) 394.24 cm^2 (iii) 2464 cm^2

2. (i) 616 cm^2 (ii) 1386 cm^2 (iii) 38.5 m^2

3. 942 cm^2 **4.** 1:4 **5.** रुप्यकाणि 27.72

6. 3.5 cm **7.** 1:16 **8.** 173.25 cm^2

9. (i) 4 πr^2 (ii). $4\pi r^2$ (iii) 1:1

प्रश्नावलिः 13.5

1. 180 cm^2 **2.** 135000 l **3.** 4.75 m **4.**रुप्यकाणि 4320

5. 2m **6** 3 दिनानि **7.** 16000 **8.** 6 cm, 4:1

9. 4000 m^3

प्रश्नावलिः 13.6

1. 34.65 l
2. 3.432 kg {सानिकायाः घनफलम् = $\pi h \times (R^2 - r^2)$ यत्र R बाह्य-त्रिज्या, *r*- आन्तर-त्रिज्याः)
3. दण्डगोलस्य 85 cm^2 अधिकं घनफलम् अस्ति।
4. (i) 3 cm (ii) 141.3 cm^3
5. (i) 110 m^2 (ii) 1.75 m (iii) 96.25 *kl* **6.** 0.4708 m^2
7. काष्ठस्य घनफलम् = 5.28 cm^3, कौकिलेयस्य घनफलम् = 0.11 cm^3
8. 38500 cm^3 अथवा रसस्य 38.5 l

प्रश्नावलिः 13.7

1. (i) 264 cm^3 (ii) 154 cm^3 **2.** (i) 1.232 l (ii) $\frac{11}{35} l$

3. 10 cm **4.** 8 cm **5.** 38.5 *kl*

6. (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 cm^2 **7.** 100π cm^3 **8.** 240π cm^3; 5:12

9. 86.625 m^3, 99.825 m^2

प्रश्नावलिः 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ cm^3 (ii) 1.05 m^3 (प्रायः)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ cm^3 (ii) 0.004851 m^3 **3.**345.39g(प्रायः) **4.** $\frac{1}{64}$

5. 0.303 l (प्रायः) **6.** 0.06348 m^3(प्रायः)

7. $179\frac{2}{3}$ cm^3 **8.** (i) 249.48 m^2 (ii) 523.9 m^3(प्रायः)

9. (i) 3*r* (ii) 1:9 **10.** 22.46 mm^3(प्रायः)

प्रश्नावलिः 13.9 (विकल्पः)

1. रु. 6275

2. रु. 2784.32 (प्रायः) [अत्र स्मरन्तु यत् यदा रजत-वर्णलेपस्य मूल्यं परिकलनीयं तदा आधारस्य उपरि स्थीयमानस्य गोलस्य भागः व्यवकलनीयः] **3** 43.75%

प्रश्नावलिः 14.1

1. अस्माकं दैनन्दिन-जीवनात् सङ्ग्रहीतानि दत्तांशस्य पञ्च उदाहरणानि

   (i) अस्माकं कक्ष्यायां छात्राणां सङ्ख्या ।

   (ii) अस्माकं विद्यालये व्यजनानां सङ्ख्या ।

   (iii) गतद्वय-वर्षस्य अस्माकं गृहस्य विद्युत्-व्यय-पत्रम् ।

   (iv) अस्माकं दूरदर्शनात् वा पत्रिकाभ्यः वा प्राप्ता निर्वाचनस्य परिणामः ।

   (v) शैक्षणिक-सर्वेक्षणात् प्राप्ता साक्षरतायाः स्तरस्य सङ्ख्याः ।

   अत्र स्मरन्तु यत् इतोऽपि अधिकानि उत्तराणि भवन्ति इति ।

2. प्राथमिक-दत्तांशः (i), (ii) तथा (iii) गौण-दत्तांशः; (iv) तथा (v)

प्रश्नावलिः 14.2

1.

रक्त-गणः	छात्राणां सङ्ख्या
A	9
B	6
O	12
AB	3
पूर्णः	30

सर्वनिष्ठतमः = O, दुर्लभतमः = AB

2.

दूरम् (किं मी)	गुणनकार-अङ्काः	आवृत्तिः
0 - 5	𝍸	5
5 - 10	𝍸𝍸|	11
10 - 15	𝍸𝍸|	11
15 - 20	𝍸||||	9
20 - 25	|	1
25 - 30	|	1
30 - 35	||	2
पूर्णः		40

3.(i)

सापेक्ष-आर्द्रता (%)	आवृत्तिः
84 - 86	1
86 - 88	1
88 - 90	2
90 - 92	2
92 - 94	7
94 - 96	6
96 - 98	7
98 - 100	4
पूर्णः	30

(ii) एषः दत्तांशः वर्ष-ऋतौ स्वीकृतः इति भाति यतः सापेक्ष-आर्द्रता अधिका दृश्यते ।

(iii) गोचरः = 99.2 – 84.9 = 14.3

4. (i)

औन्नत्यम् (cm)	आवृत्तिः
150-155	12
155-160	9
160-165	14
165-170	10
170-175	5
पूर्णः	**50**

(ii) उपरिदत्तात् कोष्ठकात् एकः निष्कर्षः प्राप्तुं शक्यते यत् पञ्चाशत्-प्रतिशताधिक-जनाः 165 cms इत्यस्यात् वामनतराः सन्ति।

5.

सल्फर-डै-आक्सैड् स्थैर्यम् (ppm)	आवृत्तिः
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2
पूर्णः	**30**

(ii) अष्ट-दिनानां कृते सल्फर-डै-आक्सैड् इत्यस्य स्थैर्यम् 0.11 ppm इत्यस्मात् अधिकम् अस्ति।

6.

शिरस्-सङ्ख्या	आवृत्तिः
0	6
1	10
2	9
3	5
पूर्णः	**30**

7.

अङ्काः	आवृत्तिः
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
पूर्णः	**50**

(ii) अधिकतया पुनरावर्तते इति 3, 9 । न्यूनतया पुनरावर्तते इति 0 ।

8.

घण्टायाः सङ्ख्या	आवृत्तिः
0-5 5-10 10-15 15-20	10 13 5 2
पूर्णः	**30**

(ii) 2 बालकौ

9.

विद्युत्कोषाणां कालः (वर्षेषु)	आवृत्तिः
2.0 - 2.5 2.5 - 3.0 3.0 - 3.5 3.5 - 4.0 4.0 - 4.5 4.5 - 5.0	2 6 14 11 4 3
पूर्णः	**40**

प्रश्नावलिः 14.3

1. (ii) पुनरुत्पादन-आरोग्य-परिस्थितिः

3. (ii) समाजः A **4.** (ii) वर्गान्तरालः (iii) न **5.** (ii) 184

8.

वयः (वर्षाणि)	आवृत्तिः	विशालता	आयतस्य दीर्घता
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

एताभिः दीर्घताभिः भवन्तः रेखाचित्रं चित्रयितुं शक्नुवन्ति।

9.(i)

अक्षराणां सङ्ख्या	आवृत्तिः	अन्तरालस्य विशालता	आयतस्य दीर्घता
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

इदानीं रेखाचित्रं चित्रयन्तु।

(ii) 6 - 8

प्रश्नावलिः 14.4

1. माध्यः = 2.8, माध्यकः = 3, बहुलकः = 3
2. माध्यः = 54.8, माध्यकः = 52, बहुलकः = 52

3. $x = 62$ 4. 14

5. 60 कार्यकर्तृणां माध्य-वेतनम् = रु.5083.33

प्रश्नावलिः 15.1

1. $\frac{24}{30}$ अर्थात् $\frac{4}{5}$ **2.** (i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$ **3.** $\frac{3}{20}$ **4.** $\frac{9}{25}$

5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$ (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$ 6. (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$ 8. (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0 11. $\frac{7}{11}$ 12. $\frac{1}{15}$ 13. $\frac{1}{10}$

प्रश्नावलिः A1.1

1. (i) सर्वदा असत्यम्। कस्मिञ्चित् वर्षे 12 मासाः सन्ति।

   (ii) सन्धिग्धम्। दत्ते वर्षे दीपावलिः शुक्रवासरे भवितुम् अर्हति अथवा न भवितुं न अर्हति।

   (iii) सन्दिग्धम्। वर्षे कस्मिञ्चित् काले, मागध्यां तापमानः तु 26^0 C भवितुम् अर्हति।

   (iv) सर्वदा सत्यम्।

   (v) सर्वदा असत्यम्। शुनकाः डयितुं न शक्नुवन्ति।

   (vi) सन्दिग्धम्। चतुर्षु वर्षेषु एकवारं फरवरीमासे 29 दिनानि भवन्ति।

2. (i) असत्यम्। चतुर्भुजस्य अन्तः कोणानां योगः तु 360^0।

   (ii) सत्यम् (iii) सत्यम् (iv) सत्यम्

   (v) असत्यम्, उदाहरणार्थम्, $7 + 5 = 12$ इति विषम-सङ्ख्या नास्ति।

3. (i) द्वयस्य अपेक्षया बृहत्तराः सर्व-अभाज्य-सङ्ख्याः विषम-सङ्ख्याः।

   (ii) प्राकृतिक-सङख्यायाः द्विगुणं क्रियते चेत् समसङ्ख्या एव प्राप्यते।

   (iii) यत् किमपि $x > 1$, $3x + 1 > 4$ इति भवति।

   (iv) यत् किमपि $x >= 0$, $x^3 >= 0$।

4. कस्मिञ्चित् समबाहु-त्रिभुजे, माध्यकः अपि कोण-समद्विभाजकः अस्ति।

प्रश्नावलिः A1.2

1. (i) मनुष्याः मेरुदण्डयुक्ताः। (ii) दिनेशः अन्येन केनचित् द्वारा स्वस्य केशकर्तनं साधयितुं शक्तवान् स्यात्। (iii) गुलागस्य रक्त-जिह्वा। (iv) वयं एवं निष्कर्षं प्रति प्राप्नुमः यत् श्वः जलनिर्गमाः शुद्धीकरणीयाः इति। (v)

येषां मृगाणां पुच्छम् अस्ति, ते सर्वे शुनकाः एव भवेयुः इति नास्ति, यतः महिषी, मर्कटः मार्जारः इत्यादीनीं मृगाणां अपि पुच्छम् अस्ति। किन्तु एते शुनकाः न।

2. भवन्तः B, 8 इत्यनयोः परिवर्तनं करणीयम्। यदि B इत्यस्य अन्य-पार्श्वे सम-सङ्ख्या अस्ति, तर्हि नियम-भङ्गः अभवत्। यदि 8 इत्यस्य अपर-पार्श्वे व्यञ्जनाक्षरम् अस्ति, तर्हि नियम-भङ्गः अभवत्।

प्रश्नावलिः A1.3

1. त्रयः सम्भव-तर्काः तु

   (i) कासाञ्चित् क्रमागत-तिसृणां-सम-सङ्ख्यानां गुणनं तु सम-सङ्ख्या। (ii) कासाञ्चित् क्रमागत-तिसृणां-सम-सङ्ख्यानां गुणनं चतुर्भिः विभज्यः भवति। (iii) कासाञ्चित् क्रमागत-तिसृणां-सम-सङ्ख्यानां गुणनं षड्भिः विभज्यः भवति।

2. चतुर्था-पङ्क्तिः $-1\ 3\ 3\ 1 = 11^3$; पञ्चम-पङ्क्तिः $1\ 4\ 6\ 4\ 1 = 11^4$। एषः तर्कः चतुर्थ-पञ्चम-पङक्त्योः कृते सत्यं भवति। न, यतः $11^5 \neq 15101051$.

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$।

4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$

5. छात्रस्य स्व-उत्तरम्। उदाहरणार्थं यूक्लिडस्य अभिधारणाः।

प्रश्नावलिः A1.4

1. (i) भवन्तः यत् किमपि समान-कोणयुक्त-त्रिभुजद्वयं दातुं शक्नुवन्ति। किन्तु तयोः भिन्न-भुजाः भवेयुः।

   (ii) समचतुर्भुजस्य समान-भुजाः किन्तु वर्गः न स्यात्।

   (iii) आयतस्य समान-कोणाः भवन्ति, किन्तु वर्गः न स्यात्।

   (iv) $a = 3$, $b = 4$ इत्यनयोः कृते वाक्यं सत्यं नास्ति।

   (v) $n = 11$ इत्यस्य कृते $2n^2 + 11 = 253$ या अभाज्य-सङ्ख्या नास्ति।

   (vi) $n = 41$ इत्यस्य कृते $n^2 - n + 41$ अभाज्य-सङ्ख्या नास्ति।

2. छात्रस्य स्व-उत्तरम्

3. x, y इति विषम-सङ्ख्याद्वयं भवतु। तर्हि m इति काचित् प्राकृतिक-सङ्ख्यायाः कृते $x = 2m + 1$, n इति काचित् प्राकृतिक-सङ्ख्यायाः कृते $y = 2n + 1$।

$x + y = 2(m + n + 1)$। अतः $x + y$ द्वाभ्यां विभज्यः भवति तथा सा सम-सङ्ख्या भवति।

4. तृतीय-प्रश्नं पश्यन्तु। $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(mn + m + n) + 1$

अतः x, y द्वाभ्यां विभज्यः न भवतः तथा सा विषम-सङ्ख्या भवति।

5. $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$ इति तिस्रः क्रमागत-सम-सङ्ख्याः भवन्तु। तर्हि तासां योगः $6(n + 1)$, तु षड्भिः

विभज्यते।

7. (i) n मूलसङ्ख्या स्यात्। तर्हि वयं अधोदत्त-प्रक्रियाः कुर्मः।

$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n + 9 \rightarrow 2n + 9 + n = 3n + 9 \rightarrow \frac{3n + 9}{3} = n + 3 \rightarrow n + 3 + 4 = n + 7 \rightarrow n + 7 - n = 7$

(ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$। abc इति त्र्यङ्क-सङ्ख्यां कामपि स्वीकुर्वन्तु। तर्हि $abc \times 1001 = abcabc$। अतः $abcabc$ इति षडङ्क-सङ्ख्या 7, 11, 13 द्वारा विभक्तः भवति।

प्रश्नावलिः A2.1

1. **प्रथमं सोपानम् - सूत्रणम्**

सान्दर्भिक-कारणानि तु सङ्गणकं बाटकार्थं स्वीकर्तुं काल-घट्टः तथा दत्त-मूल्यद्वयम्। वयं परिकल्पयामः यत् सङ्गणकस्य क्रयणे वा बाटकार्थं स्वीकरणे वा महत्वपूर्णः मूल्य-भेदः नास्ति इति। अतः वयं ईदृशान् भेदान् असान्दर्भिकम् इति चिन्तयामः। वयं सङ्गणकस्य सर्वेषां चिह्नां मध्ये तथा सङ्गणकानां परम्पराणां मध्ये भेदः नास्ति इति एव चिन्तयामः – अर्थात् एते भेदाः अपि असान्दर्भिकाः।

x मासानां कृते सङ्गणकं-बाटकार्थं-स्वीकरणे मूल्यं तु रु.$2000x$। यदि एतत् मूल्यं सङ्गणकस्य क्रयण-मूल्यस्य अपेक्षया अधिकं अस्ति चेत् क्रयणम् एव वरम्। अतः समीकरणम् तु

$$2000x = 25000 \qquad (1)$$

द्वितीयं सोपानम् - समाधानम् (1) समीकरणस्य समाधानेन, $x = (25000/2000) = 12.5$

तृतीयं सोपानम् – व्याख्यानम् – यतः 12.5 मासानाम् अनन्तरं सङ्गणकस्य बाटकम् अधिकम् अस्ति, सङ्गणकस्य क्रयणं एव न्यून-मूल्यं भवति यदि तत् 12 मासेभ्यः अपि परं उपयोक्तव्यम्।

2. **प्रथमं सोपानम् - सूत्रणम्**

वयं सर्वाणि कार्यानानि स्थिर-वेगे एव गच्छन्ति इति परिकल्पयामः। अतः वेगे परिवर्तनम् असान्दर्भिकं भवति। यदि कार्यानानि x घण्टायाः अनन्तरं मिलतः, तर्हि प्रथमं यानं A इति बिन्दुतः $40x$ km दूरं यातं स्यात् तथा द्वितीयं यानं $30x$ km दूरं यातं स्यात्, येन तत् A इति बिन्दुतः $(100 - 30x)$km दूरतः स्यात्। अतः समीकरणं तु $40x = 100 - 30x$ अर्थात्, $70x = 100$.

द्वितीयं सोपानम् – समाधानम् - समीकरणस्य समाधानेन $x = \frac{100}{70}$

तृतीयं सोपानम् – व्याख्यानम्

$\frac{100}{70} = 1.4$ घण्टाः। अतः कार्याने 1.4 घण्टायाः अनन्तरं एव मिलतः।

3. **प्रथमं सोपानम् – सूत्रणम्** चन्द्रः यस्मिन् वेगे भूमिं परिभ्रमति

$$= \frac{\text{मण्डलस्य दीर्घता}}{\text{समयः}}$$

द्वितीयं सोपानम् – समाधानम् यतः मार्गः प्रायः मण्डलाकारे एव अस्ति, दीर्घता तु $2 \times \pi \times 384000$ km $= 2411520$ kmचन्द्रः एकवारं भूमेः परिभ्रमणं 24 घण्टासु करोति।

अतः वेगः $= \frac{2411520}{24} = 100480$ km/hr

तृतीयं सोपानम् – व्याख्यानम् – वेगः तु 100480 km/hr

4. **सूत्रणम्** – एका परिकल्पना अस्ति यत् व्ययपत्रे भेदः तु जल-उष्णीकरणयन्त्रस्य उपयोगेन एव इति।

जल-उष्णीकरण-यन्त्रस्य उपयोगः कृता माध्य-घण्टाः $= x$

प्रतिमासं जल-उष्णीकरण-यन्त्रस्य उपयोगेन प्राप्तं व्यवकलनम् = रु.1240 - रु.1000 = 240 रूप्यकाणि।

प्रतिघण्टा जल-उष्णीकरण-यन्त्रस्य उपयोगाय मूल्यम् = रु.8

अतः 30 दिनानां कृते जल-उष्णीकरण-यन्त्रस्य उपयोगस्य मूल्यम् $= 8 \times 30 \times x$

अपि च, 30 दिनानां कृते जल-उष्णीकरण-यन्त्रस्य उपयोगस्य मूल्यम् =

जल-उष्णीकरण-यन्त्रस्य उपयोगेन प्राप्तं व्यवकलनम्

अतः $240x = 240$

समाधानम् : एतस्मात् समीकरणात् $x = 1$ इति प्राप्यते।

व्याख्यानम् = यतः $x = 1$, जल-उष्णीकरण-यन्त्रस्य उपयोगः प्रतिदिनं माध्येन एकघण्टा कृता अस्ति।

प्रश्नावलिः A2.2

1. अत्र वयं किमपि अमुखं समाधानं न चर्चयामः। भवन्तः पूर्व-उदाहरणे उपयुक्तां पद्धतिं एव प्रयोक्तुं शक्नुवन्ति अथवा भवद्भिः उचितम् इति मन्यमाना कापि अन्या पद्धतिः।

प्रश्नावलिः A2.3

1. वयं पूर्वमेव उक्तवन्तः यत् वास्तविक-जीवन समस्यासु सूत्रण-भागः बहु-विस्तृतं भवितुम् अर्हति इति। अपि च, वयं पद-समस्यासु उत्तराणां मान्यकरणं न कुर्मः। एतस्य अपेक्षया पद-समस्यासु 'साधु-उत्तरम्' भवति। किन्तु वास्तविक-जीवन-समस्यासु एवं भवितव्यम् इति विधिः नास्ति।
2. मुख्य-कारणानि तु (ii) तथा (iii)। अत्र (i) मुख्य-कारणं नास्ति यद्यपि विक्रीत-वाहानानां-सङ्ख्यासु अस्य प्रभावः भवितुम् अर्हति।

SBIN 81-7450-505-9